Tema 5 - Ejercicios

Ejercicio 18

Dado el vector aleatorio (X, Y) cuya función de densidad conjunta es

$$f(x, y) = x + y \quad \text{si } 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \quad (0 \text{ en el resto}),$$

obtenga su covarianza y su coeficiente de correlación. ¿Son X e Y incorreladas? ¿e independientes?

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y, & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

1. Obtenga su covarianza y su coeficiente de correlación.
2. ¿Son X, Y incorreladas? ¿e independientes?

a) Cálculo de la covarianza

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$$

$$\mathbb{E}[XY] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyf(x, y)\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^1 xy(x + y)\, dy\, dx$$

$$\int_0^1 xy(x + y)\, dy = \int_0^1 (x^2y + xy^2)\, dy = \frac{x^2y^2}{2} + \frac{xy^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3}$$

$$\int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{3}\right) dx = \left(\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{6}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

Por tanto,

$$\mathbb{E}[XY] = \frac{1}{3}.$$

b) Cálculo de $\mathbb{E}[X]$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy = \int_0^1 (x + y)\, dy = x + \frac{1}{2}, \quad 0 < x < 1$$

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^1 x\left(x + \tfrac{1}{2}\right) dx = \int_0^1 \left(x^2 + \tfrac{x}{2}\right) dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}.$$

De igual forma,

$$f_Y(y) = \int_0^1 (x+y)\,dx = \frac{1}{2} + y, \quad 0 < y < 1$$

$$\mathbb{E}[Y] = \int_0^1 y\left(\tfrac{1}{2}+y\right)dy = \int_0^1 \left(\tfrac{y}{2}+y^2\right)dy = \left(\frac{y^2}{4}+\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{4}+\frac{1}{3} = \frac{7}{12}.$$

c) Covarianza

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{1}{3} - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{49}{144} = \frac{48}{144} - \frac{49}{144} = -\frac{1}{144}.$$

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X,Y) = -\tfrac{1}{144}}$$

d) Varianza de X

$$\sigma_X^2 = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_0^1 x^2 f_X(x)\,dx = \int_0^1 x^2\left(x+\tfrac{1}{2}\right)dx = \int_0^1 \left(x^3+\tfrac{x^2}{2}\right)dx$$

$$= \left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{6}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{4}+\frac{1}{6} = \frac{5}{12}.$$

$$\sigma_X^2 = \frac{5}{12} - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{5}{12} - \frac{49}{144} = \frac{60}{144} - \frac{49}{144} = \frac{11}{144}.$$

$$\sigma_X = \sqrt{\tfrac{11}{144}} \approx 0{,}2763.$$

e) Varianza de Y

De forma análoga,

$$\mathbb{E}[Y^2] = \int_0^1 y^2 f_Y(y)\,dy = \int_0^1 y^2\left(\tfrac{1}{2}+y\right)dy = \int_0^1 \left(\tfrac{y^2}{2}+y^3\right)dy$$

$$= \left(\frac{y^3}{6}+\frac{y^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{6}+\frac{1}{4} = \frac{5}{12}.$$

$$\sigma_Y^2 = \frac{5}{12} - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{11}{144}.$$

$$\sigma_Y = \sqrt{\tfrac{11}{144}} \approx 0{,}2763.$$

f) Coeficiente de correlación

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{-\frac{1}{144}}{\frac{11}{144}} = -\frac{1}{11}.$$

$$\boxed{\rho_{XY} = -\frac{1}{11}}$$

Conclusiones

- Como $\rho_{XY} \neq 0$, X e Y no son incorreladas.
- Como $f(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y)$, tampoco son independientes.

Ejercicio 19

Considérese dos v.a. X e Y con la siguiente distribución de probabilidad conjunta:

$Y \backslash X$	0	1	
0	a	b	$a+b$
1	c	d	$c+d$
	$a+c$	$b+d$	1

Demuestre que si son incorreladas son independientes.

Que sean incorreladas quiere decir que $\text{Cov}(X,Y) = 0$, pero esto no quiere decir que X e Y tengan que ser necesariamente independientes. Lo que se verifica en este problema es que:

$$\text{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 0$$

Si X e Y son incorreladas, entonces $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.

Cálculo de $\mathbb{E}[XY]$

$$\mathbb{E}[XY] = \sum_{x,y} xy \cdot P(X = x, Y = y) = 1 \cdot 1 \cdot d = d.$$

Distribución marginal de X

$$P(X = 0) = a + c, \quad P(X = 1) = b + d$$

$$\mathbb{E}[X] = 0 \cdot (a + c) + 1 \cdot (b + d) = b + d.$$

Distribución marginal de Y

$$P(Y = 0) = a + b, \quad P(Y = 1) = c + d$$

$$\mathbb{E}[Y] = 0 \cdot (a + b) + 1 \cdot (c + d) = c + d.$$

Condición de incorrelación

$$\text{Cov}(X, Y) = d - (b + d)(c + d) = 0. \tag{1}$$

Sabemos también que:

$$a + b + c + d = 1. \tag{2}$$

—

Condiciones de independencia

Para que X e Y sean independientes, ha de cumplirse:

$$P(X = 0, Y = 0) = a = P(X = 0)P(Y = 0) = (a + c)(a + b),$$

$$P(X = 0, Y = 1) = c = P(X = 0)P(Y = 1) = (a + c)(c + d),$$

$$P(X = 1, Y = 0) = b = P(X = 1)P(Y = 0) = (b + d)(a + b),$$

$$P(X = 1, Y = 1) = d = P(X = 1)P(Y = 1) = (b + d)(c + d).$$

—

Verificaciones

De (1) sabemos que

$$d = (b + d)(c + d).$$

1) Verificar $a = (a + b)(a + c)$. Como $a + b + c + d = 1 \Rightarrow a + b = 1 - (c + d)$, $a + c = 1 - (b + d)$.

Entonces:

$$(a + b)(a + c) = [1 - (c + d)][1 - (b + d)] = 1 - (b + d) - (c + d) + (b + d)(c + d).$$

Pero $(b + d)(c + d) = d$ (según (1)), así que:

$$(a + b)(a + c) = 1 - (b + d) - (c + d) + d.$$

Dado que $a + b + c + d = 1$, se cumple que $(a + b)(a + c) = a$.

2) Verificar $b = (a + b)(b + d)$. De forma análoga se llega a que también se cumple según (1).

3) Verificar $c = (a + c)(c + d)$. Se obtiene igualmente que se cumple con (1).

4) Verificar $d = (b + d)(c + d)$. Esto es justamente la propiedad (1).

—

Conclusión

Por tanto, si $\operatorname{Cov}(X,Y)=0$ se cumple la condición (1), y entonces también se cumplen las condiciones de independencia.

$$\boxed{\text{Si } X \text{ e } Y \text{ son incorreladas, entonces son independientes.}}$$

Ejercicio 22

Sean X, Y variables aleatorias independientes, con funciones de probabilidad:

$$P[X=x]=e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^x}{x!}, \quad x=0,1,2,\dots$$

$$P[Y=y]=e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^y}{y!}, \quad y=0,1,2,\dots$$

1. Obtenga la función generatriz de momentos de X y de Y.
2. Obtenga la esperanza y la varianza de X y de Y.
3. Obtenga la función generatriz de $Z=X+Y$.

a) Función generatriz de momentos

$$\varphi_X(t)=\mathbb{E}[e^{tX}]=\sum_{x=0}^{\infty}e^{tx}\,e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^x}{x!}=e^{-\lambda_1}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(e^t\lambda_1)^x}{x!}$$
$$=e^{-\lambda_1}\cdot e^{\lambda_1 e^t}=e^{\lambda_1(e^t-1)}.$$

De la misma forma:

$$\varphi_Y(t)=e^{\lambda_2(e^t-1)}.$$

b) Esperanza y varianza

$$\mathbb{E}[X]=\varphi_X'(0)=\lambda_1 e^{\lambda_1(e^t-1)}\cdot e^t\Big|_{t=0}=\lambda_1,$$

$$\mathbb{E}[Y]=\varphi_Y'(0)=\lambda_2.$$

$$\operatorname{Var}(X)=\varphi_X''(0)-(\mathbb{E}[X])^2.$$

Ahora,

$$\varphi_X''(t)=\lambda_1 e^t e^{\lambda_1(e^t-1)}(1+\lambda_1 e^t).$$

Evaluando en $t=0$:

$$\varphi_X''(0)=\lambda_1(1+\lambda_1).$$

$$\operatorname{Var}(X)=\lambda_1(1+\lambda_1)-\lambda_1^2=\lambda_1.$$

De la misma manera,

$$\operatorname{Var}(Y)=\lambda_2.$$

c) Generatriz de $Z = X + Y$

Como X y Y son independientes:

$$\varphi_Z(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t) = e^{\lambda_1(e^t-1)} \cdot e^{\lambda_2(e^t-1)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^t-1)}.$$

Por lo tanto, $Z \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Ejercicio 31

Sean (X, Y) v.a. con función de densidad conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

1. Obtenga su función generatriz.
2. Obtenga la función generatriz de $Z = X + Y$.

a) Función generatriz

$$\varphi_{(X,Y)}(s,t) = \mathbb{E}\left(e^{sX+tY}\right) = \int_0^1 \int_0^1 e^{sx+ty} f(x,y)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^1 e^{sx+ty}\, dy \right) dx.$$

Sea $w = ty \;\Rightarrow\; dw = t\, dy$:

$$\int_0^1 e^{sx+ty}\, dy = e^{sx} \int_0^1 e^{ty}\, dy = e^{sx} \cdot \frac{1}{t} \left[e^{ty}\right]_0^1 = \frac{1}{t} e^{sx}(e^t - 1).$$

Entonces:

$$\varphi_{(X,Y)}(s,t) = \frac{1}{t}(e^t - 1) \int_0^1 e^{sx}\, dx = \frac{1}{t}(e^t - 1) \cdot \frac{1}{s}(e^s - 1).$$

$$\Rightarrow \quad \varphi_{(X,Y)}(s,t) = \frac{1}{st}(e^s - 1)(e^t - 1), \quad \text{si } s \neq 0,\ t \neq 0.$$

b) Función generatriz de $Z = X + Y$

$$\varphi_Z(u) = \mathbb{E}[e^{uZ}] = \mathbb{E}[e^{u(X+Y)}] = \varphi_{(X,Y)}(u,u).$$

$$\varphi_Z(u) = \frac{1}{u^2}(e^u - 1)^2.$$

Ejercicio 32

Sea (X, Y) una v.a. bidimensional con función de probabilidad

$$P[X = m, Y = j] = \frac{1}{2^{m+j}}, \quad m = 1, 2, \ldots, \ j = 1, 2, \ldots$$

1. Obtenga la función generatriz de momentos.
2. Obtenga la función generatriz de $Z = X + Y$.
3. Obtenga la covarianza de X e Y.

a) Función generatriz de momentos

$$\varphi_{(X,Y)}(s, t) = \mathbb{E}\big(e^{sX+tY}\big) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} e^{sm+tj} P[X = m, Y = j].$$

$$\varphi_{(X,Y)}(s, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} e^{sm+tj} \frac{1}{2^{m+j}} = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(e^s/2)^m}{} \right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(e^t/2)^j}{} \right).$$

Reconocemos dos series geométricas (válidas si $|e^s/2| < 1$ y $|e^t/2| < 1$):

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{e^s}{2} \right)^m = \frac{e^s/2}{1 - e^s/2}, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{e^t}{2} \right)^j = \frac{e^t/2}{1 - e^t/2}.$$

Por tanto:

$$\varphi_{(X,Y)}(s, t) = \frac{e^s}{2 - e^s} \cdot \frac{e^t}{2 - e^t}, \quad s < \ln 2, \ t < \ln 2.$$

b) Función generatriz de $Z = X + Y$

$$\varphi_Z(u) = \mathbb{E}[e^{uZ}] = \mathbb{E}[e^{u(X+Y)}] = \varphi_{(X,Y)}(u, u).$$

$$\varphi_Z(u) = \left(\frac{e^u}{2 - e^u} \right)^2, \quad u < \ln 2.$$

c) Covarianza

$$\operatorname{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y].$$

$$\mathbb{E}[XY] = \frac{\partial^2 \varphi_{(X,Y)}(s, t)}{\partial s \, \partial t} \Big|_{s=0,t=0}.$$

Dado que

$$\varphi_{(X,Y)}(s, t) = \frac{e^s}{2 - e^s} \cdot \frac{e^t}{2 - e^t},$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \varphi_{(X,Y)}(s, t) = \left(\frac{2e^s}{(2 - e^s)^2} \right) \cdot \frac{e^t}{2 - e^t}.$$

$$\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\varphi_{(X,Y)}(s,t) = \frac{2e^s}{(2-e^s)^2} \cdot \frac{2e^t}{(2-e^t)^2}.$$

Evaluando en $(0,0)$:

$$\mathbb{E}[XY] = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{4}.$$

Ahora,

$$\mathbb{E}[X] = \frac{\partial}{\partial s}\varphi_{(X,Y)}(s,t)\Big|_{s=0,t=0} = \frac{2e^s}{(2-e^s)^2}\Big|_{s=0} \cdot \frac{1}{2-1}.$$

$$\mathbb{E}[X] = \frac{2}{4} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

De forma análoga,

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{2}.$$

Entonces:

$$\operatorname{Cov}(X,Y) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0.$$

$$\boxed{\operatorname{Cov}(X,Y) = 0}$$