Capítulo Séptimo
LOS INVARIANTES

CAYLEY Y SYLVESTER

Durante mucho tiempo ha sido artículo de fe la creencia en el valor de símbolos matemáticos sin sentido, creencia que ha dado lugar a verdaderos absurdos cuyo origen está en la que Enriques ha llamado "superstición del formalismo”, que nace de una falsa interpretación del principio de Hankel, según el cual toda expresión escrita con los símbolos de la Aritmética universal sigue siendo válida cuando las letras dejan de representar simples “cantidades". Hoy sabemos que esto sólo es cierto bajo ciertas condiciones. El año 1863 Weierstrass estableció el llamado teorema final de la Aritmética que demuestra la no existencia de ningún sistema de números complejos de más de dos componentes en el que el producto satisfaga todas las leyes formales de la Aritmética.
Ya el año 1858 Cayley había encontrado una extraña propiedad en el cálculo de matrices: la no conmutatividad del producto, que causó el efecto de una herejía; pero las herejías dejan de serio cuando son razonables y la de Cayley ha sido, precisamente, la base de la obra de Heisenberg que ha modificado la Mecánica ondulatoria, sustituyendo el principio de causalidad toda causa tiene un efecto, admitido como dogma científico, por el de indeterminación, que reduce a la modesta categoría de probable la certeza que orgullosamente hemos venido atribuyendo a la Ciencia.
Pero en la primera mitad del siglo XIX, las cosas pasaban de otro modo, y fueron los ingleses quienes, saliendo de su "espléndido aislamiento", las modificaron de raíz. El año 1812 Jorge Peacock, Carlos Babbage y Juan Federico Guillermo Herschell fundan en Cambridge una "Sociedad Analítica" que no tardó en hacer progresar la Matemática, encerrada hasta entonces en moldes newtonianos. Dicha sociedad fue el germen de lo que después se ha llamado escuela de los reformadores ingleses, quienes, con su característica originalidad insular, pusieron los cimientos de la actual Álgebra por postulados; y cuando el año 1841 Cayley y Sylvester crean la teoría de invariantes, de importancia capital en la Física teórica, el terreno está ya preparado para recibir la nueva semilla.
James Joseph Sylvester nació en Londres el 8 de septiembre de 1814, de padres israelitas, y se ignora todo lo relativo a su infancia. Contaba siete años cuando vino al mundo Arturo Cayley, su complemento algebraico, en Richmond, Surrey, de padre inglés y madre rusa, el 16 de agosto de 1821, el año en que Abel creyó haber resuelto la ecuación general de quinto grado y, al observar un error en sus cálculos, le inspiró algo mucho mejor: la demostración de la imposibilidad de resolverla, que decidió la suerte de toda una teoría algebraica.

El padre de Cayley, que era negociante, se retiró a vivir tranquilamente en Blackheath, en 1829, donde el pequeño Arturo aprendió las primeras letras, al mismo tiempo que Sylvester, ya adolescente, ingresaba en la Royal Institution de Liverpool desde donde tuvo el primer contacto con los EE.UU. en los que años después había de producir una verdadera revolución matemática. Allí tenía un hermano que era actuario, y la empresa de loterías le consultó un difícil problema de cálculos de probabilidades. Lo resolvió, y este su primer trabajo le valió la bonita suma de quinientos dólares que, en aquella época, era casi una fortuna.
Su origen judío le impidió suscribir los treinta y nueve artículos que la Iglesia anglicana exige como mínimo de creencias religiosas, y marchó a Irlanda en busca de la libertad de conciencia que le negaba Inglaterra. En Dublín obtuvo los diplomas de bachiller y licenciado que no pudo conseguir en Cambridge, en cuyo Trinity College ingresaba Cayley con la calificación de “por

encima del primero" al mismo tiempo que Sylvester embarcaba para Virginia como profesor de Matemática de su Universidad.

En aquellos años, los analistas ingleses habían hecho grandes progresos. John Warren atacó el problema del imaginarismo, que entonces estaba de moda y que es el causante de las muchas tonterías que han escrito los filósofos que sólo conocen la Matemática del bachillerato, y su *A Treatise on the Geometrical Representation of the Square Roots of Negative Quantities*, publicado en 1828, puede considerarse como una anticipación de Gauss, y Peacock da a conocer su tratado de Algebra en el que por primera vez se consideran las letras *a*, *b*, que intervienen en relaciones como

$$a + b = b + a$$
$$a\ ´\ b = b\ ´\ a$$

no como números, sino cómo símbolos arbitrarios combinados convenientemente en dos operaciones: una representada por el signo + y la otra por el signo × de acuerdo con los postulados previamente admitidos A Peacok le faltó, sin embargo, dar el paso decisivo: *demostrar* que sus postulados no eran contradictorios, paso que franquearon los alemanes que se ocupaban de los fundamentos de la Matemática.

La estancia de Sylvester en Virginia no fue grata. En cierta ocasión lo insultó un joven estudiante que no fue castigado. Sylvester dimitió y buscó trabajó en las universidades de Harvard y Columbia, y cómo no lo encontrara, regresó a Inglaterra donde obtuvo colocación como actuario en una compañía dé seguros, y olvidó la Matemática pura, ya que la aplicada es, precisamente, en los problemas de seguros donde tiene una de sus mejores aplicaciones.

En éste tiempo Cayley se dedicó al turismo. Viajó por Francia, Suiza e Italia, con la característica euforia dé los ingleses en cuanto cruzan el canal de La Mancha y, sobre todo, cuándo entran en una *boite de nuit* de Montmartre o les ciega la luz agresiva del cielo italiano. Cayley, como Sylvester, también olvidó la Matemática, y el año l846, por una rara coincidencia, ambos empiezan a estudiar Derecho, ambos se hacen abogados y ambos ejercen la profesión que tan alejada parece de las ciencias exactas, pero con las que debe de tener alguna conexión misteriosa.

Es muy frecuente, el caso de los estudiantes que, al fracasar en la Facultad de Ciencias o en las escuelas de Arquitectura o Ingeniería cambian el Álgebra por el Código civil y son, luego buenos abogados. Quizás, la explicación de este fenómeno se encuentre en la inflexibilidad de la interpretación de un hecho matemático y en la flexibilidad de la interpretación de un hecho jurídico y se concibe que haya espíritus que se sientan atraídos por una u otra orientación. Seguramente esa es la causa de que Grecia diese geómetras y Roma jurisconsultos. La ciencia griega es la romana desinteresada y romántica y la romana interesada y pragmática, y su aspecto práctico, que arranca de sus ideas religiosas, da carácter a sus concepciones científicas. La vida ciudadana, las obligaciones civiles y la preparación para la guerra, movidos los hombres a impulsos de una gran voluntad, hicieron de Roma un pueblo casi netamente práctico que redujo al mínimo la especulación científica, incompatible con el dinamismo de su idiosincrasia que le llevó a gozar plenamente de la vida. A Roma le interesó más el hombre que la Naturaleza, y a Grecia le interesó más la Naturaleza que el hombre y por eso la ciencia romana no tiene el poder de abstracción que tuvo en Atenas y en Alejandría, y, en vez de la Geometría, creó el Derecho, como corolario de su genio fundamentalmente humano.

Esto es muy comprensible y en el mundo ha de haber espíritus de todos los matices. Lo que ya no es tan comprensible es que luego de una formación matemática rigurosa, como la de Cayley y Sylvester, se abandone para abrazar la Jurisprudencia, cuyo ejercicio profesional puede ser compatible, tal es el caso de Fermat, con la Matemática, pero no el olvido absoluto de ésta para entregarse a la otra, y menos aún en Cayley que, cuando se decidió a estudiar Derecho, ya hacia tres años que había realizado varias investigaciones en la teoría de determinantes y hacía seis que, al traducir las operaciones geométricas de proyección al lenguaje analítico, a la manera cartesiana, sentó las bases de la teoría de invariantes.

El concepto de invariante está ligado al de grupo cuya definición general se apoya en la idea de operación; y así dice Bourlet que "un conjunto de transformaciones constituye un grupo si comprende la transformación idéntica y si el producto de un número cualquiera de transformaciones, así como la inversa de una transformación, forma parte del conjunto".

Esta definición, demasiado abstracta, necesita algunas aclaraciones para el lector no matemático. Una transformación es una correspondencia entre dos elementos A y B de un conjunto, llamándose B el transformado de A. Si consideramos ahora dos transformaciones T y T', una de las cuales hace corresponder al elemento A el B y la otra el B al C, el producto de las transformaciones T y T' es la transformación que al elemento A le nace corresponder el C; la inversa de la transformación T es la que al elemento B le hace corresponder el A, y, finalmente, el producto de una transformación por su inversa, aplicado a una figura, la, sustituye por ella misma: transformación idéntica. Una notable propiedad de los grupos es la invariantes, es decir: operaciones que dejan las relaciones que se pueden establecer entre los elementos del grupo y cuya ley de composición constituye su estructura.

Un ejemplo aclarará estas ideas. Tracemos en una hoja de papel una figura cualquiera, sencilla o complicada, compuesta de rectas y curvas que se entrecrucen, y doblemos el papel en la forma que nos plazca, pero ,sin desgarrarlo. ¿Tendrá esta figura alguna propiedad que sea la misma antes y después de plegar el papel? Tracemos ahora la misma figura sobre un trozo de caucho y luego estiremos el caucho en todas las direcciones que queramos, pero sin desgarrarlo. Se comprende sin dificultad que las longitudes de las líneas han variado; que los ángulos que formaban no son los mismos, ni las áreas tampoco; que algunas de las curvas se habrán complicado y otras, en cambio, han podido convertirse en rectas y, al revés, algunas rectas en curvas, y, sin embargo, hay algo en la figura que no ha cambiado, algo tan sencillo que, precisamente por eso, puede pasar inadvertido: ese algo es el orden de los puntos en que una línea cualquiera de la figura, recta o curva, encuentra a otra línea cualquiera, de modo que si, por ejemplo, para ir de un punto A a otro C, siguiendo una cierta línea, teníamos que pasar por un punto B de esta línea antes de deformarla, también tendremos que pasar por B para ir de A a C después de deformada, es decir: ese orden es un invariante en las transformaciones particulares que han plegado la hoja de papel y estirado la hoja de caucho.

Y ahora es fácil ver que la Geometría se reduce al estudio de los invariantes del grupo de los movimientos, esto es: de las relaciones que no cambian en el movimiento de los cuerpos sólidos, independientemente de las que tengan con el mundo exterior, límite alcanzado por un doble proceso psicológico de abstracción de las sensaciones y de generalización de la idea de cuerpo hasta hacerle asumir la categoría de figura geométrica, de tal modo que cuando decimos, por ejemplo, que en un triángulo isósceles los ángulos opuestos a los lados iguales son iguales, no pensamos un triángulo determinado, sino un triángulo isósceles cualquiera, con absoluta independencia de su magnitud y de su posición.

Obsérvese, en efecto, que los objetos del mundo exterior producen en nosotros diversas sensaciones que situamos en un cierto continente, de tal modo que la noción de éste queda aislada de las de orden, peso , contacto, etc. hasta llegar al concepto de extensión concreta primero y al de espacio vacío después. Si aquellas sensaciones no varían cuando estamos quietos, es decir, cuando no realizarnos ningún esfuerzo muscular, decimos que el objeto *está fijo* y si varían afirmamos que se mueve, esto es, que experimenta un cambio de posición o de estado, según que podamos o no podamos restablecer el primitivo conjunto de sensaciones por movimientos adecuados de nuestro cuerpo. En el primer caso el objeto no se deforma y en el segundo si.

Por consiguiente, si un objeto, colocado en una po*sición P'*, produce en nosotros un cierto conjunto de sensaciones, y *pasa sin deformarse de P' a P'' y de P'' a P'''*, variarán las sensaciones, pero siempre podremos restituir las primitivas por un cambio de actitud que nos permita colocar los diversos miembros de nuestro cuerpo en la misma posición relativa inicial respecto del objetos es decir, que la transformación directa de *P'* a *P'''*, es también un movimiento, de donde resulta que todos los movimientos sin deformación constituyen un grupo, concepto que aparecía en la definición de Bourlet como un todo complicado y ahora se presenta al espíritu como la síntesis de una serle de hechos idealizados, verdadera experimentación mental integrada por juicios mudos en tanto hemos tenido conciencia de estos dos procesos intelectuales: el formado por la variedad de sensaciones musculares y el constituido por la permanencia de forma en los movimientos, que nos permiten conocer las propiedades métricas de congruencia según las cuales dos figuras iguales a una tercera son iguales entre sí, o si se prefiere, dos figura iguales son dos posiciones distintas de una misma figura.

Los movimientos conservan las longitudes, los ángulos y la orientación de las figuras; pero hay otras transformaciones que no tienen estas propiedades, como las semejanzas, que conservan los ángulos pero no la distancia, y las simetrías, en las que se pierde la orientación; tal el guante de la mano derecha que no se puede superponer al de la izquierda sin volverlo del revés, en cuyo caso ya no es *el mismo* guante, o el objeto y su imagen en un espejo, que tampoco son superponibles *sin atravesar* el espejo, y de aquí, tal vez, las sensaciones extrañas que experimentamos cuando pensamos en la imposibilidad de coincidir con nuestra imagen al mirarnos al espejo; algo así como si fuera otro el que nos mira desde su superficie.

El grupo formado por todos los movimientos, todas las semejanzas y todas las simetrías es el grupo fundamental de Félix Klein, en cuyo famoso Programa de *Erlangen* estableció que la Geometría estudia las propiedades invariantes respecto de un grupo cualquiera de transformaciones, de donde resulta que hay tantas Geometrías corno grupos de transformaciones. Pero estos grupos se pueden reducir a tres: Análisis Situs, Geometría Proyectiva y Geometría Métrica, cada uno de los cuales corresponde a tres grupos de transformaciones fundamentales y estudia las propiedades invariantes respecto de estos grupos.

El concepto de grupo, surgido, de la experiencia, ha conseguido sistematizar las tres Geometrías que nacen de tres conjuntos de sensaciones: musculares, visuales y táctiles, estudiando cada una de ellas las propiedades invariantes respecto de un grupo de transformaciones fundamentales que responden a necesidades biológicamente inmediatas, puesto que todas las sensaciones espaciales, de espacio psicológico, tienden a nuestra conservación individual provocando las adecuadas reacciones corporales, directas o reflejas, que permiten el paso de la representación psicológica a la Geometría por medio de una eliminación de los datos heterogéneos de los sentidos, sin que nos asombren las desigualdades entre los espacios psicológicos: anisótropos, heterogéneos y limitados, y el espacio geométrico: isótropo, homogéneo e ilimitado, por razones de utilidad, como no nos chocan los bailes y las funciones de teatro en favor de los tuberculosos pobres, a causa de la diferencia entre el concepto y la representación sensible, que queda anulada por el imperativo biológico.

La labor de Cayley y de Sylvester fue más analítica que geométrica, pero, dado el carácter de este cursillo, es más fácil trasladar al campo de la Geometría el concepto de invariante, que dejarlo en el dominio del Álgebra.

Los dos matemáticos se conocieron el año 1850, no como matemáticos, sino como abogados, y en verdad que debió de ser curiosa la entrevista. Cada uno de ellos conocía la labor del otro y ambos se profesaban mutua admiración, de la que nació en aquel momento una amistad perdurable.

La relación personal de ambos tuvo recíproca influencia de la que salió beneficiada la Matemática y perjudicada la Jurisprudencia. Sylvester pidió un puesto de profesor en la Escuela Militar de Woolwich, y no se lo dieron, lo que le obligó a seguir trabajando en la compañía de seguros. Cayley fue más afortunado, pues que la Universidad de Cambridge creó por entonces una nueva cátedra de Matemática de la que le encargaron, y entonces se casó con Susana Moline. Sylvester permaneció célibe, encerrado unos años más en una oficina, realizando una labor de burócrata que no se acomodaba a su temperamento, y, al vacar una plaza en el Gresham College de Londres, la solicitó, pero no se la dieron. En cambio, fue llamado por la Academia de Woolwich para sustituir al candidato que lo había derrotado antes, porque éste acababa de morir.

Sylvester conservó la cátedra de Woolwich hasta el año 1870 en que fue jubilado por imperativo legal, aunque estaba en plena actividad y en pleno vigor.

Al año siguiente la instrucción pública inglesa se libró de la tutela eclesiástica y Sylvester obtuvo rápidamente sus grados honoris causa, y con ellos volvió a América.

Los EE.UU. tenían a gala en aquellos días no importar de Europa más que la Matemática estrictamente indispensable para satisfacer sus necesidades industriales. La opinión de cierto profesor inglés que reconocía la belleza de la teoría de funciones de Bessel a pesar de que tenía algunas aplicaciones prácticas, hubiera sido inconcebible para un norteamericano del último tercio del siglo XIX y en cambio aplaudiría a Cicerón cuando alababa a sus conciudadanos porque "gracias a los dioses, no son como los griegos y saben limitar el estudio de la Matemática al dominio de las aplicaciones prácticas". Afortunadamente, el aludido profesor inglés no pronunció su frase ni en la Roma del siglo I antes de J. C. ni en la Nueva York del XIX, sino en la Inglaterra de hoy.

La presencia de Sylvester en Norteamérica cambió radicalmente su modo de pensar a este respecto. Con voluntad tesonera y paciencia ejemplar, explicó sus teorías analíticas, convencido de la fecundidad de la abstracción; y cuando en 1875 se fundó la Universidad de Baltimore, Gilman, que era el alma de ella, llama Sylvester, quien, durante diez años de una labor que diríase incompatible con su edad, educó a una multitud de estudiantes que determinaron el magnífico desarrollo que tiene actualmente la Matemática pura en los Estados Unidos.

Sylvester no se limitó a las lecciones magistrales de la cátedra, sino que realizó, además, una labor de divulgación y de extensión desde *el American Journal of Mathematics*, que fundó en 1875, provocando una verdadera revolución en la enseñanza de la Matemática, y cuando volvió a Inglaterra, en 1885, como profesor especial de Oxford, podía sentirse verdaderamente orgulloso de sí mismo. En la otra orilla del Atlántico quedaban una afición y un método que ya habían empezado a dar pruebas fidedignas de inmediatos frutos sazonados, y cuando en 1893 hubo de retirarse no ya por razones de carácter burocrático, sino biológico, porque era octogenario y estaba casi ciego, alcanzó a saber con legítima e íntima satisfacción que la semilla depositada por él daba ya frutos de bendición.

Murió en Londres el 15 de marzo de 1897. Dos años antes, el 26 de enero de 1895, habla muerto Cayley, dejando escritas novecientas sesenta y seis memorias, que ocupan trece volúmenes en cuarto de seiscientas páginas cada uno.