Universidad de Murcia **Universidad Politécnica de Cartagena**

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
306 – MATEMÁTICAS II
PAU2025 - JUNIO

NOTA IMPORTANTE: Las cuestiones se pueden hacer en cualquier orden. En cada cuestión se debe hacer solo la opción A o la opción B. La elección de A o B puede cambiar de una cuestión a otra. Si se responden las 2 opciones de una cuestión, solo se corregirá la primera opción contestada. La puntuación máxima de cada cuestión es 2,5 puntos. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

CUESTIÓN 1 (a elegir entre 1A y 1B):

1A) Daniel quiere contratar a los músicos Darío, Hugo y José. El sueldo de Darío es el de Hugo multiplicado por un parámetro $m > 0$. El sueldo de Hugo es el doble del de José. La suma del sueldo de José multiplicado por m más el sueldo de Darío (sin multiplicar por m) más el sueldo de Hugo (sin multiplicar por m) es 600 €.

a) **[0,75]** Denotando por x el sueldo de Darío, por y el sueldo de Hugo y por z el sueldo de José, plantee un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas que represente los datos del ejercicio.

b) **[0,25]** Justifique que con estos datos se puede conocer el sueldo de cada uno (que solo dependerá de m).

c) **[1,5]** Calcule la expresión general de cada sueldo (en función de m), y lo que cobra cada uno para $m = 2$.

Solución:

a)
Sueldo de Darío: $x \Rightarrow x = my$
Sueldo de Hugo: $y \Rightarrow y = 2z$
Sueldo de José: z

El sistema es: $\left.\begin{array}{l} x+y+mz=600 \\ x=my \\ y=2z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2mz+2z+mz=600 \\ x=my \\ y=2z \end{array}\right\}$

b)
Si empleamos la primera ecuación y sacamos factor común z: $z(m+2m+2) = 600 \Rightarrow z = \dfrac{600}{3m+2}$ y esta solución siempre existe ya que al ser $m > 0 \Rightarrow 3m+2 \neq 0$

c)
Si $m = 2 \Rightarrow z = 75€, y = 150€, x = 300€$

1B) Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

a) **[1,25]** Compruebe que las matrices A y B son regulares (o invertibles) y calcule sus matrices inversas.

b) **[1,25]** Resuelva la ecuación $A^t X B = C$, donde A^t es la transpuesta de A.

Solución:

a) Una matriz es regular si y solo si su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \Rightarrow A \ es \ regular$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow B \ es \ regular$$

La expresión para calcular la matriz inversa de X es: $X = \dfrac{(AdjX)^t}{|X|}$

$$AdjA = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (AdjA)^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

$$AdjB = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (AdjB)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Como $A^t = A \Rightarrow (A^t)^{-1} = A^{-1}$ Despejando X, $X = A^{-1}CB^{-1}$

$$A^{-1}.C = \begin{pmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}.C.B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

CUESTIÓN 2 (a elegir entre 2A y 2B):

2A) Considere un triángulo rectángulo de catetos x e y cuya hipotenusa mide $7\sqrt{2}$ cm.

a) **[0,5]** Demuestre que su área viene dada por la expresión:

$$f(x) = \frac{1}{2} x \sqrt{98 - x^2}.$$

b) **[2]** Calcule las dimensiones que debe tener dicho triángulo para que su área sea la mayor posible. ¿Cuál es el valor de dicha área máxima?

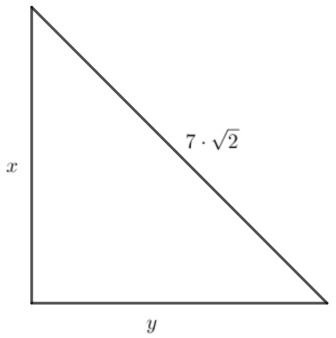
2B) Considere la función $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$.

a) **[1,5]** Calcule la integral indefinida $\int f(x)\, dx$.

b) **[1]** Compruebe que el área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX entre los valores $x = 1$ y $x = 2$ es $\ln\left(\frac{27}{16}\right)$.

Solución 2A:

a)



Según el Teorema de Pitágoras $x^2+y^2=\left(7\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow x^2+y^2=98 \Rightarrow y=\sqrt{98-x^2}$ (la raíz negativa de la ecuación de 2º grado no tiene sentido al tratarse del lado de un triángulo. El área del triangulo de la figura es $\dfrac{x.y}{2}=\dfrac{1}{2}x.y=\dfrac{1}{2}x.\sqrt{98-x^2}$. Por tanto la función que da el área en función del valor de los catetos es $f(x)=\dfrac{1}{2}x.\sqrt{98-x^2}$

b)

Si la función $f(x)=\dfrac{1}{2}x.\sqrt{98-x^2}$ tiene un máximo su derivada primera ha de ser cero, es decir $f'(x)=0 \Rightarrow \dfrac{1}{2}\sqrt{98-x^2}-\dfrac{1}{2}x\dfrac{2x}{2\sqrt{98-x^2}}=0 \Rightarrow \sqrt{98-x^2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{98-x^2}}=0 \Rightarrow 98-x^2-x^2=0 \Rightarrow x^2=49 \Rightarrow x=7$ Si hay un triángulo de área máxima sus catetos son $x=7,\ y=\sqrt{98-49}=7$ se trata de un triángulo rectángulo isósceles de catetos $x=y=7$. En este caso el área es $f(7)=\dfrac{1}{2}7.\sqrt{98-7^2}=\dfrac{49}{2}$

Solución 2B:

a)

$$\int \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)dx \begin{cases} u=\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) \Rightarrow du=\dfrac{x}{x+1}\dfrac{x-x-1}{x^2}dx \Rightarrow du=\dfrac{-1}{x(x+1)}dx \\ \text{dv=dx}\Rightarrow v=x \end{cases}$$

Aplicando el método de integración por partes $\displaystyle\int \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)dx = x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \int x\frac{-1}{x(x+1)}dx = x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)+\int\frac{1}{x+1}dx = x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)+\ln|x+1| \ + \ C$

b)

Área $=\displaystyle\int_1^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)dx = G(2)-G(1)$, siendo $G(x)=x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)+\ln|x+1| \Rightarrow$ $G(2)=2\ln\dfrac{3}{2}+\ln 3=\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)^2.3=\ln\dfrac{27}{4},\ G(1)=\ln 2+\ln 2=\ln 4$

Por tanto el área es $G(2)-G(1)=\ln\dfrac{27}{4}-\ln 4=\ln\left(\dfrac{27/4}{4}\right)=\ln\dfrac{27}{16}$

CUESTIÓN 3 (a elegir entre 3A y 3B):

Cuestión 3A:
Considere las rectas

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = 7 + 3\mu \\ y = -5 + \mu \\ z = 7 \end{cases}$$

1. **[0,5]** Compruebe que se cruzan.
2. **[1,5]** Halle la ecuación de la recta perpendicular a ambas.
3. **[0,5]** Calcule la distancia entre r y s.

Solución 3A:

1. Los vectores directores de las rectas son $\vec{v_r} = (0,1,1)$ *y* $\vec{v_s} = (3,1,0)$. Al no ser proporcionales $\vec{v_r} \neq k\vec{v_s},\ k \in \mathbb{R}$, las rectas no son paralelas.

Si las rectas se cortaran generarían el sistema :

$$\begin{cases} 7 + 3\mu = 1 \Rightarrow \mu = -2 \\ -5 + \mu = 5 + \lambda \Rightarrow -5 - 2 \neq 5 + 7 \Rightarrow r\ y\ s\ \textit{no se cortan.} \\ 7 = \lambda \end{cases}$$

Si las rectas ni son paralelas ni se cortan, entonces se cruzan.

2. La recta q perpendicular a ambas, cortará a r en un punto $P_r(1{,}5 + \lambda,\ \lambda)$ y cortará a s en $P_s(7 + 3\mu, -5 + \mu, 7)$, de modo que el vector director de la recta perpendicular será $\vec{v_q} = \overrightarrow{P_rP_s} = (6 + 3\mu, -10 + \mu - \lambda, 7 - \lambda)$. Este vector es perpendicular tanto a $\vec{v_r} = (0,1,1)$ *como a* $\vec{v_s} = (3,1,0) \Rightarrow \vec{v_r}.\vec{v_q} = 0, \vec{v_s}.\vec{v_q} = 0 \Rightarrow$. Se genera el sistema

$$\begin{cases} -10 + \mu - \lambda + 7 - \lambda = 0 \Rightarrow \mu - 2\lambda = 3 \Rightarrow \mu - 2\lambda = 3 \\ 18 + 9\mu - 10 + \mu - \lambda = 0 \Rightarrow 10\mu - \lambda = -8 \Rightarrow -20\mu + 2\lambda = 16 \end{cases}$$

Si sumamos las ecuaciones nos queda $-19\mu = 19 \Rightarrow \mu = -1 \Rightarrow -1 - 2\lambda = 3 \Rightarrow \lambda = -2$

La perpendicular común pasa por los puntos $P_r(1,3,-2)$ *y* $P_s(4,-6,7)$ el vector de la perpendicular común es $\vec{v_q} = \overrightarrow{P_rP_s} = (3,-9,-9) \equiv (1,-3,3)$. La ecuación de la perpendicular común tiene por vector director $(1,-3,3)$ y pasa por el punto $P_r(1,3,-2)$, su ecuación es: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-3}{-3} = \dfrac{z+2}{3}$

3. El módulo del vector $\vec{v_q} = (3,-9,9)$ es la distancia entre r y s, $d(r,s) = |\vec{v_q}| = \sqrt{3^2 + (-9)^2 + 9^2} = \sqrt{171}$

Cuestión 3B:

Considere los planos $\pi_1 : x - y + z = 0$ y $\pi_2 : x + y - z = 2$

1. **[1]** Calcule la ecuación paramétrica de la recta en la que se cortan π_1 y π_2.

2. **[0,75]** Halle la ecuación de la recta que pasa por $P(1,2,3)$ y no corta ni a π_1 ni a π_2.

3. **[0,75]** Calcule la proyección ortogonal de P en π_1.

Solución 3B:

1. Como $\dfrac{1}{1} \neq \dfrac{-1}{1} = \dfrac{1}{-1}$ los planos se cortan. Elegimos z como parámetro de modo que la ecuación paramétrica de la recta en donde se cortan los planos es:

$$\begin{cases} x - y = -z \\ x + y = z \end{cases}$$

Si sumamos estas ecuaciones $2x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = z$. La ecuación de la recta intersección es

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

2. El vector director $\vec{v}$ de la recta que nos piden es perpendicular a $n_{\pi_1} = (1,-1,1)$ y también lo es a $n_{\pi_2} = (1,1,-1)$, podemos tomar como vector director de la recta que nos piden $\vec{v} = n_{\pi_1} \wedge n_{\pi_2} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k} = (0,\ 2,\ 2) \equiv (0,\ 1,\ 1)$. La recta pedida es $\dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-3}{1}$

3. La proyección ortogonal de P en π_1 es el punto de intersección de la recta perpendicular al plano π_1 que pasa por P. Esta recta tiene como vector director $\vec{v} = n_{\pi_1} = (1,-1,1)$. Por tanto su ecuación es :

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

Para hallar la proyección ortogonal sustituimos las ecuaciones anteriores en el plano π_1 obteniendo la ecuación $1 + \lambda - 2 + \lambda + 3 + \lambda = 0 \Rightarrow 3\lambda = -2 \Rightarrow \lambda = \dfrac{-2}{3}$. La proyección ortogonal del punto P sobre el plano π_1 es $Q\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{8}{3}, \dfrac{7}{3}\right)$

CUESTIÓN 4 (a elegir entre 4A y 4B):

4A) Considere dos urnas, U_1 y U_2, tales que en U_1 hay 2 bolas rojas y 3 verdes, y en U_2 hay 6 bolas rojas y 3 verdes. El experimento aleatorio consiste en sacar una bola de U_1, depositarla en U_2 y, a continuación, sacar una bola de U_2. Calcule la probabilidad de que:

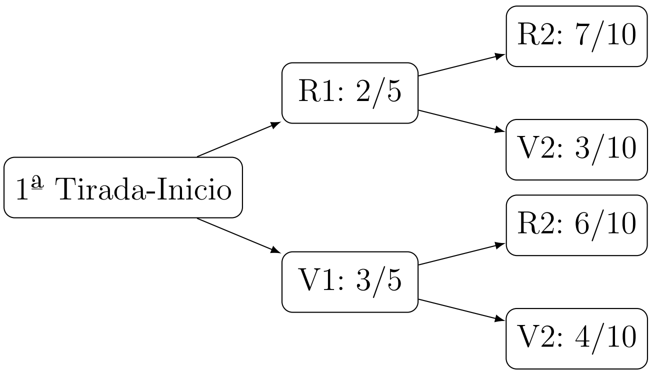
a) **[0,5]** Salga una bola roja en U_2 sabiendo que ha salido roja en U_1.

b) **[0,5]** Salga una bola verde en U_2 sabiendo que ha salido roja en U_1.

c) **[0,75]** Salga una bola verde en U_2.

d) **[0,75]** Haya salido roja en U_1 sabiendo que ha salido roja en U_2.

Solución 4A:



a) $P(R_2 \mid R_1) = \dfrac{7}{10}$

b) $P(V_2 \mid R_1) = \dfrac{3}{10}$

c) Cálculo de $P(V_2)$:

$$P(V_2) = P(R_1) \cdot P(V_2 \mid R_1) + P(V_1) \cdot P(V_2 \mid V_1)$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{10} + \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{10} = \frac{6}{50} + \frac{12}{50} = \frac{18}{50} = \frac{9}{25}$$

d) Aplicación del Teorema de Bayes:
La partición del espacio muestral en sucesos elementales es:

$$\Omega = \{R_1, V_1\}$$

$$P(R_1 \mid R_2) = \frac{P(R_2 \mid R_1) \cdot P(R_1)}{P(R_2 \mid R_1) \cdot P(R_1) + P(R_2 \mid V_1) \cdot P(V_1)}$$

$$P(R_1 \mid R_2) = \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{10}}{\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{10} + \frac{3}{5} \cdot \frac{6}{10}} = \frac{14}{50} \cdot \frac{1}{\frac{32}{50}} = \frac{7}{16}$$

4B) El 2 % de las piezas fabricadas por una máquina son defectuosas.

a) **[1]** Considere el número de piezas en buen estado de un lote de 10 piezas. Diga qué tipo de distribución de probabilidad es, indicando la media y la desviación típica. Calcule la probabilidad de que haya exactamente 1 pieza defectuosa.

b) **[1,5]** Considere el número de piezas en buen estado de un lote de 2000 piezas. Diga qué tipo de distribución de probabilidad es, indicando la media y la desviación típica. Calcule la probabilidad de que haya menos de 50 piezas defectuosas.

Solución:

El 2 % de las piezas fabricadas por una máquina son defectuosas.

Entonces, la probabilidad de que una pieza esté en buen estado es:

$$p = 0{,}98, \quad q = 0{,}02$$

Respuesta apartado a)

- **Distribución:** Binomial: $X \sim \mathcal{B}(n = 10, p = 0{,}98)$
- **Media:**
$$\mu = n \cdot p = 10 \cdot 0{,}98 = 9{,}8$$
- **Desviación típica:**
$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = \sqrt{10 \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}02} = \sqrt{0{,}196} \approx 0{,}4427$$
- **Probabilidad de que haya exactamente 1 pieza defectuosa (es decir, 9 en buen estado):**
$$P(X = 9) = \binom{10}{9} \cdot (0{,}98)^9 \cdot (0{,}02)^1 = 10 \cdot (0{,}83376) \cdot 0{,}02 \approx 0{,}1668$$

Respuesta: $\boxed{P(1 \text{ defectuosa}) \approx 0{,}1668}$

Respuesta apartado b)

- **Distribución:** Binomial $X \sim \mathcal{B}(n = 2000, p = 0{,}02)$, que se puede aproximar por una **normal**:
- **Media:**
$$\mu = n \cdot p = 2000 \cdot 0{,}02 = 40$$
- **Desviación típica:**
$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = \sqrt{2000 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}98} = \sqrt{39{,}2} \approx 6{,}26$$

- **Probabilidad de que haya menos de 50 piezas defectuosas:**

  Aplicando corrección de continuidad:

$$P(X < 50) \approx P(Y < 49{,}5), \quad Y \sim \mathcal{N}(40, 6{,}26)$$

$$Z = \frac{49{,}5 - 40}{6{,}26} \approx \frac{9{,}5}{6{,}26} \approx 1{,}518$$

$$P(Z < 1{,}518) \approx 0{,}9355$$

Respuesta: $\boxed{P(\text{menos de 50 defectuosas}) \approx 0{,}9355}$