ESTADISTICA

RELACIÓN 3

Caractérsticas de las vv.aa

CUADERNILLO DE EJERICIOS

Relación 3.
Características de las vv.aa.

1.– Sea X el número de llantas defectuosas en un lote de 4 llantas moldeadas simultáneamente. Supongamos que la distribución de probabilidad de X es:

x_i	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	0,8	0,1	0,05	0,03	0,02

a) Determine el número esperado de llantas defectuosas por lote.
b) Calcule la varianza y la desviación típica de X.
c) Si una llanta defectuosa supone una penalización de 1000 u.m., calcule la penalización esperada por lote, así como la varianza de dicha penalización.

2.– Supongamos que la distribución de las patatas de una cierta cosecha de acuerdo a su calidad es

Calidad	A	B	C
Probabilidad	0,4	0,5	0,1

Las del tipo A se venden a razón de 30 u.m. por kilo, las de B a 25, y a 20 las del C. ¿Cuál es el ingreso esperado por kilo?. Si la cosecha se eleva a 40 toneladas, ¿cuál es el ingreso total esperado?. Si se adelantara la cosecha, la distribución de calidades pasaría a ser: P(A)=0,4, P(B)=0,6 y P(C)=0. Además, el total se reduciría a 30 toneladas. ¿Se recomienda adelantar la producción?.

3.– Sea un juego con dos jugadores A y B. Se lanza un dado y la ganancia del jugador A depende del resultado del dado:

Resultado	1	2	3	4	5	6
Ganancia	3	-2	-2	5	1	a

¿Qué valor debe tener a para que el juego sea equilibrado desde el punto de vista de A?

4.– Un industrial trata de modernizar su empresa para estar en condiciones de realizar los objetivos fijados por un determinado plan. Esta modernización se efectúa mediante la inversión en nuevos utillajes por un valor de 950.000 pts. Teniendo en cuenta el programa gubernamental y el riesgo de fracaso del mismo, el industrial estima que si efectúa la inversión proyectada, los nuevos utillajes podrán proporcionarle en el curso de su vida útil: 1.500.000 pts. con probabilidad 0,45, 1.200.000 pts. con probabilidad 0,4 ó 80.000 pts. con probabilidad 0,15. ¿Llevará a cabo la inversión proyectada?. ¿Cuál será su beneficio o pérdida esperada?

5.– En la negociación de un contrato, un director comercial tiene 3 posibilidades sobre 5 de obtener un beneficio de 10.000 pts., y un 40% de obtener una pérdida de 20.000 pts. ¿Cuál es la pérdida media esperada?

6.– El número X de obreros necesarios para concluir cierto proyecto de construcción es una v.a. con la siguiente función de probabilidad:

x_i	10	11	12	13	14
$P(X=x_i)$	0,2	0,3	0,3	0,1	0,1

El beneficio del contratista viene dado por Y=1000(12-X). Se pide:
a) Distribución de probabilidad de Y.
b) Esperanza y varianza de X e Y.

7.– Se considera una v.a. X tal que $E[(X-1)^2]=10$ y $E[(X-2)^2]=6$. Calcule E(X) y $\sigma(X)$.

8.– Un fabricante de calculadoras estima que la demanda anual D (en miles de unidades) sigue una distribución cuya función de densidad es $f(d)=k(d-30)$ si $30<d<60$ (0 en el resto).
a) Determine k.
b) Si la utilidad neta por calculadora es de 5000 pts., ¿cuál es la utilidad total esperada por año?

9.– El rendimiento de metal puro de un mineral, expresado en tanto por ciento, es una v.a. X cuya función de densidad viene dada por $f(x)=x^2/9$ si $0<x<3$ (0 en el resto).
a) Calcule el rendimiento medio de cada piedra.
b) Probabilidad de que elegidas cinco piedras al azar, tres de ellas contengan exactamente un 2% o más de metal puro.

10.– Un almacén distribuye un artículo en exclusiva en una gran ciudad y lo recibe mensualmente de fábrica. El número de millares de artículos vendidos cada mes es una v.a. X cuya función de densidad viene dada por

$$f(x) = \begin{cases} k(1-x)^3 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Calcule las ventas medias mensuales.
b) Si se quiere tener una garantía del 95% de que no se agote el producto en un mes determinado, ¿qué cantidad debe pedirse a fábrica?

11.– La concentración de un reactivo utilizado en un proceso químico es una v.a. X con función de densidad $f(x)=-6x(x-1)$ si $0<x<1$ (0 en el resto). El beneficio asociado con el producto final viene dado por $P=3X+1$.
a) Calcule el valor esperado de P.
b) ¿Cuál es la función de densidad de P?

12.– Un fabricante ofrece en su producto una garantía de cinco años. El tiempo de fallo (medido en años) sigue una distribución con función de densidad $f(t) = \frac{1}{8}e^{-\frac{t}{8}}$ si $t > 0$ (0 en el resto).
a) Calcule el tiempo medio de fallo.
b) Calcule la probabilidad de que el aparato se estropee antes del tiempo medio.
c) Si el beneficio por cada venta se cifra en 55.000 u.m. y los costes de reparación en 20.000 u.m., calcule el beneficio esperado por cada artículo (considere extinguida la garantía una vez efectuada la primera reparación).

13.– Un almacenista compra 10.000 kg. de un cierto artículo en fardos de 100 kg., al precio de p ptas. por kg. Pretende almacenar la mercancía para su posterior venta en condiciones más favorables. Sin embargo, debido a la naturaleza del producto, cada fardo experimenta una disminución de su peso. Se sabe que tal disminución X, en cada fardo, se comporta según una v.a. con función de densidad $f(x)=k(100-x^2)$ si $0<x<10$ (0 en el resto) siendo independiente el comportamiento de cada fardo del de los demás.
a) ¿Cuál es el beneficio esperado supuesto un incremento en el precio del 5%?
b) ¿Cuál es el menor incremento en el precio a partir del que cabría esperar que no se produjeran pérdidas?

14– La proporción de alcohol de cierto compuesto es una v.a. X con función de densidad $f(x)=20x^3(1-x)$ si $0<x<1$ (0 en el resto). El precio P de venta por litro y la demanda Q expresada en litros de dicho compuesto están relacionadas con X mediante las expresiones $P=500+1000X$ y $Q=5000/X$.
a) Determine la función de densidad de la demanda.
b) Calcule el valor esperado de la venta total del compuesto.

15.– Sea X una v.a. con función de densidad $f(x)=\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}$ si $x>0$ (0 en el resto). Halle:
a) Sus momentos respecto al origen de cualquier orden.
b) Desviación típica.
c) Mediana.
d) El 90 percentil.

16.– Dado el vector aleatorio (X,Y) cuya función de densidad conjunta es $f(x,y)=x+y$ si $0<x,y<1$ (0 en el resto). Determine:
a) Cov(X,Y)
b) E(Y/X)

17.– Sea (X,Y) un v.a. bidimensional con función de densidad $f(x,y)=1$ si $0<|y|<x<1$ (0 en el resto). Demuestra que X e Y están incorreladas pero no son independientes.

18.– Consideremos dos vv.aa. X e Y con la siguiente distribución de probabilidad conjunta:

Y \ X	0	1
0	a	b
1	c	d

Demuestre que si son incorreladas son independientes.

19.– Una v.a. X tiene una función de densidad dada por $f(x)=2e^{-2x}$ si $x>0$ (0 en el resto).
a) Calcule $P(|X-E(X)|>1)$.
b) Obtenga un límite superior de $P(|X-E(X)|>1)$ y compárelo con el resultado obtenido en el apartado a).

20.– El tiempo necesario para transportar un cargamento por vía marítima entre dos puertos sigue una distribución de probabilidad de media 90 h. y desviación típica 3 h. El capitán del barco pretende llegar al otro puerto entre 80 y 100 horas después de haber abandonado el primero. Obtenga un límite inferior para la probabilidad de que se cumpla lo que dice el capitán.

21.– Dada una v.a. con función de probabilidad $P(X=k)=pq^k$ si $k=0,1,2,...$ con $p+q=1$ y $0<p<1$. Obtenga la función generatriz de momentos.

22.– Dada la v.a. X cuya función de probabilidad es $P(X=0)=1/3$ y $P(X=1)=2/3$. Obtenga:
a) Su función generatriz de momentos.
b) Los momentos ordinarios.

23.– Dada la v.a. con función de densidad $f(x)=e^{-|x|}/2$ para todo $x\in R$.
a) Obtenga la función generatriz de momentos.
b) Obtenga la media y la varianza.

24.– La v.a. X tiene como función de densidad $f(x)=\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x-m|}$ para todo $x\in R$ (λ es una cte. positiva). Determine:
a) La función generatriz de momentos.
b) Esperanza matemática.

25.– Sea X una v.a. con función de densidad $f(x)=e^{-x}$ si $x\geq 0$ (0 en el resto). Pruebe que la función generatriz de la v.a. X-E(X) viene dada por $\phi(t)=\frac{e^{-t}}{1-t}$ si $t<1$.

26.– Sea X una v.a. indicativa de las máquinas que pueden averiarse en un día, con función generatriz de momentos $\Phi_X(t)=(0{,}2e^t+0{,}8)^4$. Calcule la desviación típica de X.

27.– Sean X, Y variables aleatorias independientes, con funciones de probabilidad:
$$P(X=x)=e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^x}{x!} \quad x=0,1,2,... \text{ y } P(Y=y)=e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^y}{y!} \quad y=0,1,2,...$$
a) Obtenga la función generatriz de momentos de X y de Y.
b) Obtenga la esperanza y la varianza de X y de Y.
c) Obtenga la función generatriz de Z=X+Y.

28.- Sea X una v.a. con función generatriz $\Phi_x(t)=\frac{1+e^{\frac{t^2}{2}}}{2}$. Sean X_1, X_2,..., X_n variables aleatorias independientes entre sí y con la misma distribución que X. Calcule:
a) La función generatriz de la variable Y definida por $Y=\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i}{n}$.
b) La media de Y.

29.– Sea el vector (X,Y) con función de densidad conjunta f(x,y)=1 si 0<x,y<1 (0 en el resto).
a) Obtenga su función generatriz.
b) Sea $Z=(Z_1,Z_2)$ donde $Z_1=X+Y$, $Z_2=X-Y$. Obtenga la función generatriz de Z.

30.- Sea (X,Y) un vector bidimensional con función de probabilidad $P(X=m,Y=n)=1/2^{m+n}$ con m,n=1,2... Calcule la función generatriz de momentos de $Z=(Z_1,Z_2)$, siendo $Z_1=X+Y$, $Z_2=X-Y$.

Índice

1. Ejercicio 1 2
2. Ejercicio 2 3
3. Ejercicio 3 4
4. Ejercicio 4 5
5. Ejercicio 5 6
6. Ejercicio 6 6
7. Ejercicio 7 7
8. Ejercicio 8 8
9. Ejercicio 9 8
10. Ejercicio 10 9
11. Ejercicio 11 10
12. Ejercicio 12 12
13. Ejercicio 13 13
14. Ejercicio 14 14
15. Ejercicio 15 15
16. Ejercicio 16 17
17. Ejercicio 17 18
18. Ejercicio 18 19
19. Ejercicio 19 20
20. Ejercicio 20 21
21. Ejercicio 21 21
22. Ejercicio 22 22
23. Ejercicio 23 23
24. Ejercicio 24 24

25. Ejercicio 25 **25**

26. Ejercicio 26 **26**

27. Ejercicio 27 **26**

28. Ejercicio 28 **27**

29. Ejercicio 29 **29**

30. Ejercicio 30 **30**

1. Ejercicio 1

Sea X el número de llantas defectuosas en un lote de 4 llantas moldeadas simultáneamente. Supongamos que la distribución de probabilidad de X es:

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,8	0,1	0,05	0,03	0,02

a) Determine el número esperado de llantas defectuosas por lote.

b) Calcule la varianza y la desviación típica de X.

c) Si una llanta defectuosa supone una penalización de 1000 u.m., calcule la penalización esperada por lote, así como la varianza de dicha penalización.

Solución

a) Esperanza

$$E[X] = \sum_{i=0}^{4} x_i \, P(X = x_i) = 0(0{,}8) + 1(0{,}1) + 2(0{,}05) + 3(0{,}03) + 4(0{,}02)$$

$$E[X] = 0 + 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}09 + 0{,}08 = 0{,}37$$

Por tanto, el número esperado de llantas defectuosas por lote es:

$$\boxed{0{,}37}$$

b) Varianza y desviación típica

Primero se calcula $E[X^2]$:

$$E[X^2] = \sum_{i=0}^{4} x_i^2 \, P(X = x_i) = 0^2(0{,}8) + 1^2(0{,}1) + 2^2(0{,}05) + 3^2(0{,}03) + 4^2(0{,}02)$$

$$E[X^2] = 0 + 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}27 + 0{,}32 = 0{,}89$$

La varianza es:

$$\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = 0{,}89 - (0{,}37)^2 = 0{,}89 - 0{,}1369 = 0{,}7531$$

La desviación típica:

$$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{0{,}7531} \approx 0{,}867$$

$$\boxed{\mathrm{Var}(X) = 0{,}7531, \quad \sigma_X \approx 0{,}867}$$

c) Penalización esperada y varianza

Si la penalización por llanta defectuosa es de 1000 u.m., definimos la variable:

$$Y = 1000 \cdot X$$

Entonces:

$$E[Y] = 1000 \cdot E[X] = 1000 \cdot 0{,}37 = 370\,\text{u.m.}$$

$$\text{Var}(Y) = (1000)^2 \cdot \text{Var}(X) = 10^6 \cdot 0{,}7531 = 753100$$

$$\sigma_Y = 1000 \cdot \sigma_X \approx 1000 \cdot 0{,}867 = 867$$

$$\boxed{E[Y] = 370, \quad \text{Var}(Y) = 753100, \quad \sigma_Y \approx 867}$$

2. Ejercicio 2

Supongamos que la distribución de las patatas de una cierta cosecha de acuerdo a su calidad es

Calidad	A	B	C
Probab.	0,4	0,5	0,1

Las del tipo A se venden a razón de 30 u.m. por kilo, las de B a 25 y a 20 las de C.

(a) ¿Cuál es el ingreso esperado por kilo?

(b) Si la cosecha se eleva a 40 toneladas, ¿cuál es el ingreso total esperado?

(c) Si se *adelantara* la cosecha, la distribución de calidades pasaría a ser $P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}6$ y $P(C) = 0$. Además, el total se reduciría a 30 toneladas. ¿Se recomienda adelantar la producción?

Solución

(a) Ingreso esperado por kilo. Si $P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}5$, $P(C) = 0{,}1$ y los precios son $p_A = 30$, $p_B = 25$, $p_C = 20$, el ingreso por kilo es la esperanza

$$E[\text{ingreso/kg}] = 0{,}4 \cdot 30 + 0{,}5 \cdot 25 + 0{,}1 \cdot 20 = 12 + 12{,}5 + 2 = \boxed{26{,}5 \text{ u.m./kg}}.$$

(b) Ingreso total esperado con 40 toneladas. Como 1 t = 1000 kg, entonces 40 t = 40 000 kg.

$$E[\text{ingreso total}] = 26{,}5 \times 40\,000 = \boxed{1\,060\,000 \text{ u.m.}}$$

(c) ¿Conviene adelantar la producción? Si se adelanta: nuevas probabilidades $P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}6$, $P(C) = 0$ y volumen 30 t = 30 000 kg.

$$E[\text{ingreso/kg} \mid \text{adelantar}] = 0{,}4 \cdot 30 + 0{,}6 \cdot 25 + 0 \cdot 20 = 12 + 15 = 27 \text{ u.m./kg.}$$

$$E[\text{ingreso total} \mid \text{adelantar}] = 27 \times 30\,000 = \boxed{810\,000 \text{ u.m.}}$$

Comparación:

$$\text{No adelantar: } 1\,060\,000 \text{ u.m.} \qquad \text{Adelantar: } 810\,000 \text{ u.m.}$$

Como $1\,060\,000 > 810\,000$, **no se recomienda** adelantar la producción.

3. Ejercicio 3

Sea un juego con dos jugadores A y B. Se lanza un dado y la ganancia del jugador A depende del resultado del dado:

Resultado	1	2	3	4	5	6
Ganancia de A	3	-2	-2	5	1	a

¿Qué valor debe tener a para que el juego sea equilibrado desde el punto de vista de A?

Solución

El juego estará equilibrado para A cuando el valor esperado de su ganancia sea cero. Dado que el dado es equilibrado, cada cara tiene probabilidad $\frac{1}{6}$. Por tanto:

$$E[\text{ganancia}] = \frac{1}{6}\big(3 + (-2) + (-2) + 5 + 1 + a\big).$$

Simplificando:

$$E[\text{ganancia}] = \frac{1}{6}(5 + a).$$

Para que el juego sea equilibrado desde el punto de vista de A, se requiere que:

$$E[\text{ganancia}] = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{6}(5 + a) = 0.$$

De aquí se obtiene:

$$a = -5.$$

$$\boxed{a = -5}$$

4. Ejercicio 4

Un industrial trata de modernizar su empresa para estar en condiciones de realizar los objetivos fijados por un determinado plan. Esta modernización se efectúa mediante la inversión en nuevos utillajes por un valor de 950.000 pts. Teniendo en cuenta el programa gubernamental y el riesgo de fracaso del mismo, el industrial estima que si efectúa la inversión proyectada, los nuevos utillajes podrán proporcionarle en el curso de su vida útil:

- 1.500.000 pts. con probabilidad 0,45,
- 1.200.000 pts. con probabilidad 0,40,
- 80.000 pts. con probabilidad 0,15.

¿Llevará a cabo la inversión proyectada? ¿Cuál será su beneficio o pérdida esperada?

Solución

El beneficio neto en cada escenario se calcula restando la inversión inicial de 950.000 pts. al ingreso correspondiente:

$$\begin{aligned} B_1 &= 1{,}500{,}000 - 950{,}000 = 550{,}000, & P(B_1) &= 0,45, \\ B_2 &= 1{,}200{,}000 - 950{,}000 = 250{,}000, & P(B_2) &= 0,40, \\ B_3 &= 80{,}000 - 950{,}000 = -870{,}000, & P(B_3) &= 0,15. \end{aligned}$$

El valor esperado del beneficio es:

$$E[B] = 550{,}000 \cdot 0,45 + 250{,}000 \cdot 0,40 + (-870{,}000) \cdot 0,15.$$

Calculamos:

$$E[B] = 247{,}500 + 100{,}000 - 130{,}500 = 217{,}000 \text{ pts.}$$

Por tanto, la **ganancia esperada** es positiva (217,000 pts.), lo cual significa que **sí conviene llevar a cabo la inversión proyectada**, aunque exista un riesgo del 15 % de incurrir en una fuerte pérdida de 870,000 pts.

Ingreso esperado (pts.)	**Beneficio neto (pts.)**	**Probabilidad**
1.500.000	$1{,}500{,}000 - 950{,}000 = 550{,}000$	0.45
1.200.000	$1{,}200{,}000 - 950{,}000 = 250{,}000$	0.40
80.000	$80{,}000 - 950{,}000 = -870{,}000$	0.15

Cuadro 1: Posibles beneficios/pérdidas netas de la inversión.

$\boxed{\text{Beneficio esperado: 217.000 pts.}}$

5. Ejercicio 5

En la negociación de un contrato, un director comercial tiene 3 posibilidades sobre 5 de obtener un beneficio de 10,000 pts., y un 40 % de obtener una pérdida de 20,000 pts. *¿Cuál es la pérdida media esperada?*

Solución

Modelamos el resultado monetario X (beneficio positivo, pérdida negativa) como:

$$X = \begin{cases} 10{,}000, & \text{con prob. } \frac{3}{5} = 0{,}6, \\ -20{,}000, & \text{con prob. } 0{,}4. \end{cases}$$

El valor esperado es

$$\mathbb{E}[X] = 0{,}6 \cdot 10{,}000 + 0{,}4 \cdot (-20{,}000) = 6{,}000 - 8{,}000 = -2{,}000 \text{ pts.}$$

Por tanto, el resultado medio es una pérdida de 2,000 pts:

$$\boxed{\text{pérdida media esperada} = 2{,}000 \text{ pts}}.$$

6. Ejercicio 6

El número X de obreros necesarios para concluir cierto proyecto de construcción es una v.a. con la siguiente función de probabilidad:

x_i	10	11	12	13	14
$P(X = x_i)$	0,2	0,3	0,3	0,1	0,1

El beneficio del contratista viene dado por $Y = 1000\,(12 - X)$. Se pide:

(a) Distribución de probabilidad de Y.

(b) Esperanza y varianza de X e Y.

Solución

(a) Distribución de Y. La transformación $Y = 1000(12 - X)$ induce la siguiente correspondencia:

$X = 10 \Rightarrow Y = 2000$, $X = 11 \Rightarrow Y = 1000$, $X = 12 \Rightarrow Y = 0$, $X = 13 \Rightarrow Y = -1000$, $X = 14 \Rightarrow$

$\Rightarrow Y = -2000$. Por tanto,

y_j	-2000	-1000	0	1000	2000
$P(Y = y_j)$	0,1	0,1	0,3	0,3	0,2

(b) Momentos de X e Y.

$$\mathbb{E}[X] = \sum x_i P(X = x_i) = 10(0{,}2) + 11(0{,}3) + 12(0{,}3) + 13(0{,}1) + 14(0{,}1) = 11{,}6.$$

$$\mathbb{E}[X^2] = 10^2(0{,}2) + 11^2(0{,}3) + 12^2(0{,}3) + 13^2(0{,}1) + 14^2(0{,}1) = 136.$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \big(\mathbb{E}[X]\big)^2 = 136 - (11{,}6)^2 = 136 - 134{,}56 = 1{,}44, \qquad \sigma_X = \sqrt{1{,}44} = 1{,}2.$$

Para $Y = 1000(12 - X)$:

$$\mathbb{E}[Y] = 1000\,(12 - \mathbb{E}[X]) = 1000(12 - 11{,}6) = \boxed{400}.$$

$$\mathrm{Var}(Y) = 1000^2\ \mathrm{Var}(12{-}X) = 1000^2\ \mathrm{Var}(X) = (1000)^2(1{,}44) = \boxed{1\,440\,000}, \qquad \sigma_Y = 1000\,\sigma_X = \boxed{1200}.$$

7. Ejercicio 7

Se considera una v.a. X tal que

$$\mathbb{E}\big[(X-1)^2\big] = 10 \qquad \text{y} \qquad \mathbb{E}\big[(X-2)^2\big] = 6.$$

Calcule $\mathbb{E}[X]$ y $\sigma(X)$.

Solución

Use la identidad

$$\mathbb{E}\big[(X-a)^2\big] = \mathrm{Var}(X) + \big(\mathbb{E}[X] - a\big)^2,$$

válida para cualquier constante a. Denotando $\mu = \mathbb{E}[X]$ y $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$, las ecuaciones del enunciado quedan:

$$\begin{cases} \sigma^2 + (\mu-1)^2 = 10, \\ \sigma^2 + (\mu-2)^2 = 6. \end{cases}$$

Restando la segunda a la primera,

$$(\mu-1)^2 - (\mu-2)^2 = 4 \implies (\mu^2 - 2\mu + 1) - (\mu^2 - 4\mu + 4) = 4 \implies 2\mu - 3 = 4,$$

de donde

$$\boxed{\mu = \mathbb{E}[X] = \tfrac{7}{2} = 3{,}5}.$$

Sustituyendo en $\sigma^2 + (\mu-2)^2 = 6$,

$$\sigma^2 + (1{,}5)^2 = 6 \implies \sigma^2 = 6 - \tfrac{9}{4} = \tfrac{15}{4}.$$

Por tanto,

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{\tfrac{15}{4}} = \tfrac{\sqrt{15}}{2} \approx 1{,}9365}.$$

8. Ejercicio 8

Un fabricante de calculadoras estima que la demanda anual D (en miles de unidades) sigue una distribución cuya función de densidad es

$$f(d) = k(d-30) \quad \text{si } 30 < d < 60 \qquad \text{(0 en el resto)}.$$

a) Determine k.

b) Si la utilidad neta por calculadora es de 5000 pts, ¿cuál es la utilidad total esperada por año?

Solución

a) Cálculo de k. La constante de normalización cumple

$$1 = \int_{30}^{60} k(d-30)\,dd = k\left[\frac{(d-30)^2}{2}\right]_{30}^{60} = k\cdot\frac{30^2}{2} = k\cdot 450.$$

Por tanto,

$$\boxed{k = \frac{1}{450}}.$$

b) Utilidad total esperada. Primero calculamos $\mathbb{E}[D]$:

$$\mathbb{E}[D] = \int_{30}^{60} d\,f(d)\,dd = \frac{1}{450}\int_{30}^{60} d(d-30)\,dd = \frac{1}{450}\left[\frac{d^3}{3} - 15d^2\right]_{30}^{60} = \frac{22500}{450} = \boxed{50}.$$

Como D está medido en *miles* de unidades, y la utilidad neta es 5000 pts por calculadora, la utilidad por cada mil es $5000 \times 1000 = 5{,}000{,}000$ pts. Luego

$$\mathbb{E}[\text{utilidad total}] = 5{,}000{,}000 \times \mathbb{E}[D] = 5{,}000{,}000 \times 50 = \boxed{250{,}000{,}000 \text{ pts}}.$$

9. Ejercicio 9

El rendimiento de metal puro de un mineral, expresado en tanto por ciento, es una v.a. X cuya función de densidad viene dada por

$$f(x) = \frac{x^2}{9} \quad \text{si } 0 < x < 3 \qquad \text{(0 en el resto)}.$$

a) Calcule el rendimiento medio de cada piedra.

b) Probabilidad de que, elegidas cinco piedras al azar, tres de ellas contengan exactamente un 2 % o más de metal puro.

Solución

Comprobación (opcional). $\displaystyle\int_0^3 \frac{x^2}{9}\,dx = \frac{1}{27}x^3\Big|_0^3 = 1.$

a) Rendimiento medio.

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^3 x\,\frac{x^2}{9}\,dx = \frac{1}{9}\int_0^3 x^3\,dx = \frac{1}{9}\,\frac{x^4}{4}\Big|_0^3 = \frac{1}{9}\cdot\frac{81}{4} = \boxed{\frac{9}{4} = 2{,}25}.$$

b) Probabilidad pedida. Sea $p = P(X \geq 2)$.

$$p = \int_2^3 \frac{x^2}{9}\,dx = \frac{1}{27}\left(3^3 - 2^3\right) = \frac{27-8}{27} = \frac{19}{27}.$$

Tomando $n = 5$ piedras independientes, la probabilidad de que exactamente $k = 3$ tengan al menos $2\,\%$ de metal puro (éxito) es binomial:

$$P = \binom{5}{3}p^3(1-p)^2 = \binom{5}{3}\left(\frac{19}{27}\right)^3\left(\frac{8}{27}\right)^2 = \boxed{\frac{10\cdot 19^3\cdot 8^2}{27^5} \approx 0{,}306}.$$

10. Ejercicio 10

Un almacén distribuye un artículo en exclusiva en una gran ciudad y lo recibe mensualmente de fábrica. El número de *millares* de artículos vendidos cada mes es una v.a. X cuya función de densidad viene dada por

$$f(x) = \begin{cases} k(1-x)^3, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

a) Calcule las ventas medias mensuales.

b) Si se quiere tener una garantía del $95\,\%$ de que no se agote el producto en un mes determinado, ¿qué cantidad debe pedirse a fábrica?

Solución

Normalización (para hallar k).

$$1 = \int_0^1 k(1-x)^3\,dx = k\int_0^1 (1-x)^3\,dx = k\cdot\frac{1}{4} \quad\Rightarrow\quad \boxed{k = 4}.$$

Así, $f(x) = 4(1-x)^3$ en $(0,1)$.

a) Ventas medias mensuales.

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^1 x\,4(1-x)^3\,dx = 4\int_0^1 x(1-x)^3\,dx = 4\,\mathrm{B}(2,4) = 4\cdot\frac{1!\,3!}{5!} = \frac{4}{20} = \boxed{\frac{1}{5}}.$$

Como X está medido en *millares*, $\mathbb{E}[X] = 0{,}2$ millares, es decir,

$$\boxed{0{,}2 \text{ millares} = 200 \text{ unidades (artículos).}}$$

b) Cantidad a pedir para un 95 % de garantía. Necesitamos q tal que $P(X \le q) = 0{,}95$. La función de distribución es

$$F(x) = \int_0^x 4(1-t)^3\,dt = 1-(1-x)^4, \qquad 0<x<1.$$

Imponiendo $F(q) = 0{,}95$:

$$1-(1-q)^4 = 0{,}95 \;\Rightarrow\; (1-q)^4 = 0{,}05 \;\Rightarrow\; q = 1-0{,}05^{\,1/4}.$$

Numéricamente

$$q \approx 1-0{,}05^{0{,}25} \approx 1-0{,}4729 = 0{,}5271.$$

Por tanto, debe pedirse

$$\boxed{q \approx 0{,}527 \text{ millares} \approx 527 \text{ unidades}}$$

para tener un 95 % de probabilidad de no agotar el producto en el mes.

11. Ejercicio 11

La concentración de un reactivo utilizado en un proceso químico es una v.a. X con función de densidad

$$f_X(x) = -6x(x-1) = 6x(1-x), \qquad 0<x<1 \quad (0 \text{ en el resto}).$$

El beneficio asociado con el producto final viene dado por $P = 3X+1$.

a) Calcule el valor esperado de P.

b) ¿Cuál es la función de densidad de P?

Solución

Observación.

2. Comparación con la distribución Beta

La distribución Beta con parámetros $\alpha, \beta > 0$ tiene función de densidad

$$f(x) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\, x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \quad 0 < x < 1,$$

donde $B(\alpha,\beta)$ es la función Beta de normalización.

Si tomamos $\alpha = 2$, $\beta = 2$, se obtiene

$$f(x) = \frac{1}{B(2,2)}\, x^{2-1}(1-x)^{2-1} = \frac{1}{B(2,2)}\, x(1-x).$$

3. Constante de normalización

La función Beta se define como

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\, dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

En nuestro caso:

$$B(2,2) = \frac{\Gamma(2)\Gamma(2)}{\Gamma(4)} = \frac{1\cdot 1}{3!} = \frac{1}{6}.$$

Por tanto,

$$f(x) = \frac{1}{1/6}\, x(1-x) = 6x(1-x), \quad 0 < x < 1,$$

que coincide exactamente con la densidad dada.

4. Esperanza de la distribución Beta

La esperanza de una Beta(α,β) está dada por la fórmula:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

Con $\alpha = 2, \beta = 2$ se obtiene:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{2}{2+2} = \frac{2}{4} = \tfrac{1}{2}.$$

$f_X(x) = 6x(1-x)$ en $(0,1)$ es la densidad Beta$(\alpha = 2, \beta = 2)$, luego $\mathbb{E}[X] = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$. (Alternativamente se puede integrar: $\int_0^1 x\, 6x(1-x)\, dx = \frac{1}{2}$.)

a) Valor esperado de P. Por linealidad de la esperanza,

$$\mathbb{E}[P] = \mathbb{E}[\,3X+1\,] = 3\,\mathbb{E}[X] + 1 = 3\cdot\frac{1}{2} + 1 = \boxed{\frac{5}{2} = 2{,}5}.$$

b) Densidad de P. La transformación es afín: $P = 3X + 1$ con $3 > 0$. Si $p \in (1,4)$, entonces $x = \dfrac{p-1}{3} \in (0,1)$ y

$$f_P(p) = f_X\left(\frac{p-1}{3}\right) \cdot \left|\frac{dx}{dp}\right| = 6\left(\frac{p-1}{3}\right)\left(1 - \frac{p-1}{3}\right) \cdot \frac{1}{3}.$$

Simplificando,

$$1 - \frac{p-1}{3} = \frac{4-p}{3} \quad \Longrightarrow \quad f_P(p) = \frac{6}{9}\,(p-1)\,(4-p) \cdot \frac{1}{3} = \boxed{f_P(p) = \frac{2}{9}\,(p-1)(4-p), \quad 1 < p < 4}.$$

Y $f_P(p) = 0$ fuera de ese intervalo.

12. Ejercicio 12

Un fabricante ofrece en su producto una garantía de cinco años. El tiempo de fallo (medido en años) sigue una distribución con función de densidad

$$f_T(t) = \frac{1}{8}\,e^{-t/8}, \qquad t > 0 \quad (0 \text{ en el resto}).$$

a) Calcule el tiempo medio de fallo.

b) Calcule la probabilidad de que el aparato se estropee antes del tiempo medio.

c) Si el beneficio por cada venta se cifra en 55,000 u.m. y los costes de reparación en 20,000 u.m., calcule el beneficio esperado por cada artículo (*considere extinguida la garantía una vez efectuada la primera reparación*).

Solución

La densidad dada es exponencial con parámetro $\lambda = \frac{1}{8}$ (media $= 1/\lambda = 8$).

a) Tiempo medio de fallo. Para $T \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$,

$$\mathbb{E}[T] = \frac{1}{\lambda} = 8 \text{ años}.$$

b) Probabilidad de fallo antes del tiempo medio. Se pide $P(T < 8)$. La función de distribución de T es $F_T(t) = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-t/8}$ para $t \geq 0$. Por tanto,

$$P(T < 8) = F_T(8) = 1 - e^{-8/8} = 1 - e^{-1} \approx \boxed{0{,}6321}.$$

c) Beneficio esperado con garantía de 5 años. La garantía cubre sólo la *primera* avería si ocurre dentro de 5 años. El coste esperado de reparación es entonces

$$\mathbb{E}[\text{coste}] = 20{,}000 \cdot P(T \leq 5) = 20{,}000\big(1 - e^{-5/8}\big).$$

Luego el beneficio esperado por unidad es

$$\mathbb{E}[\text{beneficio}] = 55{,}000 - 20{,}000\big(1 - e^{-5/8}\big) = 35{,}000 + 20{,}000\, e^{-5/8}.$$

Numéricamente, $e^{-5/8} \approx 0{,}53526$, y por tanto

$$\mathbb{E}[\text{beneficio}] \approx 35{,}000 + 20{,}000 \cdot 0{,}53526 \approx \boxed{45{,}705 \text{ u.m.}}$$

13. Ejercicio 13

Un almacenista compra 10 000 kg de un cierto artículo en fardos de 100 kg, al precio de p ptas. por kg. Pretende almacenar la mercancía para su posterior venta en condiciones más favorables. Sin embargo, debido a la naturaleza del producto, cada fardo experimenta una disminución de su peso. Se sabe que tal disminución X, en cada fardo, se comporta según una v.a. con función de densidad

$$f(x) = k\,(100 - x^2) \quad \text{si } 0 < x < 10 \qquad (0 \text{ en el resto}),$$

siendo independiente el comportamiento de cada fardo del de los demás.

(a) ¿Cuál es el beneficio esperado supuesto un incremento en el precio del 5 %?

(b) ¿Cuál es el menor incremento en el precio a partir del que cabría esperar que no se produjeran pérdidas?

Solución razonada

Datos básicos. Se compran 10 000 kg en fardos de 100 kg $\Rightarrow$ hay $N = 100$ fardos. El coste total de compra es $C = 10000\,p$.

Cada fardo pierde X kg con densidad $f(x) = k(100 - x^2)$ para $0 < x < 10$.

1) Cálculo de k y de $[X]$

Normalizamos f:

$$1 = \int_0^{10} k(100 - x^2)\,dx = k\Big[100x - \frac{x^3}{3}\Big]_0^{10} = k\Big(1000 - \frac{1000}{3}\Big) = k\,\frac{2000}{3}\,,$$

de donde $k = \dfrac{3}{2000}$.

La pérdida media por fardo es

$$[X] = \int_0^{10} x\,f(x)\,dx = k\int_0^{10} x(100{-}x^2)\,dx = k\Big[50x^2{-}\frac{x^4}{4}\Big]_0^{10} = k(5000{-}2500) = 2500\,k = \boxed{3{,}75 \text{ kg}}.$$

2) Peso esperado tras el almacenamiento

Peso medio final por fardo: $100 - [X] = 100 - 3{,}75 = 96{,}25$ kg.
Peso total esperado a la venta:

$$W = N \cdot 96{,}25 = 100 \times 96{,}25 = \boxed{9625 \text{ kg}}.$$

(a) Beneficio esperado con subida del $5\,\%$

Precio de venta por kg: $1{,}05\,p$. Ingreso esperado: $I = W \cdot 1{,}05\,p = 9625 \times 1{,}05\,p = 10106{,}25\,p$.
Beneficio esperado:

$$B = I - C = 10106{,}25\,p - 10000\,p = \boxed{106{,}25\,p \text{ ptas.}}.$$

(b) Menor incremento para no tener pérdidas

Sea r el incremento relativo del precio ($r = 0{,}05$ significa $5\,\%$). Ingreso esperado: $I(r) = 9625(1+r)p$. No pérdidas $\Leftrightarrow I(r) \geq C$:

$$9625(1+r)p \geq 10000\,p \quad \Longrightarrow \quad 1 + r \geq \frac{10000}{9625} = 1 + \frac{375}{9625} = 1 + \frac{3}{77}.$$

Luego

$$r_{\text{mín}} = \frac{10000}{9625} - 1 = \frac{3}{77} \approx 0{,}038961 \;\Rightarrow\; \boxed{r_{\text{mín}} \approx 3{,}8961\,\%}.$$

Respuesta. (a) $B_{\text{esp}} = 106{,}25\,p$ ptas. (b) Incremento mínimo para no tener pérdidas: $\dfrac{3}{77} \approx 3{,}8961\,\%$.

14. Ejercicio 14

La proporción de alcohol de cierto compuesto es una v.a. X con función de densidad

$$f_X(x) = 20\,x^3(1-x), \qquad 0 < x < 1 \quad (0 \text{ en el resto}).$$

El precio por litro y la demanda (en litros) están relacionados con X por

$$P = 500 + 1000\,X, \qquad Q = \frac{5000}{X}.$$

a) Determine la función de densidad de la demanda Q.

b) Calcule el valor esperado de la *venta total* del compuesto.

Solución

a) Densidad de Q. Sea $Q = g(X) = 5000/X$. En $0 < x < 1$ la función g es monótonamente decreciente y

$$q = g(x) \iff x = g^{-1}(q) = \frac{5000}{q}, \qquad q > 5000.$$

La fórmula de cambio de variable da

$$f_Q(q) = f_X\big(g^{-1}(q)\big) \left| \frac{d}{dq} g^{-1}(q) \right| = f_X\left(\frac{5000}{q}\right) \frac{5000}{q^2}, \qquad q > 5000.$$

Sustituyendo f_X:

$$\boxed{f_Q(q) = 20\,\frac{5000^4}{q^5}\left(1 - \frac{5000}{q}\right), \quad q > 5000, \qquad f_Q(q) = 0 \text{ en otro caso.}}$$

(Equivalente: $f_Q(q) = \dfrac{20 \cdot 5000^4}{q^5} - \dfrac{20 \cdot 5000^5}{q^6}$ para $q > 5000$.)

b) Valor esperado de la venta total. La venta total (ingreso) es

$$R = P \cdot Q = (500 + 1000X)\,\frac{5000}{X} = \frac{2{,}500{,}000}{X} + 5{,}000{,}000.$$

Por tanto

$$\mathbb{E}[R] = 2{,}500{,}000\,\mathbb{E}\left[\frac{1}{X}\right] + 5{,}000{,}000.$$

Con $f_X(x) = 20x^3(1-x)$:

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{X}\right] = \int_0^1 \frac{1}{x}\,20x^3(1-x)\,dx = 20\int_0^1 \left(x^2 - x^3\right)dx = 20\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{3}.$$

Así,

$$\boxed{\mathbb{E}[R] = 2{,}500{,}000 \cdot \frac{5}{3} + 5{,}000{,}000 = \frac{55}{6} \cdot 10^6 \text{ u.m.} \;\approx 9{,}166{,}666{,}7 \text{ u.m.}}$$

(Opcional) Si por "venta total" se entiende **cantidad vendida**,

$$\mathbb{E}[Q] = 5000\,\mathbb{E}\left[\frac{1}{X}\right] = 5000 \cdot \frac{5}{3} = \boxed{\frac{25}{3} \cdot 10^3 \text{ litros } \approx\; 8\,333{,}33 \text{ l.}}$$

15. Ejercicio 15

Sea X una v.a. con función de densidad

$$f(x) = \frac{1}{\lambda}\,e^{-x/\lambda} \quad \text{si } x > 0 \quad (0 \text{ en el resto}).$$

Halle:

a) Sus momentos respecto al origen de cualquier orden.

b) Desviación típica.

c) Mediana.

d) El 90 percentil.

Solución razonada

La v.a. X es exponencial con *escala* $\lambda > 0$ (media λ, varianza λ^2).

a) Momentos respecto al origen

Para $r \in \mathbb{N}$,

$$\big[X^r\big] = \int_0^\infty x^r \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda}\, dx.$$

Haciendo el cambio $u = x/\lambda$ ($x = \lambda u$, $dx = \lambda\, du$),

$$\big[X^r\big] = \lambda^r \int_0^\infty u^r e^{-u}\, du = \lambda^r\, \Gamma(r+1) = \boxed{r!\, \lambda^r}.$$

(Se usó $\Gamma(r+1) = r!$.)

En particular, $[X] = 1!\lambda = \lambda$ y $[X^2] = 2!\lambda^2 = 2\lambda^2$.

b) Desviación típica

$$(X) = [X^2] - ([X])^2 = 2\lambda^2 - \lambda^2 = \lambda^2, \qquad \sigma_X = \sqrt{(X)} = \boxed{\lambda}.$$

c) Mediana

La F.D.A. es $F(x) = 1 - e^{-x/\lambda}$ para $x \geq 0$. La mediana m satisface $F(m) = \frac{1}{2}$:

$$1 - e^{-m/\lambda} = \tfrac{1}{2} \implies e^{-m/\lambda} = \tfrac{1}{2} \implies \boxed{m = \lambda \ln 2}.$$

d) Percentil 90

Sea $x_{0,9}$ tal que $F(x_{0,9}) = 0{,}9$:

$$1 - e^{-x_{0,9}/\lambda} = 0{,}9 \implies e^{-x_{0,9}/\lambda} = 0{,}1 \implies \boxed{x_{0,9} = -\lambda \ln(0{,}1) = \lambda \ln 10}.$$

(Numericamente, $x_{0,9} \approx 2{,}302585\, \lambda$.)

16. Ejercicio 16

Dado el vector aleatorio (X, Y) cuya función de densidad conjunta es

$$f(x,y) = x + y \quad \text{si } 0 < x, y < 1 \quad (0 \text{ en el resto}).$$

Determine:

a) (X, Y).

b) $(Y \mid X)$.

Solución razonada

Normalización

Comprobamos que $f(x, y)$ es una densidad:

$$\int_0^1 \int_0^1 (x+y)\, dy\, dx = \int_0^1 \left[x \cdot 1 + \tfrac{1}{2}\right] dx = \int_0^1 (x + \tfrac{1}{2})\, dx = \left[\tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x}{2}\right]_0^1 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1.$$

Correcto.

1) Cálculo de esperanzas

$$[X] = \int_0^1 \int_0^1 x(x+y)\, dy\, dx.$$

Primero en y: $\int_0^1 x(x+y)\, dy = \int_0^1 (x^2 + xy)\, dy = x^2 \cdot 1 + x \cdot \frac{1}{2} = x^2 + \frac{x}{2}$. Luego en x: $\int_0^1 (x^2 + \frac{x}{2})\, dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$. Así, $[X] = \frac{7}{12}$.

Por simetría, $[Y] = \frac{7}{12}$.

$$[XY] = \int_0^1 \int_0^1 xy(x+y)\, dy\, dx.$$

Integrando en y: $\int_0^1 (xy^2 + x^2 y)\, dy = \frac{x}{3} + \frac{x^2}{2}$. Luego en x: $\int_0^1 \left(\frac{x}{3} + \frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.Por tanto, $[XY] = \frac{1}{3}$.

a) Covarianza

$$(X, Y) = [XY] - [X][Y] = \tfrac{1}{3} - \left(\tfrac{7}{12}\right)^2 = \tfrac{1}{3} - \tfrac{49}{144} = \tfrac{48}{144} - \tfrac{49}{144} = -\tfrac{1}{144}.$$

$$\boxed{(X, Y) = -\tfrac{1}{144}}$$

b) Esperanza condicional $(Y \mid X)$

La marginal de X:

$$f_X(x) = \int_0^1 (x+y)\,dy = x + \tfrac{1}{2}, \quad 0 < x < 1.$$

La condicional:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{x+y}{x+\frac{1}{2}}, \quad 0 < y < 1.$$

Entonces,

$$(Y \mid X = x) = \int_0^1 y\,\frac{x+y}{x+\frac{1}{2}}\,dy = \frac{1}{x+\frac{1}{2}}\int_0^1 (xy+y^2)\,dy = \frac{1}{x+\frac{1}{2}}\Big(\tfrac{x}{2}+\tfrac{1}{3}\Big).$$

$$\boxed{(Y \mid X = x) = \frac{\frac{x}{2}+\frac{1}{3}}{x+\frac{1}{2}}}$$

17. Ejercicio 17

Sea (X,Y) un v.a. bidimensional con función de densidad

$$f(x,y) = 1 \quad \text{si } 0 < |y| < x < 1 \qquad (0 \text{ en el resto}).$$

Demuestra que X e Y están incorreladas pero no son independientes.

Solución razonada

1) Comprobación de que es densidad. Sobre el dominio $D = \{(x,y) : 0 < x < 1,\ -x < y < x\}$,

$$\iint_D 1\,dy\,dx = \int_0^1\int_{-x}^{x} 1\,dy\,dx = \int_0^1 2x\,dx = \big[x^2\big]_0^1 = 1.$$

2) Medias (μ_X, μ_Y) y producto esperado. Por simetría en y, $\mu_Y = \mathbb{E}[Y] = 0$. Además,

$$\mu_X = \mathbb{E}[X] = \int_0^1\int_{-x}^{x} x\,dy\,dx = \int_0^1 x(2x)\,dx = 2\int_0^1 x^2\,dx = \frac{2}{3}.$$

$$\mathbb{E}[XY] = \int_0^1\int_{-x}^{x} xy\,dy\,dx = \int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{-x}^{x} dx = \int_0^1 x\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{2}\right)dx = 0.$$

3) Incorrelación. La covarianza (notación descriptiva σ_{XY}) es

$$\sigma_{XY} = \mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mu_X\,\mu_Y = 0 - \frac{2}{3}\cdot 0 = 0.$$

Por tanto, X e Y están **incorreladas**.

4) No independencia. Las marginales son

$$f_X(x)=\int_{-x}^{x}1\,dy=2x,\quad 0<x<1;\qquad f_Y(y)=\int_{|y|}^{1}1\,dx=1-|y|,\quad -1<y<1.$$

Si fueran independientes, debería cumplirse $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=2x(1-|y|)$ en el dominio, pero $f(x,y)\equiv 1$. Basta un contraejemplo: en $(x,y)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ (donde $|y|<x$),

$$f\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{4}\right)=1\neq 2\cdot\tfrac{1}{2}\left(1-\tfrac{1}{4}\right)=\tfrac{3}{4}.$$

Luego X y Y **no son independientes**.

18. Ejercicio 18

Consideremos dos v.v.a.a. X e Y con la siguiente distribución de probabilidad conjunta:

$Y\backslash X$	0	1
0	a	b
1	c	d

$(a,b,c,d\geq 0,\ a+b+c+d=1)$.

Demuestre que si son *incorreladas* entonces son *independientes*.

Solución razonada

Para variables binarias $X,Y\in\{0,1\}$ se tiene:

$$\mathbb{E}[X]=\mathbb{P}(X=1)=b+d,\qquad \mathbb{E}[Y]=\mathbb{P}(Y=1)=c+d,\qquad \mathbb{E}[XY]=\mathbb{P}(X=1,Y=1)=d.$$

"Incorreladas" equivale a $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$, es decir,

$$\mathbb{E}[XY]=\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]\quad\Longleftrightarrow\quad d=(b+d)(c+d). \tag{1}$$

Probamos ahora que (1) implica independencia, esto es, $\mathbb{P}(X=x,Y=y)=\mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y)$ para $x,y\in\{0,1\}$.

Celda $(1,1)$**:** ya es cierta por (1):

$$\mathbb{P}(X=1,Y=1)=d=(b+d)(c+d)=\mathbb{P}(X=1)\,\mathbb{P}(Y=1).$$

Celda $(0,0)$**:**

$$\mathbb{P}(X=0,Y=0)=a=1-(b+c+d).$$

Además,

$$\mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=0)=(a+c)(a+b)=(1-(b+d))(1-(c+d))=1-(b+c+d)-(c+d)+(b+d)(c+d).$$

Usando (1), $(b+d)(c+d)=d$, queda $\mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=0)=1-(b+c+d)=a$.

Celda $(1,0)$**:**

$$\mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=0)=(b+d)(a+b)=(b+d)\big(1-(c+d)\big)=(b+d)-(b+d)(c+d)=(b+d)-d=b,$$

por (1), que coincide con $\mathbb{P}(X=1,Y=0)=b$.
Celda $(0,1)$**:**

$$\mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=1)=(a+c)(c+d)=(1-(b+d))(c+d)=(c+d)-(b+d)(c+d)=(c+d)-d=c,$$

de nuevo por (1), que coincide con $\mathbb{P}(X=0,Y=1)=c$.

Como las cuatro igualdades $\mathbb{P}(X=x,Y=y)=\mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y)$ se cumplen, se concluye que X e Y son **independientes**.

$\square$

19. Ejercicio 19

Una v.a. X tiene una función de densidad dada por

$$f(x)=2e^{-2x}\quad \text{si } x>0 \qquad \text{(0 en el resto)}.$$

a) Calcule $\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}[X]|>1)$.

b) Obtenga un límite superior de $\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}[X]|>1)$ y compárelo con el resultado obtenido en el apartado a).

Solución razonada

La densidad corresponde a una *exponencial* de parámetro $\lambda=2$ (escala $1/2$). Por tanto

$$\mathbb{E}[X]=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{2},\qquad \mathbb{V}\mathrm{ar}(X)=\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{4}.$$

a) Cálculo exacto

$$\mathbb{P}\big(|X-\tfrac{1}{2}|>1\big)=\mathbb{P}\big(X<-\tfrac{1}{2}\text{ o }X>\tfrac{3}{2}\big).$$

Como $X>0$ casi seguro, el primer suceso es imposible y queda

$$\mathbb{P}\big(|X-\tfrac{1}{2}|>1\big)=\mathbb{P}(X>\tfrac{3}{2})=e^{-2\cdot(3/2)}=\boxed{e^{-3}\approx 0{,}04979}.$$

b) Cota superior (desigualdad de Chebyshev)

Por Bienaymé–Chebyshev,

$$\mathbb{P}\big(|X-\mathbb{E}[X]|\ge 1\big)\le \frac{\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)}{1^2}=\frac{1}{4}=0{,}25.$$

Comparación: la cota 0,25 es *mucho más laxa* que el valor exacto $e^{-3}\approx 0{,}04979$.

Nota (opcional): al ser un suceso de cola superior, puede usarse la cota de Cantelli (una–lateral):

$$\mathbb{P}(X-\mu\ge 1)\le \frac{\sigma^2}{\sigma^2+1}=\frac{1/4}{1/4+1}=0{,}2,$$

que mejora a Chebyshev pero sigue siendo mayor que e^{-3}.

20. Ejercicio 20

El tiempo necesario para transportar un cargamento por vía marítima entre dos puertos sigue una distribución de probabilidad de media 90 h y desviación típica 3 h. El capitán del barco pretende llegar al otro puerto entre 80 y 100 horas después de haber abandonado el primero. Obtenga un límite inferior para la probabilidad de que se cumpla lo que dice el capitán.

Solución razonada

Sea T el tiempo de viaje. Se conoce sólo su media $\mu=\mathbb{E}[T]=90$ h y su desviación típica $\sigma=3$ h. El intervalo $[80,100]$ es simétrico respecto a μ con semiancho $k=10$ h, es decir,

$$[80,100]=[\mu-k,\mu+k],\qquad k=10.$$

Por la desigualdad de Bienaymé–Chebyshev,

$$\mathbb{P}\big(|T-\mu|\ge k\big)\le \frac{\sigma^2}{k^2}.$$

Por tanto,

$$\mathbb{P}\big(\mu-k\le T\le \mu+k\big)=\mathbb{P}\big(|T-\mu|<k\big)\ge 1-\frac{\sigma^2}{k^2}=1-\frac{3^2}{10^2}=1-\frac{9}{100}=\boxed{0{,}91}.$$

Así, un límite inferior para la probabilidad de llegar entre 80 y 100 horas es 0,91 (91 %).

21. Ejercicio 21

Dada una v.a. con función de probabilidad

$$\mathbb{P}(X=k)=p\,q^k\quad \text{si } k=0,1,2,\dots,\quad \text{con } p+q=1,\ 0<p<1.$$

Obtenga la función generatriz de momentos.

Solución razonada

La variable aleatoria X sigue una distribución *geométrica* con parámetro p, cuya función de probabilidad es

$$\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

(en este caso $q = 1 - p$).

La función generatriz de momentos (f.g.m.) se define como

$$M_X(t) = \mathbb{E}\big[e^{tX}\big] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk}\, p\, q^k.$$

Esto es una serie geométrica de razón qe^t, válida si $|qe^t| < 1$:

$$M_X(t) = p \sum_{k=0}^{\infty} (qe^t)^k = \frac{p}{1 - qe^t}, \qquad \text{para } t < -\ln q.$$

Resultado final

La función generatriz de momentos es

$$\boxed{M_X(t) = \frac{p}{1 - qe^t}, \qquad \text{válida para } t < -\ln q.}$$

22. Ejercicio 22

Dada la v.a. X cuya función de probabilidad es

$$\mathbb{P}(X = 0) = \tfrac{1}{3}, \qquad \mathbb{P}(X = 1) = \tfrac{2}{3}.$$

Obtenga:

a) Su función generatriz de momentos.

b) Los momentos ordinarios.

Solución razonada

Observamos que $X \sim \text{Bernoulli}(p)$ con $p = \frac{2}{3}$.

a) Función generatriz de momentos

Por definición,

$$M_X(t) = \mathbb{E}\big[e^{tX}\big] = e^{t \cdot 0}\, \mathbb{P}(X = 0) + e^{t \cdot 1}\, \mathbb{P}(X = 1) = \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3}\, e^t.$$

En forma general para Bernoulli(p): $M_X(t) = (1 - p) + p\, e^t$.

b) Momentos ordinarios

Para $n \geq 0$,

$$m_n = \mathbb{E}[X^n] = 0^n \, \tfrac{1}{3} + 1^n \, \tfrac{2}{3} = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ \tfrac{2}{3}, & n \geq 1. \end{cases}$$

En particular,

$$\mathbb{E}[X] = m_1 = \tfrac{2}{3}, \qquad \mathbb{E}[X^2] = m_2 = \tfrac{2}{3}, \qquad \mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \tfrac{2}{3} - \tfrac{4}{9} = \tfrac{2}{9}.$$

23. Ejercicio 23

Dada la v.a. con función de densidad

$$f(x) = \tfrac{1}{2} e^{-|x|}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

a) Obtenga la función generatriz de momentos.

b) Obtenga la media y la varianza.

Solución razonada

La densidad corresponde a una *distribución Laplace* con parámetros $\mu = 0$ (localización) y $b = 1$ (escala).

a) Función generatriz de momentos

Por definición,

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \, \tfrac{1}{2} e^{-|x|} \, dx.$$

Se descompone en dos integrales:

$$M_X(t) = \tfrac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^{0} e^{tx} e^{x} \, dx + \int_{0}^{\infty} e^{tx} e^{-x} \, dx \right).$$

Para $x < 0$: $e^{tx} e^{x} = e^{(t+1)x}$. La integral converge si $t + 1 > 0$, es decir $t > -1$.

$$\int_{-\infty}^{0} e^{(t+1)x} \, dx = \frac{1}{t+1}.$$

Para $x > 0$: $e^{tx} e^{-x} = e^{(t-1)x}$. Converge si $t < 1$.

$$\int_{0}^{\infty} e^{(t-1)x} \, dx = \frac{1}{1-t}.$$

Combinando:

$$M_X(t) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{t+1} + \frac{1}{1-t}\right), \qquad |t| < 1.$$

Simplificando:

$$M_X(t) = \frac{1}{1-t^2}, \quad |t| < 1.$$

b) Media y varianza

La media es

$$\mu = \mathbb{E}[X] = M_X'(0).$$

Como $M_X(t) = \frac{1}{1-t^2}$, se tiene

$$M_X'(t) = \frac{2t}{(1-t^2)^2}, \qquad M_X'(0) = 0.$$

Por tanto, $\mu = 0$.

La varianza:

$$\mathrm{Var}(X) = M_X''(0) - \mu^2.$$

$$M_X''(t) = \frac{2(1+3t^2)}{(1-t^2)^3}, \qquad M_X''(0) = 2.$$

Luego

$$\mathrm{Var}(X) = 2 - 0^2 = \boxed{2}.$$

Resultado final

$$M_X(t) = \frac{1}{1-t^2}, \quad |t| < 1; \qquad \mathbb{E}[X] = 0; \qquad \mathrm{Var}(X) = 2.$$

24. Ejercicio 24

La v.a. X tiene como función de densidad

$$f(x) = \frac{\lambda}{2}\, e^{-\lambda|x-m|} \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \quad (\lambda > 0 \text{ constante}).$$

Determine:

a) La función generatriz de momentos.

b) La esperanza matemática.

Solución razonada

La densidad es la de una *Laplace* (o bilateral exponencial) con *parámetros de localización y escala* (m, b) donde $b = 1/\lambda$. Es decir, $X = m + Y$ con $Y \sim \mathrm{Laplace}(0, b)$ y $b = 1/\lambda$.

a) Función generatriz de momentos

La f.g.m. de $Y \sim \text{Laplace}(0, b)$ es (para $|t| < 1/b$):

$$M_Y(t) = \mathbb{E}[e^{tY}] = \frac{1}{1 - b^2 t^2}.$$

Como $X = m + Y$, entonces

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{t(m+Y)}] = e^{mt}\, M_Y(t) = \frac{e^{mt}}{1 - b^2 t^2} = \frac{e^{mt}}{1 - \dfrac{t^2}{\lambda^2}} = \boxed{M_X(t) = e^{mt}\, \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - t^2}}, \qquad |t| < \lambda.$$

b) Esperanza matemática

Se puede obtener por simetría (la densidad es simétrica respecto a m) o derivando la f.g.m.:

$$\mathbb{E}[X] = M_X'(0) = \frac{d}{dt}\left(e^{mt}\, \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - t^2}\right)\bigg|_{t=0} = m.$$

$$\boxed{\mathbb{E}[X] = m}$$

25. Ejercicio 25

Sea X una v.a. con función de densidad

$$f(x) = e^{-x}, \quad x \geq 0 \qquad (0 \text{ en el resto}).$$

Pruebe que la función generatriz de la v.a. $X - \mathbb{E}[X]$ viene dada por

$$\varphi(t) = \frac{e^{-t}}{1 - t}, \qquad t < 1.$$

Solución razonada

La variable X es exponencial con parámetro $\lambda = 1$. Se sabe que

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda} = 1.$$

La función generatriz de momentos de X es

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \int_0^\infty e^{tx}\, e^{-x}\, dx = \int_0^\infty e^{-(1-t)x}\, dx,$$

que converge para $t < 1$. El valor de la integral es

$$M_X(t) = \frac{1}{1 - t}, \qquad t < 1.$$

Ahora, consideremos la variable centrada $Y = X - \mathbb{E}[X] = X - 1$. Su función generatriz de momentos es

$$\varphi(t) = \mathbb{E}[e^{tY}] = \mathbb{E}[e^{t(X-1)}] = \mathbb{E}[e^{tX}]\, e^{-t} = e^{-t}\, M_X(t).$$

Sustituyendo $M_X(t)$:

$$\varphi(t) = e^{-t} \cdot \frac{1}{1-t} = \boxed{\frac{e^{-t}}{1-t}}, \quad t < 1.$$

26. Ejercicio 26

Sea X una v.a. indicativa del número de máquinas que pueden averiarse en un día, con función generatriz de momentos

$$\Phi_X(t) = \big(0{,}2\, e^t + 0{,}8\big)^4.$$

Calcule la desviación típica de X.

Solución razonada

Reconocemos la f.g.m. de una **Binomial** $X \sim \text{Bin}(n, p)$, cuya forma general es $\Phi(t) = (q + pe^t)^n$ con $q = 1 - p$. Aquí $n = 4$, $p = 0{,}2$ y $q = 0{,}8$.

Para una binomial:

$$\mathbb{E}[X] = np = 4 \cdot 0{,}2 = 0{,}8, \qquad \text{Var}(X) = npq = 4 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}64.$$

Por tanto, la desviación típica es

$$\sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{0{,}64} = \boxed{0{,}8}.$$

(Comprobación vía derivadas de la f.g.m.) Sea $a(t) = 0{,}2e^t + 0{,}8$. Entonces $\Phi(t) = a(t)^4$, $\Phi'(t) = 4a(t)^3 a'(t)$, $\Phi''(t) = 4(3a(t)^2(a'(t))^2 + a(t)^3 a''(t))$. Evaluando en $t = 0$: $a(0) = 1$, $a'(0) = 0{,}2$, $a''(0) = 0{,}2$. De aquí,

$$\mathbb{E}[X] = \Phi'(0) = 4 \cdot 1^3 \cdot 0{,}2 = 0{,}8, \quad \mathbb{E}[X^2] = \Phi''(0) = 4\big(3 \cdot 0{,}2^2 + 0{,}2\big) = 1{,}28,$$
$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = 1{,}28 - 0{,}8^2 = 0{,}64 \;\Rightarrow\; \sigma_X = 0{,}8.$$

27. Ejercicio 27

Sean X, Y variables aleatorias independientes, con funciones de probabilidad:

$$\mathbb{P}(X = x) = e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, \qquad \mathbb{P}(Y = y) = e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^y}{y!}, \quad y = 0, 1, 2, \ldots$$

a) Obtenga la función generatriz de momentos de X y de Y.

b) Obtenga la esperanza y la varianza de X y de Y.

c) Obtenga la función generatriz de momentos de $Z = X + Y$.

Solución razonada

a) Función generatriz de momentos de X y Y

Recordemos que si $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, entonces

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx}\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^x}{x!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = \exp\bigl(\lambda(e^t - 1)\bigr)\,.$$

Así,

$$M_X(t) = \exp\bigl(\lambda_1(e^t - 1)\bigr), \qquad M_Y(t) = \exp\bigl(\lambda_2(e^t - 1)\bigr).$$

b) Esperanza y varianza

Para una Poisson(λ):

$$\mathbb{E}[X] = \lambda, \qquad \text{Var}(X) = \lambda.$$

Por tanto,

$$\mathbb{E}[X] = \lambda_1, \quad \text{Var}(X) = \lambda_1, \qquad \mathbb{E}[Y] = \lambda_2, \quad \text{Var}(Y) = \lambda_2.$$

c) Función generatriz de momentos de $Z = X + Y$

Si X, Y son independientes, la f.g.m. de la suma es el producto:

$$M_Z(t) = M_X(t)\, M_Y(t) = \exp\bigl(\lambda_1(e^t - 1)\bigr) \cdot \exp\bigl(\lambda_2(e^t - 1)\bigr).$$

Simplificando:

$$M_Z(t) = \exp\bigl((\lambda_1 + \lambda_2)(e^t - 1)\bigr).$$

Conclusión

$$M_X(t) = e^{\lambda_1(e^t-1)}, \quad M_Y(t) = e^{\lambda_2(e^t-1)}, \quad M_Z(t) = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^t-1)}.$$

Además,

$$\mathbb{E}[X] = \lambda_1,\ \text{Var}(X) = \lambda_1; \qquad \mathbb{E}[Y] = \lambda_2,\ \text{Var}(Y) = \lambda_2.$$

28. Ejercicio 28

Sea X una v.a. con función generatriz

$$\Phi_X(t) = \frac{1 + e^{t^2/2}}{2}.$$

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes entre sí y con la misma distribución que X. Calcule:

a) La función generatriz de la variable Y definida por

$$Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

b) La media de Y.

Solución razonada

a) Función generatriz de Y

La función generatriz de momentos de una suma de variables independientes es el producto de las funciones generatrices de cada una. Sea $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Entonces

$$\Phi_S(t) = (\Phi_X(t))^n = \left(\frac{1+e^{t^2/2}}{2}\right)^n.$$

Como $Y = \frac{1}{n}S$, su f.g.m. se obtiene sustituyendo t/n:

$$\Phi_Y(t) = \Phi_S\left(\tfrac{t}{n}\right) = \left(\Phi_X\left(\tfrac{t}{n}\right)\right)^n = \left(\frac{1+e^{\frac{t^2}{2n^2}}}{2}\right)^n.$$

$$\boxed{\Phi_Y(t) = \left(\tfrac{1+e^{t^2/(2n^2)}}{2}\right)^n}$$

b) Media de Y

La media se obtiene como

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] = \mathbb{E}[X].$$

Cálculo de $\mathbb{E}[X]$ a partir de $\Phi_X(t)$:

$$\Phi_X(t) = \frac{1+e^{t^2/2}}{2}, \quad \Phi_X'(t) = \frac{1}{2}\cdot e^{t^2/2}\cdot t.$$

Evaluando en $t=0$:

$$\Phi_X'(0) = \frac{1}{2}\cdot e^0 \cdot 0 = 0.$$

Por tanto, $\mathbb{E}[X] = 0$, y de ahí:

$$\boxed{\mathbb{E}[Y] = 0}$$

29. Ejercicio 29

Sea el vector (X, Y) con función de densidad conjunta

$$f(x, y) = 1 \quad \text{si } 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \qquad (0 \text{ en el resto}).$$

a) Obtenga su función generatriz.

b) Sea $Z = (Z_1, Z_2)$ donde $Z_1 = X + Y,\ Z_2 = X - Y$. Obtenga la función generatriz de Z.

Solución razonada

Observación inicial. La densidad es constante en el cuadrado unidad, luego $X \sim U(0, 1)$, $Y \sim U(0, 1)$ y son *independientes*.

a) Función generatriz (de momentos) conjunta de (X, Y)

Definimos $\Phi_{X,Y}(t_1, t_2) = \mathbb{E}\big[e^{t_1 X + t_2 Y}\big]$. Por independencia: $\Phi_{X,Y}(t_1, t_2) = \Phi_X(t_1)\,\Phi_Y(t_2)$. Para $U(0, 1)$,

$$\Phi_X(t) = \int_0^1 e^{tx}\,dx = \frac{e^t - 1}{t} \quad (t \neq 0), \qquad \Phi_X(0) = 1,$$

y análogamente para Y.

Por tanto,

$$\boxed{\Phi_{X,Y}(t_1, t_2) = \frac{e^{t_1} - 1}{t_1} \cdot \frac{e^{t_2} - 1}{t_2} \quad \text{(con extensión continua en } t_1 = 0 \text{ o } t_2 = 0).}$$

b) Función generatriz de $Z = (Z_1, Z_2)$ con $Z_1 = X + Y,\ Z_2 = X - Y$

La f.g.m. conjunta de Z es

$$\Phi_Z(u, v) = \mathbb{E}\big[e^{\,uZ_1 + vZ_2}\big] = \mathbb{E}\big[e^{\,u(X+Y)+v(X-Y)}\big] = \mathbb{E}\big[e^{\,(u+v)X+(u-v)Y}\big].$$

Esto es justamente la f.g.m. de (X, Y) evaluada en $(u + v,\ u - v)$:

$$\Phi_Z(u, v) = \Phi_{X,Y}(u + v,\ u - v) = \frac{e^{u+v} - 1}{u + v} \cdot \frac{e^{\,u-v} - 1}{u - v},$$

con la misma extensión continua cuando $u \pm v = 0$.

$$\boxed{\Phi_Z(u, v) = \frac{e^{u+v} - 1}{u + v}\,\frac{e^{\,u-v} - 1}{u - v}}$$

30. Ejercicio 30

Sea (X, Y) un vector bidimensional con función de probabilidad

$$\mathbb{P}(X = m, Y = n) = \frac{1}{2^{m+n}}, \qquad m, n = 1, 2, \ldots$$

Calcule la función generatriz de momentos de $Z = (Z_1, Z_2)$, siendo

$$Z_1 = X + Y, \qquad Z_2 = X - Y.$$

Solución razonada

1) Identificación de la distribución

La función de probabilidad conjunta se factoriza:

$$\mathbb{P}(X = m, Y = n) = \frac{1}{2^m} \cdot \frac{1}{2^n}, \quad m, n \geq 1.$$

Luego X e Y son independientes y cada uno tiene

$$\mathbb{P}(X = m) = \frac{1}{2^m}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

(lo mismo para Y). Esto corresponde a una *Geométrica* desplazada (soporte $m \geq 1$) con parámetro $p = \frac{1}{2}$.

2) Función generatriz de momentos conjunta de (X, Y)

Por definición:

$$\Phi_{X,Y}(t_1, t_2) = \mathbb{E}[e^{t_1 X + t_2 Y}] = \left(\mathbb{E}[e^{t_1 X}]\right) \left(\mathbb{E}[e^{t_2 Y}]\right).$$

Para X:

$$\Phi_X(t) = \sum_{m=1}^{\infty} e^{tm} \frac{1}{2^m} = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{e^t}{2}\right)^m = \frac{e^t/2}{1 - e^t/2}, \qquad \text{si } e^t < 2.$$

Igual para Y. Entonces,

$$\Phi_{X,Y}(t_1, t_2) = \frac{\frac{e^{t_1}}{2}}{1 - \frac{e^{t_1}}{2}} \cdot \frac{\frac{e^{t_2}}{2}}{1 - \frac{e^{t_2}}{2}}.$$

3) Función generatriz de momentos de $Z = (Z_1, Z_2)$

Definimos:

$$\Phi_Z(u, v) = \mathbb{E}[e^{uZ_1 + vZ_2}] = \mathbb{E}[e^{u(X+Y) + v(X-Y)}].$$

Esto se simplifica:

$$u(X + Y) + v(X - Y) = (u + v)X + (u - v)Y.$$

Por tanto,

$$\Phi_Z(u, v) = \Phi_{X,Y}(u + v, u - v).$$

4) Expresión final

Sustituyendo:

$$\Phi_Z(u,v) = \frac{\frac{e^{u+v}}{2}}{1-\frac{e^{u+v}}{2}} \cdot \frac{\frac{e^{u-v}}{2}}{1-\frac{e^{u-v}}{2}}.$$

$$\boxed{\Phi_Z(u,v) = \dfrac{\dfrac{e^{u+v}}{2}}{1-\dfrac{e^{u+v}}{2}} \cdot \dfrac{\dfrac{e^{u-v}}{2}}{1-\dfrac{e^{u-v}}{2}}, \quad e^{u\pm v} < 2.}$$