DESCRIPTIVE STATISTICS

EXERCISE BOOKLET

EXPLORING DATA DISTRIBUTIONS & MEASURES

Ejercicio 26

Una urna contiene 3 bolas blancas y 5 bolas negras. Se extraen **dos** bolas **sin reemplazo**. Defina $X = \mathbf{1}\{1^{\underline{a}}$ extracción es blanca$\}$ y $Y = \mathbf{1}\{2^{\underline{a}}$ extracción es blanca$\}$.

a) Obtenga la distribución de probabilidad *conjunta* de (X, Y).

b) Obtenga las *marginales* de X y de Y.

c) Calcule $P(Y = 0 \mid X = 0)$, $P(Y = 1 \mid X = 0)$, $P(Y = 0 \mid X = 1)$, $P(Y = 1 \mid X = 1)$.

Solución

Con 3 blancas (B) y 5 negras (N), total 8 inicialmente:

$$P(X = 1) = \frac{3}{8}, \quad P(X = 0) = \frac{5}{8}.$$

Si $X = 1$ (salió blanca), quedan 2 B y 5 N (total 7):

$$P(Y = 1 \mid X = 1) = \frac{2}{7}, \quad P(Y = 0 \mid X = 1) = \frac{5}{7}.$$

Si $X = 0$ (salió negra), quedan 3 B y 4 N (total 7):

$$P(Y = 1 \mid X = 0) = \frac{3}{7}, \quad P(Y = 0 \mid X = 0) = \frac{4}{7}.$$

a) Conjunta de (X, Y).

$$P(0,0) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14}, \qquad P(0,1) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{56},$$
$$P(1,0) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{56}, \qquad P(1,1) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}.$$

b) Marginales.

$$P(X = 0) = \frac{35}{56}, \quad P(X = 1) = \frac{21}{56}, \qquad P(Y = 0) = \frac{35}{56}, \quad P(Y = 1) = \frac{21}{56}.$$

c) Condicionales.

$$P(Y = 0 \mid X = 0) = \frac{20/56}{35/56} = \frac{4}{7}, \quad P(Y = 1 \mid X = 0) = \frac{15/56}{35/56} = \frac{3}{7},$$
$$P(Y = 0 \mid X = 1) = \frac{15/56}{21/56} = \frac{5}{7}, \quad P(Y = 1 \mid X = 1) = \frac{6/56}{21/56} = \frac{2}{7}.$$

Ejercicio 27

Sea (X, Y) un par de variables aleatorias con soporte $X \in \{3, 6\}$ y $Y \in \{10, 14, 18\}$. La distribución conjunta es

	$Y = 10$	$Y = 14$	$Y = 18$	Suma fila
$X = 3$	0,25	0,15	k	
$X = 6$	0,10	0,05	0,13	
Suma col.				1

(1) Determine k para que sea una distribución válida.
(2) Calcule las marginales P_X y P_Y.
(3) Calcule $P(X \mid Y = 10)$ y $P(Y \mid X = 6)$.

Solución

1) Valor de k. La suma total debe ser 1:

$$0{,}25 + 0{,}15 + k + 0{,}10 + 0{,}05 + 0{,}13 = 1 \Rightarrow k = 1 - 0{,}68 = 0{,}32.$$

Tabla conjunta completa.

	$Y = 10$	$Y = 14$	$Y = 18$
$X = 3$	0,25	0,15	0,32
$X = 6$	0,10	0,05	0,13

2) Marginales.

$$P_X(3) = 0{,}25 + 0{,}15 + 0{,}32 = 0{,}72, \qquad P_X(6) = 0{,}10 + 0{,}05 + 0{,}13 = 0{,}28.$$

$$P_Y(10) = 0{,}25 + 0{,}10 = 0{,}35, \quad P_Y(14) = 0{,}15 + 0{,}05 = 0{,}20, \quad P_Y(18) = 0{,}32 + 0{,}13 = 0{,}45.$$

3) Condicionales.

$$P(X = 3 \mid Y = 10) = \frac{0{,}25}{0{,}35} = \frac{5}{7}, \qquad P(X = 6 \mid Y = 10) = \frac{0{,}10}{0{,}35} = \frac{2}{7}.$$

$$P(Y = 10 \mid X = 6) = \frac{0{,}10}{0{,}28} = \frac{5}{14}, \quad P(Y = 14 \mid X = 6) = \frac{0{,}05}{0{,}28} = \frac{5}{28}, \quad P(Y = 18 \mid X = 6) = \frac{0{,}13}{0{,}28} = \frac{13}{28}.$$

Resumen: $k = 0{,}32$; $P_X = \{0{,}72,\ 0{,}28\}$ para $x = 3, 6$; $P_Y = \{0{,}35,\ 0{,}20,\ 0{,}45\}$ para $y = 10, 14, 18$; $P(X \mid Y{=}10) = \{5/7,\ 2/7\}$; $P(Y \mid X{=}6) = \{5/14,\ 5/28,\ 13/28\}$.

Ejercicio 28

Sea (X, Y) un vector aleatorio discreto con

$$P\{X = i,\ Y = j\} = c\,(i + j), \qquad i = 1, 2, 3, 4,\ \ j = 1, 2, 3,$$

y $P\{X = i, Y = j\} = 0$ en otro caso.

a) Determine el valor de c.

b) Obtenga las distribuciones marginales de X y de Y.

c) Calcule $P(X = i \mid Y = j)$ y $P(Y = j \mid X = i)$.

d) ¿Son X y Y independientes? Justifique.

Solución

a) Cálculo de c.

$$1 = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} c(i + j) = c\sum_{i=1}^{4}\big[(i + 1) + (i + 2) + (i + 3)\big] = c\sum_{i=1}^{4}(3i + 6) = 54\,c,$$

de donde $\boxed{c = 1/54}$.

b) Marginales.

$$P_X(i) = \sum_{j=1}^{3}\frac{1}{54}(i + j) = \frac{3i + 6}{54} = \boxed{\frac{i + 2}{18}}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

$$P_Y(j) = \sum_{i=1}^{4}\frac{1}{54}(i + j) = \frac{10 + 4j}{54} = \boxed{\frac{5 + 2j}{27}}, \quad j = 1, 2, 3.$$

c) Condicionales.

$$P(X = i \mid Y = j) = \frac{P(i, j)}{P_Y(j)} = \frac{(i + j)/54}{(10 + 4j)/54} = \boxed{\frac{i + j}{10 + 4j}}.$$

$$P(Y = j \mid X = i) = \frac{P(i, j)}{P_X(i)} = \frac{(i + j)/54}{(3i + 6)/54} = \boxed{\frac{i + j}{3(i + 2)}}.$$

d) Independencia. Se requeriría $P(i, j) = P_X(i)P_Y(j)$ para todo i, j. Con $i = j = 1$:

$$P(1, 1) = \frac{2}{54} = \frac{1}{27}, \qquad P_X(1)P_Y(1) = \frac{3}{18}\cdot\frac{7}{27} = \frac{7}{162}.$$

Como $\dfrac{1}{27} \neq \dfrac{7}{162}$, X y Y **no** son independientes.

Ejercicio 29

La función de probabilidad conjunta de (X, Y) viene dada por:

$X\backslash Y$	0	1
0	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{18}$
1	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$

Obtenga:

a) Las funciones de probabilidad marginales de X e Y.

b) La función de distribución conjunta $F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$.

c) Las funciones de distribución marginales F_X y F_Y.

d) Pruebe que X e Y no son independientes.

Solución

a) Probabilidades marginales (pmf). Sumando por filas y columnas:

$$P_X(0) = P(0,0) + P(0,1) = \frac{2}{9} + \frac{5}{18} = \frac{1}{2}, \quad P_X(1) = \frac{5}{18} + \frac{2}{9} = \frac{1}{2},$$
$$P_Y(0) = P(0,0) + P(1,0) = \frac{2}{9} + \frac{5}{18} = \frac{1}{2}, \quad P_Y(1) = \frac{5}{18} + \frac{2}{9} = \tfrac{1}{2}.$$

b) Función de distribución conjunta $F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$. Como $X \in \{0, 1\}$ y $Y \in \{0, 1\}$, $F_{X,Y}$ es escalonada y queda:

$$F_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ o } y < 0, \\ \frac{2}{9}, & 0 \leq x < 1,\ 0 \leq y < 1, \\ \frac{1}{2}, & x \geq 1,\ 0 \leq y < 1, \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1,\ y \geq 1, \\ 1, & x \geq 1,\ y \geq 1. \end{cases}$$

c) Funciones de distribución marginales (CDF).

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \dfrac{1}{2}, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1, \end{cases} \qquad F_Y(y) = P(Y \leq y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ \dfrac{1}{2}, & 0 \leq y < 1, \\ 1, & y \geq 1. \end{cases}$$

d) No independencia. Si X e Y fuesen independientes, se cumpliría $P(0,0) = P_X(0)P_Y(0)$. Sin embargo,

$$P(0,0) = \frac{2}{9} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Por tanto, X e Y **no** son independientes.

Ejercicio 30

La variable aleatoria X toma los valores 0 y 1 con probabilidades 1/2 y 1/2, respectivamente. La variable aleatoria Y toma los valores 0 y 2 con probabilidades 1/3 y 2/3. Sea $p = P(X = 0, Y = 0)$. Determine, en función de p,

$$P(X = 0, Y = 2), \qquad P(X = 1, Y = 0), \qquad P(X = 1, Y = 2).$$

Solución

Escribimos la tabla conjunta con incógnitas y usamos que las sumas por filas y columnas deben coincidir con las marginales.

	$Y = 0$	$Y = 2$	$P(X)$
$X = 0$	p	a	$\frac{1}{2}$
$X = 1$	b	c	$\frac{1}{2}$
$P(Y)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	

De las sumas por fila:

$$p + a = \tfrac{1}{2} \;\Rightarrow\; a = \tfrac{1}{2} - p, \qquad b + c = \tfrac{1}{2} \;\Rightarrow\; c = \tfrac{1}{2} - b.$$

De las sumas por columna:

$$p + b = \tfrac{1}{3} \;\Rightarrow\; b = \tfrac{1}{3} - p.$$

Por tanto

$$c = \tfrac{1}{2} - \left(\tfrac{1}{3} - p\right) = \tfrac{1}{6} + p.$$

Comprobación con la columna $Y = 2$:

$$a + c = \left(\tfrac{1}{2} - p\right) + \left(\tfrac{1}{6} + p\right) = \tfrac{2}{3} = P(Y = 2).$$

Resultados en función de p:

$$\boxed{P(X = 0, Y = 2) = \tfrac{1}{2} - p}, \qquad \boxed{P(X = 1, Y = 0) = \tfrac{1}{3} - p}, \qquad \boxed{P(X = 1, Y = 2) = \tfrac{1}{6} + p}.$$

Para que todas sean probabilidades válidas se requiere $0 \leq p \leq \frac{1}{3}$ (lo demás queda automáticamente satisfecho).

Ejercicio 31

Sean X e Y variables aleatorias continuas con densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c\left(x^2+y^2\right), & 0<x<1, \quad 0<y<1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) Determine c.

b) Obtenga la función de distribución conjunta $F_{X,Y}(x,y) = P(X \le x,\ Y \le y)$.

c) Obtenga las densidades marginales f_X, f_Y y las condicionales $f_{X|Y}$, $f_{Y|X}$.

d) Calcule $P(X < \frac{1}{2},\ Y > \frac{1}{2})$.

e) ¿Son X e Y independientes?

Solución

a) Constante de normalización.

$$1 = \int_0^1\int_0^1 c(x^2+y^2)\,dy\,dx = c\int_0^1 \left(x^2+\frac{1}{3}\right)dx = c\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right) = c\cdot\frac{2}{3}.$$

De aquí, $\boxed{c = \frac{3}{2}}$.

b) Función de distribución conjunta. Para $0<x<1,\ 0<y<1$,

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_0^x\int_0^y \frac{3}{2}\,(u^2+v^2)\,dv\,du = \frac{3}{2}\int_0^x \left(u^2y+\frac{y^3}{3}\right)du = \frac{1}{2}\left(x^3y+x\,y^3\right).$$

Por extensión,

$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0, & x\le 0 \text{ o } y \le 0, \\ \frac{1}{2}(x^3y+x\,y^3), & 0<x<1,\ 0<y<1, \\ F_Y(y), & x \ge 1,\ 0<y<1, \\ F_X(x), & 0<x<1,\ y\ge 1, \\ 1, & x\ge 1,\ y \ge 1, \end{cases}$$

donde F_X y F_Y se dan abajo.

c) Marginales y condicionales.

$$f_X(x) = \int_0^1 \frac{3}{2}(x^2+y^2)\,dy = \frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}, \qquad 0<x<1,$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 \frac{3}{2}(x^2+y^2)\,dx = \frac{1}{2}+\frac{3}{2}y^2, \qquad 0<y<1.$$

Sus CDF marginales (para $0 < t < 1$) son

$$F_X(t) = \int_0^t \left(\frac{3}{2}u^2 + \frac{1}{2}\right) du = \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{2}t, \qquad F_Y(t) = \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{2}t.$$

Densidades condicionales, para $0 < x < 1$, $0 < y < 1$,

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{3}{2}(x^2+y^2)}{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}y^2} = \boxed{\frac{3}{1+3y^2}\,(x^2+y^2)},$$

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{3}{2}(x^2+y^2)}{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}x^2} = \boxed{\frac{3}{1+3x^2}\,(x^2+y^2)}.$$

d) Probabilidad $P(X < \frac{1}{2},\ Y > \frac{1}{2})$.

$$P = \int_0^{1/2}\int_{1/2}^1 \frac{3}{2}(x^2+y^2)\,dy\,dx = \frac{3}{2}\int_0^{1/2}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{7}{24}\right) dx = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{48} + \frac{7}{48}\right) = \boxed{\frac{1}{4}}.$$

e) Independencia. Si fuesen independientes, $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$. Sin embargo, por ejemplo en $x = y = \frac{1}{2}$,

$$f_{X,Y}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}, \qquad f_X\left(\frac{1}{2}\right)f_Y\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{7}{8}\right)\left(\frac{7}{8}\right) = \frac{49}{64}.$$

Como $\frac{3}{4} \neq \frac{49}{64}$, **no** son independientes.

Ejercicio 32

Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional con función de densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k\,(x+y), & 0 \le x \le 2,\quad 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Obtenga:

a) el valor de k;

b) la función de distribución conjunta $F_{X,Y}(x,y) = P(X \le x,\, Y \le y)$;

c) las densidades marginales f_X, f_Y;

d) las funciones de distribución marginales F_X, F_Y;

e) la densidad y la función de distribución de Y condicionadas a $X = x$;

f) ¿son X e Y independientes?

Solución

a) Normalización.

$$1 = \int_0^2 \int_0^1 k(x+y)\,dy\,dx = k\int_0^2 \Big(x+\tfrac{1}{2}\Big)\,dx = k\left[\tfrac{x^2}{2}+\tfrac{x}{2}\right]_0^2 = 3k \;\Rightarrow\; \boxed{k=\tfrac{1}{3}}.$$

b) Función de distribución conjunta. Para $0 \le x \le 2$ y $0 \le y \le 1$,

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_0^x \int_0^y \tfrac{1}{3}(u+v)\,dv\,du = \frac{1}{6}\big(x^2y + x\,y^2\big).$$

Extensión por tramos:

$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0, & x<0 \text{ o } y<0,\\ \tfrac{1}{6}(x^2y+x\,y^2), & 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 1,\\ F_Y(y), & x\ge 2,\ 0\le y\le 1,\\ F_X(x), & 0\le x\le 2,\ y\ge 1,\\ 1, & x\ge 2,\ y\ge 1,\end{cases}$$

o de forma compacta: $F_{X,Y}(x,y) = \dfrac{1}{6}\left((\text{mín}\{x,2\})^2\,\text{mín}\{y,1\} + \text{mín}\{x,2\}(\text{mín}\{y,1\})^2\right)$.

c) Densidades marginales.

$$f_X(x) = \int_0^1 \tfrac{1}{3}(x+y)\,dy = \tfrac{1}{3}\Big(x+\tfrac{1}{2}\Big), \quad 0\le x\le 2,$$

$$f_Y(y) = \int_0^2 \tfrac{1}{3}(x+y)\,dx = \tfrac{1}{3}\big(2+2y\big) = \tfrac{2}{3}(1+y), \quad 0\le y\le 1.$$

d) Funciones de distribución marginales. Para $0 \le x \le 2$,

$$F_X(x) = \int_0^x \left(\tfrac{u}{3}+\tfrac{1}{6}\right)du = \frac{x^2+x}{6}, \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x<0,\\ \tfrac{x^2+x}{6}, & 0\le x\le 2,\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}$$

Para $0 \le y \le 1$,

$$F_Y(y) = \int_0^y \tfrac{2}{3}(1+t)\,dt = \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}y^2, \qquad F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y<0,\\ \tfrac{2}{3}y+\tfrac{1}{3}y^2, & 0\le y\le 1,\\ 1, & y\ge 1.\end{cases}$$

e) Condicionales de Y dado $X = x$. Para $0 \le x \le 2$ y $0 \le y \le 1$,

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{1}{3}(x+y)}{\frac{1}{3}(x+\frac{1}{2})} = \boxed{\frac{x+y}{x+\frac{1}{2}}}, \qquad 0 \le y \le 1.$$

Su CDF condicional es

$$F_{Y|X}(y \mid x) = \int_0^y \frac{x+t}{x+\frac{1}{2}}\,dt = \boxed{\frac{x\,y+\frac{1}{2}y^2}{x+\frac{1}{2}}}, \quad 0 \le y \le 1.$$

f) Independencia. Si X e Y fuesen independientes, se tendría $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\,f_Y(y)$. Pero, por ejemplo, en $(x,y) = (0,0)$,

$$f_{X,Y}(0,0) = 0, \qquad f_X(0)f_Y(0) = \left(\tfrac{1}{6}\right)\left(\tfrac{2}{3}\right) = \tfrac{1}{9} \neq 0.$$

Por tanto, X e Y **no son independientes**.

Ejercicio 33

Sea

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x+y, & 0<x<1,\ 0<y<1, \\ 0, & \text{en el resto,} \end{cases}$$

la función de densidad conjunta de (X,Y).

a) Calcule las funciones de densidad marginales.

b) ¿Son X e Y independientes? Calcule las densidades condicionales.

Solución

Comprobación de normalización (opcional).

$$\int_0^1\int_0^1 (x+y)\,dy\,dx = \int_0^1 \left(x+\tfrac{1}{2}\right)dx = \left(\tfrac{x^2}{2}+\tfrac{x}{2}\right)\Big|_0^1 = 1.$$

a) Densidades marginales.

$$f_X(x) = \int_0^1 (x+y)\,dy = x + \frac{1}{2}, \qquad 0<x<1,$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 (x+y)\,dx = \frac{1}{2} + y, \qquad 0<y<1.$$

b) Independencia y densidades condicionales. Si X e Y fueran independientes, debería cumplirse $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = (x+\frac{1}{2})(y+\frac{1}{2})$, lo cual no coincide con $f_{X,Y}(x,y) = x+y$ (por ejemplo en $(0,0)$: $0 \neq \frac{1}{4}$). Por tanto, **X e Y no son independientes**.

Las densidades condicionales, para $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, son:

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{x+y}{y+\frac{1}{2}}, \qquad f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{x+y}{x+\frac{1}{2}}.$$

Ejercicio 34

Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional con función de densidad

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x+y}{210}, & 2 < x < 6, \quad 0 < y < 5, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Halle $P(X+Y > 4)$.

Solución

Primero puede comprobarse la normalización:

$$\int_2^6 \int_0^5 \frac{2x+y}{210}\, dy\, dx = \frac{1}{210} \int_2^6 (10x + 12{,}5)\, dx = \frac{160+50}{210} = 1.$$

El evento complementario es $\{X+Y \leq 4\}$, que dentro del rectángulo $2 < x < 6$, $0 < y < 5$ corresponde al triángulo

$$\mathcal{T} = \{(x,y) : 2 \leq x \leq 4,\ 0 \leq y \leq 4-x\}.$$

Por tanto,

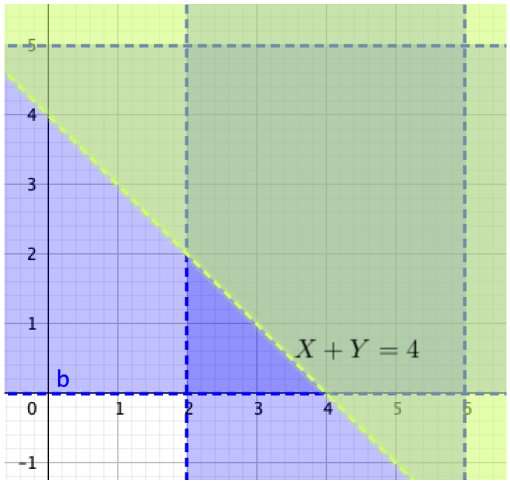
$$P(X+Y > 4) = 1 - P(X+Y \leq 4) = 1 - \iint_{\mathcal{T}} \frac{2x+y}{210}\, dy\, dx.$$

Integramos:

$$\begin{aligned} P(X+Y \leq 4) &= \frac{1}{210} \int_2^4 \left[2xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^{4-x} dx = \frac{1}{210} \int_2^4 \left(2x(4-x) + \frac{(4-x)^2}{2} \right) dx \\ &= \frac{1}{210} \int_2^4 \left(8 + 4x - \tfrac{3}{2}x^2\right) dx = \frac{1}{210} \left[8x + 2x^2 - \tfrac{1}{2}x^3\right]_2^4 = \frac{12}{210} = \frac{2}{35}. \end{aligned}$$

Luego

$$\boxed{P(X+Y > 4) = 1 - \frac{2}{35} = \frac{33}{35} \approx 0{,}942857}.$$



Ejercicio 35

La función de densidad conjunta de (X, Y) es

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & x > 0,\ y > 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Halle:

a) La función de distribución.

b) $P(X \leq 3,\ Y \leq 4)$.

c) Las densidades marginales de X e Y.

d) Las densidades condicionales.

e) ¿Son X e Y independientes?

f) Si X e Y representan ventas (en miles) de dos artículos A y B, calcule $P(X + Y > 10)$.

Solución

a) Función de distribución conjunta Para $x > 0,\ y > 0$,

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x,\ Y \leq y) = \int_0^x \int_0^y e^{-(u+v)}\, dv\, du = \left(1 - e^{-x}\right)\left(1 - e^{-y}\right).$$

Por tramos:

$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ o } y \leq 0, \\ (1 - e^{-x})(1 - e^{-y}), & x > 0,\ y > 0. \end{cases}$$

b) Probabilidad pedida

$$P(X \le 3,\ Y \le 4) = \big(1 - e^{-3}\big)\big(1 - e^{-4}\big).$$

c) Densidades marginales

$$f_X(x) = \int_0^{\infty} e^{-(x+y)}\,dy = e^{-x}, \quad x > 0; \qquad f_Y(y) = \int_0^{\infty} e^{-(x+y)}\,dx = e^{-y}, \quad y > 0.$$

Luego $X \sim \mathrm{Exp}(1)$ e $Y \sim \mathrm{Exp}(1)$.

d) Densidades condicionales

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{e^{-(x+y)}}{e^{-y}} = e^{-x}, \quad x > 0,$$

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{e^{-(x+y)}}{e^{-x}} = e^{-y}, \quad y > 0.$$

e) Independencia Como $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\,f_Y(y)$ (o equivalentemente $f_{X|Y} = f_X$), se concluye que X **e** Y **son independientes**.

f) Probabilidad $P(X+Y>10)$ Sea $S = X + Y$. Para suma de dos exponenciales independientes con tasa 1, $S \sim \mathrm{Gamma}(k=2,\ \lambda=1)$ con

$$F_S(s) = 1 - e^{-s}(1+s), \quad s \ge 0.$$

Por tanto la cola es

$$P(X+Y>10) = P(S>10) = e^{-10}(1+10) = \boxed{11\,e^{-10}} \approx 4{,}99 \times 10^{-4}.$$

Ejercicio 36

La función de densidad conjunta de (X,Y) es

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{96}, & 0 < x < 4,\quad 1 < y < 5, \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Calcule:

a) $P(1 < X < 2,\ 2 < Y < 3)$.

b) $P(X > 3,\ Y < 2)$.

c) $F(2,3) = P(X \le 2,\ Y \le 3)$.

Solución

Comprobación de normalización (opcional).

$$\int_0^4\int_1^5 \frac{xy}{96}\,dy\,dx = \frac{1}{96}\int_0^4 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_1^5 dx = \frac{1}{96}\int_0^4 x\cdot 12\,dx = \frac{12}{96}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 1.$$

a) $P(1<X<2,\ 2<Y<3)$**.**

$$P = \int_1^2\int_2^3 \frac{xy}{96}\,dy\,dx = \frac{1}{96}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2\left[\frac{y^2}{2}\right]_2^3 = \frac{1}{96}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2} = \boxed{\frac{5}{128}}.$$

b) $P(X>3,\ Y<2)$**.** En el soporte, $Y<2$ equivale a $1<y<2$.

$$P = \int_3^4\int_1^2 \frac{xy}{96}\,dy\,dx = \frac{1}{96}\left[\frac{x^2}{2}\right]_3^4\left[\frac{y^2}{2}\right]_1^2 = \frac{1}{96}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{3}{2} = \boxed{\frac{7}{128}}.$$

c) $F(2,3) = P(X\le 2,\ Y\le 3)$**.** Como la densidad es continua, da lo mismo $<$ que $\le$:

$$F(2,3) = \int_0^2\int_1^3 \frac{xy}{96}\,dy\,dx = \frac{1}{96}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2\left[\frac{y^2}{2}\right]_1^3 = \frac{1}{96}\cdot 2\cdot 4 = \boxed{\frac{1}{12}}.$$

Ejercicio 37

Sea (X,Y) una v.a. bidimensional discreta con función de probabilidad conjunta dada por

$X\backslash Y$	-2	1	2
-1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

y definimos dos nuevas v.a. $U=|X|$ y $V=Y^2$.

Pida: Obtenga la función de probabilidad de (U,V) y las funciones de probabilidad marginales de U y de V.

Solución

Los posibles valores son

$$U\in\{0,1\},\qquad V\in\{1,4\},$$

pues $U=|X|$ con $X\in\{-1,0,1\}$ y $V=Y^2$ con $Y\in\{-2,1,2\}$.

Conjunta de (U, V). Agrupamos probabilidades que inducen el mismo par (u, v):

$$\begin{aligned}
P(U{=}0, V{=}1) &= P(X{=}0, Y{=}1) = \tfrac{1}{12},\\
P(U{=}0, V{=}4) &= P(X{=}0, Y{=}-2) + P(X{=}0, Y{=}2) = \tfrac{1}{12} + 0 = \tfrac{1}{12},\\
P(U{=}1, V{=}1) &= P(X{=}-1, Y{=}1) + P(X{=}1, Y{=}1) = \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{3},\\
P(U{=}1, V{=}4) &= P(X{=}-1, Y{=}-2) + P(X{=}-1, Y{=}2) + P(X{=}1, Y{=}-2) + P(X{=}1, Y{=}2)\\
&= \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{12} = \tfrac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Tabla conjunta:

$U\backslash V$	1	4
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

(La suma total es $1/12 + 1/12 + 1/3 + 1/2 = 1$.)

Marginal de U.

$$P_U(0) = \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{12} = \boxed{\tfrac{1}{6}}, \qquad P_U(1) = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2} = \boxed{\tfrac{5}{6}}.$$

Marginal de V.

$$P_V(1) = \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{3} = \boxed{\tfrac{5}{12}}, \qquad P_V(4) = \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{2} = \boxed{\tfrac{7}{12}}.$$

Ejercicio 38

Se sabe que la función de probabilidad conjunta viene dada por

$$P(X = x,\ Y = y) = \frac{x\,(y+1)}{18}, \qquad x \in \{1, 2\},\ y \in \{0, 1, 2\}.$$

Tabla de probabilidades conjuntas

$X\backslash Y$	0	1	2	$P_X(x)$
1	$\frac{1}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$
2	$\frac{2}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{6}{18}$	$\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$
$P_Y(y)$	$\frac{3}{18} = \frac{1}{6}$	$\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$	$\frac{9}{18} = \frac{1}{2}$	1

a) Distribución de $S = X + Y$

Los valores posibles son $s \in \{1, 2, 3, 4\}$:

$$\begin{aligned}
P(S = 1) &= P(1, 0) = \tfrac{1}{18},\\
P(S = 2) &= P(1, 1) + P(2, 0) = \tfrac{2}{18} + \tfrac{2}{18} = \tfrac{4}{18} = \tfrac{2}{9},\\
P(S = 3) &= P(1, 2) + P(2, 1) = \tfrac{3}{18} + \tfrac{4}{18} = \tfrac{7}{18},\\
P(S = 4) &= P(2, 2) = \tfrac{6}{18} = \tfrac{1}{3}.
\end{aligned}$$

b) Independencia

Dado que

$$P(X = x, Y = y) = \frac{x(y+1)}{18} = \underbrace{\frac{x}{3}}_{=P_X(x)} \, \underbrace{\frac{y+1}{6}}_{=P_Y(y)},$$

se cumple que $P(X = x, Y = y) = P_X(x)\, P_Y(y)$ para todo (x, y). Por tanto:

$$\boxed{X \text{ e } Y \text{ son independientes.}}$$