ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

TEMA 1

Ejercicios Prácticos

CUADERNILLO DE EJERCICIOS

Relación 1.
Sucesos y probabilidad. Probabilidad condicionada.

1.– Sean A, B y C tres sucesos cualesquiera. Determine expresiones para los siguientes sucesos:

a) Ocurre sólo A.
b) Ocurren A y B pero no C.
c) Ocurren los tres sucesos.
d) Ocurre al menos uno.
e) Ocurren al menos dos.
f) Ocurre uno y sólo uno.
g) Ocurren dos y sólo dos.
h) No ocurre ninguno.
i) No ocurren más de dos.

2.– Se extrae una carta al azar de una baraja de 52 cartas. Sea A el suceso {se extrae un rey} y B el suceso {se extrae una copa}. Describa los sucesos $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup B^c$, $A^c \cup B^c$, $A-B$, A^c-B^c, $(A \cap B) \cup (A \cap B^c)$.

3.– Se lanzaron dos dados. Sea A el suceso {la suma de los puntos es impar} y B el suceso {se ha obtenido al menos un 3}. Describa los sucesos $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup (A \cap B^c)$.

4.– ¿Cuántos números de cuatro cifras pueden formarse con los 10 dígitos 0, 1, 2, 3,...,9, si:

a) los dígitos pueden repetirse?.
b) los dígitos no pueden repetirse?.
c) el último dígito ha de ser cero y los dígitos no pueden repetirse?.

Resuelva las cuestiones tanto admitiendo que los números que empiezan por cero son realmente números de cuatro cifras (ejemplo: el 0783 sería un número de cuatro cifras), como suponiendo que no es así (en el ejemplo anterior, 0783 es realmente 783 y solo tiene tres cifras).

5.– Una caja contiene 8 bolas rojas, 3 blancas y 9 azules. Si se extraen 3 bolas aleatoriamente sin remplazamiento, determine la probabilidad de que:

a) las 3 bolas sean rojas.
b) las 3 bolas sean blancas.
c) 2 bolas sean rojas y 1 blanca.
d) al menos 1 bola sea blanca.
e) se extraiga una de cada color.
f) las bolas sean extraídas en el orden roja, blanca y azul.

6.– Halle la probabilidad de que tras lanzar un par de dados juntos, dos veces, se obtenga una suma de 7 puntos en:

a) exactamente uno de los dos lanzamientos.
b) al menos uno de los dos lanzamientos.
c) los dos lanzamientos.

7.– Se va a seleccionar un comité de 4 personas de entre un grupo de 7 hombres, 2 de los cuáles son hermanos. ¿Cuál es la probabilidad de que:

a) los dos hermanos estén en el comité?
b) por lo menos un hermano esté en el comité?

8.– Un concesionario de automóviles vende, en el mismo día, 5 vehículos idénticos. Supuesto que la probabilidad de que este tipo de vehículo esté en servicio 2 años después es 0.8, calcule la probabilidad de que dos años más tarde:
a) los 5 automóviles estén en servicio.
b) los 5 automóviles estén fuera de servicio.
c) 3 automóviles estén fuera de servicio.
d) 2 automóviles, a lo sumo, estén fuera de servicio.

9.– Sea un dado tal que P(cara i)=a si i=1, 3 y 5, mientras que P(i)=b si i=2, 4 y 6. Se considera el suceso A={salir un punto mayor o igual a 4} y se sabe que P(A) = 5/12. Calcule a y b.

10.– Sean A y B dos sucesos tales que $P(A)=1/2$, $P(A\cup B)=3/4$ y $P(B^c)=5/8$. Halle $P(A\cap B)$, $P(A^c\cap B^c)$, $P(A^c\cup B^c)$ y $P(A^c\cap B)$.

11.– Una central eléctrica A trabaja con cuatro turbinas iguales, y otra central B con tres, diferentes éstas últimas de las de A. Se sabe que la probabilidad de un fallo en una turbina de A en un día es de 0.01, y en B, 0.02. ¿Qué es más probable, que en B falle una sola turbina o que en A fallen exactamente 2?.

12.– Las piezas producidas por una máquina automática presentan dos tipos de defectos, llamados A y B. Un 6% de ellas tienen por lo menos el defecto A. Un 4% tiene, al menos, el B. Un 2% tiene los dos defectos A y B. Calcule:
a) % de piezas sin defecto.
b) % de piezas con un defecto al menos.
c) % de piezas con exactamente un defecto.
d) % con sólo el defecto A.
e) % con sólo el defecto B.

13.– Cierta marca automovilística da un año de garantía para sus coches. Los fallos se pueden englobar en tres causas A, B y C, que se suponen independientes entre sí. La probabilidad de fallo por la causa A dentro de la garantía es de 0.1, y para B y C, 0.2 y 0.3, respectivamente. Calcule la probabilidad de fallo del coche dentro del período de garantía.

14.– Tres vecinos utilizan la misma línea de autobuses para regresar a su casa a las 18:00 h. Debido a demoras imprevistas en cada una de sus oficinas, no siempre cogen el mismo autobús. Cada uno de ellos, independientemente de los demás, alcanza el de las 18:10 con probabilidad 1/4, el de las 18:15 con probabilidad ½ y el de las 18:20 con probabilidad 1/4. ¿Cuál es la probabilidad de que sí que coincidan en un día determinado?.

15.– Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas:
a) Si P(A/B) > P(A) entonces P(B/A) > P(B).
b) Si P(A) > P(B) entonces P(A/C) > P(B/C).
c) Si $P(B/A^c) = P(B/A)$ entonces A y B son independientes.
d) Si P(A) = P(B) = P(B/A) = 1/2 entonces A y B son independientes.

16.– Si los sucesos A y B verifican $P(A)=1/2$, $P(B)=1/3$ y $P(A\cap B)=1/4$, calcule $P(A/B)$, $P(B/A)$, $P(A\cup B)$, $P(A^c/B^c)$ y $P(B^c/A^c)$.

17.– Sean A y B dos sucesos tales que $P(A)=p>0$ y $P(B)=q>0$, demuestre que $P(B/A)\geq 1-(1-q)/p$.

18.– Sean A y B dos sucesos cualesquiera. ¿Son ciertas las siguientes afirmaciones?

a) $P(A/B) + P(A^c/B^c) = 1$.

b) $p(A/B) + P(A/B^c) = 1$.

c) $P(A/B) + P(A^c/B) = 1$.

Justifique las respuestas. ¿Cambiaría sus contestaciones anteriores si supiese que A y B son independientes?.

19.– Cuatro máquinas forman la cadena de montaje de una fábrica. Las dos primeras funcionan en serie y la probabilidad de que cada una de ellas se rompa es, independientemente de las otras tres, 1/2. Las otras dos funcionan en paralelo entre sí (hacen idéntica labor) y en serie con respecto a las otras. La probabilidad de que cada una de éstas falle es, independientemente de las otras, 2/3. Determine la probabilidad de que todo el sistema funcione.

20.-– Una empresa utiliza dos sistemas alternativos en la fabricación de un artículo. Por el sistema A fabrica el 20% de su producción. Cuando a un cliente se le ofrece una unidad de dicho artículo, la probabilidad de que lo compre es 2/3 si éste se fabricó por el método A y 2/5 si se fabricó por el B. Calcule la probabilidad de vender una unidad cualquiera elegida al azar entre la producción de la empresa.

21.– Una compañía financiera para la venta de automóviles a plazos opera en tres grandes regiones de un país: A, B y C. Sus operaciones se reparten del siguiente modo: 50% en A, 30% en B y 20% en C. La probabilidad de que un cliente no efectúe un pago vale 0.001 en la región A, 0.002 en B y 0.008 en C. Se eligió al azar una de las operaciones realizadas y se comprobó que no había sido pagada. ¿Cuál es la probabilidad de que dicha operación corresponda a la región C?.

22.– Cierta empresa de componentes electrónicos fabrica un elemento de gran precisión. Con la tecnología que actualmente usa, se sabe que sólo será válido uno de cada tres elementos fabricados. Para verificar su estado se les somete a un test que es pasado por un elemento correcto con probabilidad 0.99 y por uno en mal estado con probabilidad 0.06. Si un elemento pasa la prueba, ¿cuál es la probabilidad de que sea bueno?. Si queremos una seguridad de al menos el 99% de que un elemento dado como bueno realmente lo sea, ¿a cuántas pruebas debemos someterlo?.

23.– Cierta empresa produce un artículo en un proceso en el que el 30% de su producción resulta defectuosa. Antes de las ventas, los artículos son sometidos a un control de calidad que conduce a resultados erróneos en un 5% de los casos tanto entre la población de artículos defectuosos como entre la de los que son correctos. Se procede sólo a la venta de los artículos que pasan la prueba.

a) Obtenga la proporción de defectuosos entre los vendidos por la empresa.

b) Obtenga la proporción de artículos buenos entre los rechazados en el control.

24.– Se considera una urna que contiene n_1 bolas blancas y n_2 bolas rojas. Se saca una bola de la urna; si es blanca se reemplaza por k bolas rojas, y si es roja se devuelve a la urna. Se saca a continuación una segunda bola de la que simplemente se anota su color.

a) Calcular la probabilidad de que las bolas extraídas sean:

a_1) las dos blancas a_2) las dos rojas a_3) de colores diferentes.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola extraída sea blanca, si la segunda ha sido blanca?. ¿Y si la segunda ha sido roja?.

25.– La decisión de cuantos deben ser los dados a lanzar se toma aleatoriamente. La probabilidad de que sean n los dados usados es $1/2^n$ para cada n entero positivo. Si se sabe que después de lanzar estos n dados se ha obtenido un total de 4 puntos entre ellos, ¿cuál es la probabilidad de haber jugado con 4 dados?.

26.– Se dispone de dos dados A y B. El dado A tiene 4 caras rojas y 2 blancas. El dado B tiene 2 caras rojas y 4 blancas. Se lanza una moneda, si se obtiene cruz se decide jugar siempre con B, y si sale cara, con A. Se pide:

a) La probabilidad de obtener cara roja.

b) La probabilidad de obtener cara roja en la tercera tirada sabiendo que ya se ha obtenido este color en las dos primeras tiradas.

c) La probabilidad de haber utilizado el dado A sabiendo que se ha obtenido cara roja en las n primeras tiradas.

Índice

1. Ejercicio 1

Sean A, B, C tres sucesos cualesquiera. Determine expresiones para los siguientes sucesos:

(a) Ocurre sólo A.

(b) Ocurren A y B pero no C.

(c) Ocurren los tres sucesos.

(d) Ocurre al menos uno.

(e) Ocurren al menos dos.

(f) Ocurre uno y sólo uno.

(g) Ocurren dos y sólo dos.

(h) No ocurre ninguno.

(i) No ocurren más de dos.

Solución

Usaremos A^c, B^c, C^c para los complementarios, $\cap$ para intersección y $\cup$ para unión.

(a) $A \cap B^c \cap C^c$.

(b) $A \cap B \cap C^c$.

(c) $A \cap B \cap C$.

(d) $A \cup B \cup C$.

(e) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

(f) $(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$.

(g) $(A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap C \cap B^c) \cup (B \cap C \cap A^c)$.

(h) $A^c \cap B^c \cap C^c = (A \cup B \cup C)^c$.

(i) "A lo sumo dos" $= (A \cap B \cap C)^c =$ (h) $\cup$ (f) $\cup$ (g).

2. Ejercicio 2

Se extrae una carta al azar de una baraja de 52 cartas. Sea A el suceso $\{$se extrae un rey$\}$ y B el suceso $\{$se extrae una copa$\}$. Describa los sucesos

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad A \cup B^c, \quad A^c \cup B^c, \quad A - B, \quad A^c - B^c, \quad (A \cap B) \cup (A \cap B^c).$$

Solución

Datos básicos: $|A| = 4$ (reyes), $|B| = 13$ (copas), $|A \cap B| = 1$ (rey de copas).

1. $A \cup B$: "sale un rey *o* una copa (o ambos)".
   $|A \cup B| = 4 + 13 - 1 = 16, \quad \mathbb{P}(A \cup B) = \dfrac{16}{52} = \dfrac{4}{13}.$

2. $A \cap B$: "sale el rey de copas".
   $|A \cap B| = 1, \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \dfrac{1}{52}.$

3. $A \cup B^c$: "sale un rey *o* una carta que no es de copas". (Equivalente: todas las no–copas más el rey de copas).
   $|A \cup B^c| = 39 + 1 = 40, \quad \mathbb{P}(A \cup B^c) = \dfrac{40}{52} = \dfrac{10}{13}.$

4. $A^c \cup B^c$: "no es rey *o* no es de copas" (al menos una de las dos condiciones falla). Es el complemento de $A \cap B$.
   $|A^c \cup B^c| = 52 - 1 = 51, \quad \mathbb{P}(A^c \cup B^c) = \dfrac{51}{52}.$

5. $A - B = A \cap B^c$: "sale un rey que *no* es de copas" (reyes de picas, tréboles o diamantes).
   $|A - B| = 3, \quad \mathbb{P}(A - B) = \dfrac{3}{52}.$

6. $A^c - B^c = A^c \cap (B^c)^c = A^c \cap B$: "sale una copa que *no* es rey" (copas salvo el rey).
   $|A^c - B^c| = 13 - 1 = 12, \quad \mathbb{P}(A^c - B^c) = \dfrac{12}{52} = \dfrac{3}{13}.$

7. $(A \cap B) \cup (A \cap B^c) = A \cap (B \cup B^c) = A$: "sale un rey (de cualquier palo)".
   $|\,(A \cap B) \cup (A \cap B^c)\,| = 4, \quad \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap B^c)) = \dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13}.$

3. Ejercicio 3

Se lanzaron dos dados. Sea A el suceso {la suma de los puntos es impar} y B el suceso {se ha obtenido al menos un 3}. Describa los sucesos

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad A \cup (A \cap B^c).$$

Solución

El espacio muestral es $S = \{(i, j) : i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$, de tamaño 36.

- Suceso A: la suma es impar.
  Esto ocurre cuando un dado es par y el otro impar.
  Número de casos: $3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 18$. Por tanto $\mathbb{P}(A) = \dfrac{18}{36} = \dfrac{1}{2}$.
- Suceso B: al menos un 3.
  Casos: $(3, j)$ con $j = 1, \ldots, 6$ y $(i, 3)$ con $i = 1, \ldots, 6$, menos el doble contado $(3, 3)$.
  Número de casos: $6 + 6 - 1 = 11$. Por tanto $\mathbb{P}(B) = \dfrac{11}{36}$.

1) $A \cup B :$ ocurre que la suma es impar o que sale al menos un 3.
$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

2) $A \cap B :$ suma impar y al menos un 3.
Se cuenta dentro de los 11 de B cuántos tienen suma impar.
$(3, j) : j = 2, 4, 6 \;\Rightarrow\; 3$ casos.
$(i, 3) : i = 2, 4, 6 \;\Rightarrow\; 3$ casos.
En total: 6.

$$\Rightarrow |A \cap B| = 6, \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

3) $A \cup (A \cap B^c) = A \quad$ (porque $A \cap B^c \subseteq A$).

$$\Rightarrow A \cup (A \cap B^c) = A.$$

Resumen

- $A \cup B$: suma impar o al menos un 3. $\quad |A \cup B| = 18 + 11 - 6 = 23$, $\mathbb{P}(A \cup B) = \dfrac{23}{36}$.
- $A \cap B$: suma impar y al menos un 3. $\quad |A \cap B| = 6$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \dfrac{1}{6}$.
- $A \cup (A \cap B^c) = A$. $\quad \mathbb{P}(A) = \dfrac{18}{36} = \dfrac{1}{2}$.

4. Ejercicio 4

¿Cuántos números de cuatro cifras pueden formarse con los 10 dígitos $0, 1, 2, \ldots, 9$, si: (a) los dígitos pueden repetirse; (b) los dígitos no pueden repetirse; (c) el último dígito ha de ser cero y los dígitos no pueden repetirse?

Resuelva las cuestiones tanto admitiendo que los números que empiezan por cero son realmente números de cuatro cifras (por ejemplo: 0783), como suponiendo que no es así (0783 sería 783 y solo tiene tres cifras).

Solución

Interpretación I: se permiten números con cero inicial (cadenas de 4 dígitos).

(a) $VR_{10}^{4} = 10^4 = 10000.$

(b) $V10, 4 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040.$

(c) $\text{Fijado el último como 0, los otros 3 distintos de entre } \{1, \ldots, 9\}: \ V9, 3 = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504.$

Interpretación II: *no* se permiten ceros iniciales (números de 4 cifras "reales").

(a) $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000.$

(b) $\text{Primera cifra (1–9): 9; resto sin repetir de los 9 restantes: } 9, 8, 7.$
$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536.$

(c) $\text{Último fijo 0 y sin repetición: los otros 3 de } \{1, \ldots, 9\}: \ 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504.$

Observación. En (c) el resultado coincide en ambas interpretaciones porque el 0 está forzado al final y no puede repetirse.

5. Ejercicio 5

Una caja contiene 8 bolas rojas, 3 blancas y 9 azules (en total 20). Si se extraen 3 bolas aleatoriamente **sin reemplazamiento**, determine la probabilidad de que:

(a) las 3 bolas sean rojas.

(b) las 3 bolas sean blancas.

(c) 2 bolas sean rojas y 1 blanca.

(d) al menos 1 bola sea blanca.

(e) se extraiga una de cada color.

(f) las bolas sean extraídas en el orden *roja, blanca, azul.*

Solución

Modelo hipergeométrico: el número total de formas de elegir 3 bolas es

$$\binom{20}{3} = 1140.$$

(a) $\mathbb{P}(3 \text{ rojas}) = \dfrac{\binom{8}{3}}{\binom{20}{3}} = \dfrac{56}{1140} = \dfrac{14}{285} \approx 0{,}04912.$

(b) $\mathbb{P}(3 \text{ blancas}) = \dfrac{\binom{3}{3}}{\binom{20}{3}} = \dfrac{1}{1140} \approx 0{,}000877.$

(c) $\mathbb{P}(2 \text{ rojas y } 1 \text{ blanca}) = \dfrac{\binom{8}{2}\binom{3}{1}}{\binom{20}{3}} = \dfrac{28 \cdot 3}{1140} = \dfrac{7}{95} \approx 0{,}07368.$

(d) $\mathbb{P}(\text{al menos } 1 \text{ blanca}) = 1 - \mathbb{P}(\text{ninguna blanca}) = 1 - \dfrac{\binom{8+9}{3}}{\binom{20}{3}} = 1 - \dfrac{\binom{17}{3}}{1140} = 1 - \dfrac{680}{1140} =$

$\approx 0{,}40351.$

(e) $\mathbb{P}(\text{una de cada color}) = \dfrac{\binom{8}{1}\binom{3}{1}\binom{9}{1}}{\binom{20}{3}} = \dfrac{8 \cdot 3 \cdot 9}{1140} = \dfrac{216}{1140} = \dfrac{18}{95} \approx 0{,}18947.$

(f) $\mathbb{P}(\text{orden R-B-A}) = \dfrac{8}{20} \cdot \dfrac{3}{19} \cdot \dfrac{9}{18} = \dfrac{216}{6840} = \dfrac{3}{95} \approx 0{,}03158.$

6. Ejercicio 6

Halle la probabilidad de que, tras lanzar un par de dados juntos dos veces, se obtenga una suma de 7 puntos en:

(a) exactamente uno de los dos lanzamientos.

(b) al menos uno de los dos lanzamientos.

(c) los dos lanzamientos.

Solución

En un lanzamiento de dos dados, la suma 7 tiene 6 casos favorables: $(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)$. Por tanto,

$$p = \mathbb{P}(\text{suma } 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, \qquad q = 1 - p = \frac{5}{6}.$$

Los dos lanzamientos son independientes.

$$\text{(a)} \quad \mathbb{P}(\text{exactamente uno}) = 2\,pq = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18} \approx 0{,}2778.$$

$$\text{(b)} \quad \mathbb{P}(\text{al menos uno}) = 1 - q^2 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36} \approx 0{,}3056.$$

$$\text{(c)} \quad \mathbb{P}(\text{los dos}) = p^2 = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36} \approx 0{,}0278.$$

7. Ejercicio 7

Se va a seleccionar un comité de 4 personas de entre un grupo de 7 hombres, 2 de los cuales son hermanos. ¿Cuál es la probabilidad de que:

a) los dos hermanos estén en el comité?

b) por lo menos un hermano esté en el comité?

Solución

El número total de comités posibles (tamaño del espacio muestral) es

$$\binom{7}{4} = 35.$$

a) Ambos hermanos en el comité

Si los dos hermanos forman parte del comité, faltan 2 plazas, que deben cubrirse con los 5 no hermanos. El número de formas de hacerlo es

$$\binom{5}{2} = 10.$$

Por tanto, la probabilidad pedida es

$$P(\text{ambos hermanos}) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{7}{4}} = \frac{10}{35} =$$

$=2_{\overline{7\approx 0{,}2857.}}$

b) Al menos un hermano en el comité

Usamos el complemento: “ningún hermano en el comité”. Si no entra ninguno de los dos hermanos, hay que elegir 4 personas de los 5 no hermanos:

$$\binom{5}{4} = 5 \quad \Rightarrow \quad P(\text{ningún hermano}) = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}.$$

Así,

$$P(\text{al menos un hermano}) = 1 - P(\text{ningún hermano}) = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7} \approx 0{,}8571.$$

Respuesta final: a) $\frac{2}{7}$; b) $\frac{6}{7}$.

8. Ejercicio 8

Un concesionario de automóviles vende, en el mismo día, 5 vehículos idénticos. Supuesto que la probabilidad de que este tipo de vehículo esté en servicio 2 años después es 0,8, calcule la probabilidad de que dos años más tarde:

1. los 5 automóviles estén en servicio.
2. los 5 automóviles estén fuera de servicio.
3. 3 automóviles estén fuera de servicio.
4. 2 automóviles, a lo sumo, estén fuera de servicio.

Solución

Sea X el número de automóviles fuera de servicio a los dos años. Entonces $X \sim \text{Binomial}(n = 5, q = 0{,}2)$, donde $q = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

a) **Los 5 automóviles en servicio:** equivale a $X = 0$.

$$P(X = 0) = (0{,}8)^5 = 0{,}32768.$$

b) **Los 5 automóviles fuera de servicio:**

$$P(X = 5) = (0{,}2)^5 = 0{,}00032.$$

c) **3 automóviles fuera de servicio:**

$$P(X = 3) = \binom{5}{3}(0{,}2)^3(0{,}8)^2 = 10 \cdot 0{,}008 \cdot 0{,}64 = 0{,}0512.$$

d) **A lo sumo 2 automóviles fuera de servicio:**

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2).$$

$$P(X = 1) = \binom{5}{1}(0{,}2)(0{,}8)^4 = 5 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}4096 = 0{,}4096,$$

$$P(X = 2) = \binom{5}{2}(0{,}2)^2(0{,}8)^3 = 10 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}512 = 0{,}2048.$$

$$P(X \leq 2) = 0{,}32768 + 0{,}4096 + 0{,}2048 = 0{,}94208.$$

Respuesta final: a) 0,32768; b) 0,00032; c) 0,0512; d) 0,94208.

9. Ejercicio 9

Sea un dado tal que $P(\text{cara } i) = a$ si $i = 1, 3, 5$, mientras que $P(\text{cara } i) = b$ si $i = 2, 4, 6$. Se considera el suceso $A = \{\text{salir un punto mayor o igual a } 4\}$ y se sabe que $P(A) = \frac{5}{12}$. Calcule a y b.

Solución

Las probabilidades cumplen:

$$P(1) = P(3) = P(5) = a, \quad P(2) = P(4) = P(6) = b.$$

Condición de normalización

La suma de probabilidades debe ser 1:

$$3a + 3b = 1 \quad \Rightarrow \quad a + b = \frac{1}{3}.$$

Probabilidad del suceso A

El suceso $A = \{4, 5, 6\}$ tiene probabilidad:

$$P(A) = P(4) + P(5) + P(6) = b + a + b = a + 2b.$$

Se sabe que

$$a + 2b = \frac{5}{12}.$$

Resolviendo el sistema

De $a + b = \frac{1}{3}$ se obtiene $a = \frac{1}{3} - b$. Sustituyendo:

$$\left(\frac{1}{3} - b\right) + 2b = \frac{5}{12},$$

$$\frac{1}{3} + b = \frac{5}{12},$$

$$b = \frac{5}{12} - \frac{4}{12} = \frac{1}{12}.$$

Entonces:

$$a = \frac{1}{3} - 112 = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

Respuesta final:

$$a = \frac{1}{4}, \quad b = \frac{1}{12}.$$

10. Ejercicio 10

Sean A y B dos sucesos tales que $P(A) = \dfrac{1}{2}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$ y $P(B^c) = \frac{5}{8}$. Halle $P(A \cap B)$, $P(A^c \cap B^c)$, $P(A^c \cup B^c)$ y $P(A^c \cap B)$.

Solución

De $P(B^c) = \frac{5}{8}$ se sigue $P(B) = 1 - \dfrac{5}{8} = \dfrac{3}{8}$.

1) $P(A \cap B)$ Usando $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$:

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} - P(A \cap B) = \frac{7}{8} - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{8}.$$

2) $P(A^c \cap B^c)$ Por De Morgan, $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$:

$$P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

3) $P(A^c \cup B^c)$ Por De Morgan, $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$:

$$P(A^c \cup B^c) = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

4) $P(A^c \cap B)$ Particionando B: $B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$ (disjuntos):

$$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{4}.$$

Respuesta final: $P(A \cap B) = \dfrac{1}{8}$, $P(A^c \cap B^c) = \dfrac{1}{4}$, $P(A^c \cup B^c) = \dfrac{7}{8}$, $P(A^c \cap B) = \dfrac{1}{4}$.

11. Ejercicio 11

Una central eléctrica A trabaja con cuatro turbinas iguales, y otra central B con tres, diferentes éstas últimas de las de A. Se sabe que la probabilidad de un fallo en una turbina de A en un día es de 0,01, y en B, 0,02. ¿Qué es más probable, que en B falle una sola turbina o que en A fallen exactamente 2?

Solución

Supondremos independencia entre turbinas.

Central B. Sea $X_B \sim \mathrm{Bin}(3, 0{,}02)$. Entonces

$$P(X_B = 1) = \binom{3}{1}(0{,}02)(0{,}98)^2 = 3 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}9604 = 0{,}057624.$$

Central A. Sea $X_A \sim \mathrm{Bin}(4, 0{,}01)$. Entonces

$$P(X_A = 2) = \binom{4}{2}(0{,}01)^2(0{,}99)^2 = 6 \cdot 0{,}0001 \cdot 0{,}9801 = 0{,}00058806.$$

Conclusión. Como $0{,}057624 \gg 0{,}00058806$, es **mucho más probable** que en la central B falle **exactamente una** turbina que que en la central A fallen **exactamente dos**.

12. Ejercicio 12

Las piezas producidas por una máquina automática presentan dos tipos de defectos, llamados A y B. Un 6 % de ellas tienen por lo menos el defecto A. Un 4 % tiene, al menos, el B. Un 2 % tiene los dos defectos A y B. Calcule:

a) % de piezas sin defecto.

b) % de piezas con un defecto al menos.

c) % de piezas con exactamente un defecto.

d) % con sólo el defecto A.

e) % con sólo el defecto B.

Solución

Sean $A =$ "presenta defecto A" y $B =$ "presenta defecto B". Datos: $P(A) = 0{,}06$, $P(B) = 0{,}04$, $P(A \cap B) = 0{,}02$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}06 + 0{,}04 - 0{,}02 = 0{,}08.$$

a) Sin defecto

$$P(\text{sin defecto}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}08 = 0{,}92 = 92\,\%.$$

b) Con al menos un defecto

$$P(A \cup B) = 0{,}08 = 8\,\%.$$

c) Exactamente un defecto

$$P((A - B) \cup (B - A)) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = 0{,}06 = 6\,\%.$$

d) Sólo defecto A

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}06 - 0{,}02 = 0{,}04 = 4\,\%.$$

e) Sólo defecto B

$$P(B \cap A^c) = P(B) - P(A \cap B) = 0{,}04 - 0{,}02 = 0{,}02 = 2\,\%.$$

Respuesta final: a) 92 %; b) 8 %; c) 6 %; d) 4 %; e) 2 %.

13. Ejercicio 13

Cierta marca automovilística da un año de garantía para sus coches. Los fallos se pueden englobar en tres causas A, B y C, que se suponen independientes entre sí. La probabilidad de fallo por la causa A dentro de la garantía es de 0,1, y para B y C, 0,2 y 0,3, respectivamente. Calcule la probabilidad de fallo del coche dentro del período de garantía.

Solución

Sea A, B, C el suceso "falla por la causa indicada". El coche falla si ocurre al menos una causa:

$$P(A \cup B \cup C) = 1 - P(A^c \cap B^c \cap C^c).$$

Por independencia,

$$P(A^c \cap B^c \cap C^c) = P(A^c)P(B^c)P(C^c) = (1-0{,}1)(1-0{,}2)(1-0{,}3) = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}504.$$

Por tanto,

$$P(\text{falla en garantía}) = 1 - 0{,}504 = 0{,}496.$$

Respuesta: La probabilidad de que el coche falle dentro del año de garantía es 0,496 (49,6 %).

14. Ejercicio 14

Tres vecinos utilizan la misma línea de autobuses para regresar a su casa a las 18:00 h. Debido a demoras imprevistas, no siempre cogen el mismo autobús. Cada uno de ellos, independientemente de los demás, alcanza el de las 18:10 con probabilidad 1/4, el de las 18:15 con probabilidad 1/2 y el de las 18:20 con probabilidad 1/4. ¿Cuál es la probabilidad de que coincidan en un día determinado?

Solución

Sea $p_{10} = 1/4$, $p_{15} = 1/2$, $p_{20} = 1/4$ la distribución de cada vecino (independientes). El suceso "coinciden" es que los tres eligen el mismo horario. Por tanto,

$$P(\text{coinciden}) = \sum_h p_h^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64} + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} = \frac{10}{64} = \frac{5}{32} \approx 0{,}15625.$$

Respuesta: $\boxed{5/32}$.

15. Ejercicio 15

Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas:

a) Si $P(A \mid B) > P(A)$ entonces $P(B \mid A) > P(B)$.

b) Si $P(A) > P(B)$ entonces $P(A \mid C) > P(B \mid C)$.

c) Si $P(B \mid A^c) = P(B \mid A)$ entonces A y B son independientes.

d) Si $P(A) = P(B) = P(B \mid A) = 1/2$ entonces A y B son independientes.

Solución razonada

a) Verdadera. De $P(A \mid B) > P(A)$ se deduce $P(A \cap B) > P(A)P(B)$ y, dividiendo por $P(A) > 0$, $P(B \mid A) > P(B)$.

b) Falsa. Puede invertirse al condicionar (paradoja de Simpson). Contraejemplo con $P(C) = 1/2$:

	$A \cap B$	$A \setminus B$	$B \setminus A$	$(A \cup B)^c$
C	0,05	0,05	0,10	0,30
C^c	0,35	0,15	0	0

Se tiene $P(A) = 0{,}60 > 0{,}50 = P(B)$, pero $P(A \mid C) = 0{,}10/0{,}50 = 0{,}20 < 0{,}30 = 0{,}15/0{,}50 = P(B \mid C)$.

c) Verdadera. Si $P(B \mid A) = P(B \mid A^c) = t$, entonces

$$P(B) = tP(A) + tP(A^c) = t \quad \Rightarrow \quad P(B \mid A) = P(B),$$

luego A y B son independientes.

d) Verdadera.

$$P(A \cap B) = P(B \mid A)P(A) = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4} = P(A)P(B),$$

lo que implica independencia.

Resumen: a) **V**, b) **F**, c) **V**, d) **V**.

16. Ejercicio 16

Si los sucesos A y B verifican $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ y $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, calcule $P(A/B)$, $P(B/A)$, $P(A \cup B)$, $P(A^c/B^c)$ y $P(B^c/A^c)$.

Solución

Datos: $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$.

1) $P(A \mid B)$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}.$$

2) $P(B \mid A)$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

3) $P(A \cup B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}.$$

4) $P(A^c \mid B^c)$

$$P(B^c) = 1 - P(B) = \frac{2}{3}, \qquad P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12},$$

$$P(A^c \mid B^c) = \frac{P(A^c \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{\frac{5}{12}}{\frac{2}{3}} = \frac{5}{8}.$$

5) $P(B^c \mid A^c)$

$$P(A^c) = 1 - P(A) = \frac{1}{2}, \qquad P(B^c \mid A^c) = \frac{P(A^c \cap B^c)}{P(A^c)} = \frac{\frac{5}{12}}{\frac{1}{2}} = \frac{5}{6}.$$

Respuesta final: $P(A/B) = \frac{3}{4}$, $P(B/A) = \frac{1}{2}$, $P(A \cup B) = \frac{7}{12}$, $P(A^c/B^c) = \frac{5}{8}$, $P(B^c/A^c) = \frac{5}{6}$.

17. Ejercicio 17

Sean A y B dos sucesos tales que $P(A) = p > 0$ y $P(B) = q > 0$. Demuestre que

$$P(B \mid A) \geq 1 - \frac{1-q}{p}.$$

Demostración

Usando B^c:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap B^c)}{P(A)}.$$

Como $A \cap B^c \subseteq B^c$, se tiene $P(A \cap B^c) \leq P(B^c) = 1 - q$. Por tanto,

$$P(B \mid A) \geq \frac{p - (1-q)}{p} = 1 - \frac{1-q}{p}.$$

La cota es alcanzable cuando $B^c \subseteq A$ (por ejemplo, si $A = \Omega$).

18. Ejercicio 18

Sean A y B dos sucesos cualesquiera. ¿Son ciertas las siguientes afirmaciones?

a) $P(A \mid B) + P(A^c \mid B^c) = 1$.

b) $P(A \mid B) + P(A \mid B^c) = 1$.

c) $P(A \mid B) + P(A^c \mid B) = 1$.

Justifique las respuestas. ¿Cambiarían si A y B fuesen independientes?

Solución

Suponemos $0 < P(B), P(B^c) < 1$.

a) Falsa en general.

$$P(A \mid B) + P(A^c \mid B^c) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A^c \cap B^c)}{P(B^c)} \not\equiv 1.$$

Contraejemplo: $P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}4$, $P(A \cap B) = 0 \Rightarrow P(A \mid B) = 0$ y $P(A^c \mid B^c) = \dfrac{0{,}2}{0{,}6} = \dfrac{1}{3}$. Suma $= 1/3$. Si A y B son independientes (y $P(B), P(B^c) > 0$), entonces

$$P(A \mid B) + P(A^c \mid B^c) = P(A) + P(A^c) = 1.$$

b) Falsa. Por probabilidad total $P(A) = P(A \mid B)P(B) + P(A \mid B^c)P(B^c)$, pero eso no implica que $P(A \mid B) + P(A \mid B^c) = 1$. Ejemplo con independencia: si $P(A) = 0{,}3$, entonces $P(A \mid B) = P(A \mid B^c) = 0{,}3$, y la suma vale $0{,}6 \neq 1$. (Se cumple sólo en el caso particular $P(A) = 1/2$.)

c) Verdadera. Como A y A^c particionan B,

$$P(A \mid B) + P(A^c \mid B) = \frac{P(A \cap B) + P(A^c \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1.$$

No requiere independencia.

Conclusión: a) **Falsa** (pasa a **verdadera** si A y B son independientes con $P(B), P(B^c) > 0$); b) **Falsa** (aun con independencia, salvo $P(A) = 1/2$); c) **Verdadera**.

19. Ejercicio 19

Cuatro máquinas forman la cadena de montaje de una fábrica. Las dos primeras funcionan en serie y la probabilidad de que cada una de ellas se rompa es, independientemente de las otras tres, 1/2. Las otras dos funcionan en paralelo entre sí (hacen idéntica labor) y en serie con respecto a las otras. La probabilidad de que cada una de éstas falle es, independientemente de las otras, 2/3. Determine la probabilidad de que todo el sistema funcione.

Solución

Sean M_1, M_2 las dos primeras (serie) y M_3, M_4 las dos últimas (paralelo). Por tanto

$$P(M_1 \text{ funciona}) = P(M_2 \text{ funciona}) = \frac{1}{2}, \qquad P(M_3 \text{ funciona}) = P(M_4 \text{ funciona}) = \frac{1}{3}.$$

Bloque en serie M_1–M_2.

$$P(\text{serie funciona}) = P(M_1 \cap M_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Bloque en paralelo $M_3 \parallel M_4$. Funciona si al menos una funciona:

$$P(\text{paralelo funciona}) = 1 - P(\text{fallan ambas}) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

Sistema completo. Los bloques están en serie e independientes, luego

$$P(\text{sistema funciona}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{9} = \boxed{\frac{5}{36} \approx 0{,}1389}.$$

20. Ejercicio 20

Una empresa utiliza dos sistemas alternativos en la fabricación de un artículo. Por el sistema A fabrica el 20 % de su producción. Cuando a un cliente se le ofrece una unidad de dicho artículo, la probabilidad de que lo compre es $2/3$ si éste se fabricó por el método A y $2/5$ si se fabricó por el B. Calcule la probabilidad de vender una unidad cualquiera elegida al azar entre la producción de la empresa.

Solución

Sea A el suceso fabricado por el sistema A, $P(A) = 0{,}2 = 1/5$, B el suceso fabricado por B, $P(B) = 0{,}8 = 4/5$, y S el suceso “se vende”. Se dan

$$P(S \mid A) = \frac{2}{3}, \qquad P(S \mid B) = \frac{2}{5}.$$

Por la ley de la probabilidad total,

$$P(S) = P(S \mid A)P(A) + P(S \mid B)P(B) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5} + \frac{2}{5}\cdot\frac{4}{5} = \frac{2}{15} + \frac{8}{25} = \frac{34}{75} \approx 0{,}4533.$$

Respuesta: La probabilidad de vender una unidad tomada al azar es $\boxed{34/75 \approx 45{,}33\,\%}$.

21. Ejercicio 21

Una compañía financiera para la venta de automóviles a plazos opera en tres grandes regiones de un país: A, B y C. Sus operaciones se reparten así: 50 % en A, 30 % en B y 20 % en C. La probabilidad de que un cliente no efectúe un pago vale 0.001 en la región A, 0.002 en B y 0.008 en C. Se eligió al azar una de las operaciones y se comprobó que no había sido pagada. ¿Cuál es la probabilidad de que dicha operación corresponda a la región C?

Solución

Sea N el suceso "operación no pagada" y A, B, C la región. Por la ley de la probabilidad total,

$$P(N) = P(N \mid A)P(A) + P(N \mid B)P(B) + P(N \mid C)P(C) = 0{,}5 \cdot 0{,}001 + 0{,}3 \cdot 0{,}002 + 0{,}2 \cdot 0{,}008 =$$

$$= 0.0027.$$

Aplicando Bayes,

$$P(C \mid N) = \frac{P(N \mid C)P(C)}{P(N)} = \frac{0{,}008 \cdot 0{,}2}{0{,}0027} = \frac{0{,}0016}{0{,}0027} = \frac{16}{27} \approx 0{,}5926.$$

Respuesta: $P(C \mid N) = \boxed{16/27 \approx 59{,}26\,\%}$.

22. Ejercicio 22

Cierta empresa de componentes electrónicos fabrica un elemento de gran precisión. Con la tecnología actual solo uno de cada tres elementos es válido. Para verificar su estado se aplica un test que es pasado por un elemento correcto con probabilidad 0,99 y por uno en mal estado con probabilidad 0,06.

1. Si un elemento pasa la prueba, ¿cuál es la probabilidad de que sea bueno?

2. Si queremos una seguridad de al menos el 99 % de que un elemento dado como bueno realmente lo sea, ¿a cuántas pruebas debemos someterlo?

Solución

Sea G = "elemento bueno", M = "elemento malo", P = "pasa la prueba". Se conocen $P(G) = 1/3$, $P(M) = 2/3$, $P(P \mid G) = 0{,}99$, $P(P \mid M) = 0{,}06$.

1) Un test positivo. Por Bayes,

$$P(G \mid P) = \frac{P(P \mid G)P(G)}{P(P \mid G)P(G) + P(P \mid M)P(M)} = \frac{0{,}99 \cdot \frac{1}{3}}{0{,}99 \cdot \frac{1}{3} + 0{,}06 \cdot \frac{2}{3}} = \frac{33}{37} \approx 0{,}8919.$$

2) Repetición de pruebas. Si el elemento pasa n pruebas independientes,

$$P(G \mid P^{(n)}) = \frac{0{,}99^n \cdot \frac{1}{3}}{0{,}99^n \cdot \frac{1}{3} + 0{,}06^n \cdot \frac{2}{3}} = \frac{1}{1 + 2\left(\frac{2}{33}\right)^n}.$$

Exigimos $P(G \mid P^{(n)}) \geq 0{,}99$, lo que equivale a $\left(\frac{2}{33}\right)^n \leq \frac{1}{198}$. El menor n que verifica esto es $n = 2$, pues

$$P(G \mid P^{(2)}) = \frac{1089}{1097} \approx 0{,}9927 \geq 0{,}99.$$

Con una sola prueba se obtiene $P(G \mid P) \approx 0{,}8919 < 0{,}99$.

Respuesta: (1) $P(G \mid P) = 33/37 \approx 0{,}8919$. (2) Con **dos** pruebas (y aceptación solo si pasa ambas) se alcanza $\geq 99\,\%$.

23. Ejercicio 23

Cierta empresa produce un artículo en un proceso en el que el 30 % de su producción resulta defectuosa. Antes de las ventas, los artículos son sometidos a un control de calidad que conduce a resultados erróneos en un 5 % de los casos tanto entre la población de artículos defectuosos como entre la de los que son correctos. Se procede sólo a la venta de los artículos que pasan la prueba.

a) Obtenga la proporción de defectuosos entre los vendidos por la empresa.

b) Obtenga la proporción de artículos buenos entre los rechazados en el control.

Solución

Sea D el suceso defectuoso, $G = D^c$ bueno, P pasa la prueba y F no pasa. Datos: $P(D) = 0{,}30$, $P(G) = 0{,}70$, $P(P \mid G) = 0{,}95$, $P(F \mid G) = 0{,}05$, $P(P \mid D) = 0{,}05$, $P(F \mid D) = 0{,}95$.

a) Defectuosos entre los vendidos.

$$P(P) = P(P \mid G)P(G) + P(P \mid D)P(D) = 0{,}95 \cdot 0{,}70 + 0{,}05 \cdot 0{,}30 = 0{,}68.$$

$$P(D \mid P) = \frac{P(P \mid D)P(D)}{P(P)} = \frac{0{,}05 \cdot 0{,}30}{0{,}68} = \frac{3}{136} \approx 0{,}02206 \ (2{,}206\,\%).$$

b) Buenos entre los rechazados.

$$P(F) = P(F \mid G)P(G) + P(F \mid D)P(D) = 0{,}05 \cdot 0{,}70 + 0{,}95 \cdot 0{,}30 = 0{,}32.$$

$$P(G \mid F) = \frac{P(F \mid G)P(G)}{P(F)} = \frac{0{,}05 \cdot 0{,}70}{0{,}32} = \frac{7}{64} \approx 0{,}109375 \ (10{,}94\,\%).$$

Respuestas: a) $P(D \mid P) = 3/136 \approx 2{,}206\,\%$; b) $P(G \mid F) = 7/64 \approx 10{,}94\,\%$.

24. Ejercicio 24

Se considera una urna que contiene n_1 bolas blancas y n_2 bolas rojas. Se saca una bola; si es blanca se reemplaza por k bolas rojas, y si es roja se devuelve a la urna. Se saca a continuación una segunda bola y se anota su color.

a) Calcular la probabilidad de que las bolas extraídas sean:

- a_1) las dos blancas,
- a_2) las dos rojas,
- a_3) de colores diferentes.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola haya sido blanca si la segunda ha sido blanca? ¿Y si la segunda ha sido roja?

Solución

Denote $N = n_1 + n_2$. Tras extraer una blanca la urna queda con $n_1 - 1$ blancas y $n_2 + k$ rojas (total $N + k - 1$); tras extraer una roja se devuelve y la urna no cambia.

a) Pares de colores.

$$P(W_1 \cap W_2) = \frac{n_1}{N} \cdot \frac{n_1 - 1}{N + k - 1}, \quad P(R_1 \cap R_2) = \frac{n_2^2}{N^2},$$

$$P(\text{distintos}) = \frac{n_1}{N} \cdot \frac{n_2 + k}{N + k - 1} + \frac{n_2}{N} \cdot \frac{n_1}{N}.$$

b) Inversas.

$$P(W_1 \mid W_2) = \frac{\dfrac{n_1}{N} \cdot \dfrac{n_1 - 1}{N + k - 1}}{\dfrac{n_1}{N} \cdot \dfrac{n_1 - 1}{N + k - 1} + \dfrac{n_1 n_2}{N^2}} = \frac{N\,(n_1 - 1)}{N(N-1) + n_2(k-1)}.$$

$$P(W_1 \mid R_2) = \frac{\dfrac{n_1}{N} \cdot \dfrac{n_2 + k}{N + k - 1}}{\dfrac{n_1}{N} \cdot \dfrac{n_2 + k}{N + k - 1} + \dfrac{n_2^2}{N^2}} = \frac{N\,n_1\,(n_2 + k)}{N\,n_1\,(n_2 + k) + n_2^2\,(N + k - 1)}.$$

Comprobación: $P(W_1 W_2) + P(R_1 R_2) + P(W_1 R_2) + P(R_1 W_2) = 1.$

25. Ejercicio 25

La decisión de cuántos deben ser los dados a lanzar se toma aleatoriamente. La probabilidad de que sean n los dados usados es $1/2^n$ para cada entero positivo n. Si se sabe que después de lanzar estos n dados se ha obtenido un total de 4 puntos entre ellos, ¿cuál es la probabilidad de haber jugado con 4 dados?

Solución

Sea N el número de dados y S el suceso "la suma vale 4". Por Bayes,

$$P(N=4 \mid S) = \frac{P(S \mid N=4)P(N=4)}{\sum_{n\geq 1} P(S \mid N=n)P(N=n)}.$$

Como $S=4$ sólo es posible si $n=1,2,3,4$,

$$P(S \mid N=1) = \frac{1}{6}, \quad P(S \mid N=2) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}, \quad P(S \mid N=3) = \frac{3}{6^3} = \frac{1}{72}$$

P(S| $N=4) = \dfrac{1}{6^4} = \dfrac{1}{1296}$.Con $P(N=n) = 2^{-n}$:

$$\sum_{n=1}^{4} P(S \mid N=n)P(N=n) = \frac{1}{12} + \frac{1}{48} + \frac{1}{576} + \frac{1}{20736} = \frac{2197}{20736}.$$

Luego

$$P(N=4 \mid S) = \frac{\frac{1}{1296} \cdot \frac{1}{16}}{\frac{2197}{20736}} = \frac{1}{2197} = \frac{1}{13^3}$$

$\approx 0{,}000455$.**Respuesta:** $\boxed{P(N=4 \mid S) = 1/2197}$.

26. Ejercicio 26

Se disponen de dos dados A y B. El dado A tiene 4 caras rojas y 2 blancas. El dado B tiene 2 caras rojas y 4 blancas. Se lanza una moneda: si sale cruz se decide jugar siempre con B, y si sale cara, con A. Se pide:

a) La probabilidad de obtener cara roja.

b) La probabilidad de obtener cara roja en la tercera tirada sabiendo que ya se ha obtenido este color en las dos primeras.

c) La probabilidad de haber utilizado el dado A sabiendo que se ha obtenido cara roja en las n primeras tiradas.

Solución

Sea R el suceso "sale roja" en una tirada. Con $P(A) = P(B) = 1/2$,

$$P(R \mid A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \qquad P(R \mid B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

a) Por probabilidad total:

$$P(R) = P(R \mid A)P(A) + P(R \mid B)P(B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

b) Condicionadas al dado, las tiradas son independientes. Por Bayes,

$$P(A \mid R_1, R_2) = \frac{\frac{1}{2}(\frac{2}{3})^2}{\frac{1}{2}(\frac{2}{3})^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{3})^2} = \frac{4}{5}, \quad P(B \mid R_1, R_2) = \frac{1}{5}.$$

Así,

$$P(R_3 \mid R_1, R_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{5}.$$

c) Tras observar n rojas,

$$P(A \mid nR) = \frac{\frac{1}{2}(\frac{2}{3})^n}{\frac{1}{2}(\frac{2}{3})^n + \frac{1}{2}(\frac{1}{3})^n} = \frac{(2/3)^n}{(2/3)^n + (1/3)^n} = \frac{2^n}{2^n + 1}.$$

Respuestas: a) $1/2$; b) $3/5$; c) $2^n/(2^n + 1)$.