Índice de Contenidos

Solución al examen Matemáticas CCSS
EBAU 10/9/2020 Murcia
Miguel Galo Fernández

1. Ejercicio 1

CUESTIÓN 1. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcule $(A-B)$ (0,5 puntos). $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

b) Calcule $(A-B)^{-1}$ (0,5 puntos). $\begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}$

c) Hallar la matriz X que verifica $AX-A=BX+B$ (1 punto). $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $A-B=C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}=-2\neq 0 \Rightarrow \exists C^{-1}=(A-B)^{-1}$

$C^{-1}=\dfrac{(Adj\ C)^t}{|C|}$, $Adj\ C=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $(Adj\ C)^t=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $C^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}$

c) $AX-A=BX+B \Rightarrow (A-B)X=A+B \Rightarrow X=(A-B)^{-1}(A+B)$ Sustituyendo los valores de las matrices obtenemos $X=\begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -0 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

2. Ejercicio 2

CUESTIÓN 2. (2 puntos) Sea S la región del plano definida por las inecuaciones:

$$S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, y\geq 2x-4,\ y\leq x-1,\ 2y\geq x,\ x\geq 0,\ y\geq 0\}$$

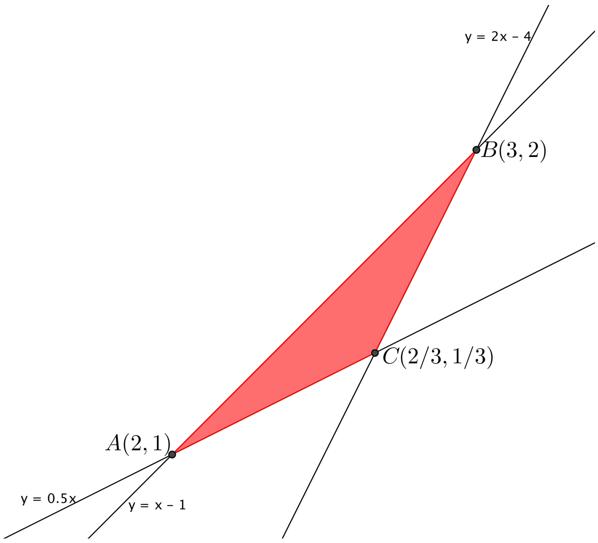
a) Representar la región S y obtener sus vértices.

b) Maximizar la función $f(x,y)=x-3y$ en S indicando los puntos de S donde se alcanza el máximo.

c) Minimizar la función $f(x,y)=x-3y$ en S indicando los puntos de S donde se alcanza el mínimo.

Solución:

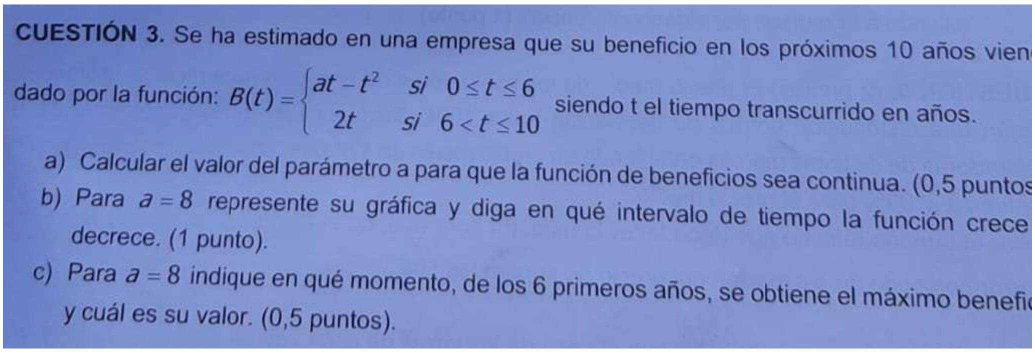
a) Dibujamos el recinto S para hallar sus vértices, el óptimo de una función en S se alcanza en los vértices de S.



b) $f(x) = x - 3y \begin{cases} \text{f(A)=-1} \\ \text{f(B)=-3} \\ \text{f(C)=}-\dfrac{1}{3} \end{cases}$ f alcanza un máximo en $C\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$

c) f alcanza un mínimo en $B\,(3, 2)$

3. Ejercicio 3



CUESTIÓN 3. Se ha estimado en una empresa que su beneficio en los próximos 10 años vien dado por la función: $B(t) = \begin{cases} at - t^2 & si \quad 0 \le t \le 6 \\ 2t & si \quad 6 < t \le 10 \end{cases}$ siendo t el tiempo transcurrido en años.

a) Calcular el valor del parámetro a para que la función de beneficios sea continua. (0,5 puntos
b) Para $a = 8$ represente su gráfica y diga en qué intervalo de tiempo la función crece decrece. (1 punto).
c) Para $a = 8$ indique en qué momento, de los 6 primeros años, se obtiene el máximo benefi y cuál es su valor. (0,5 puntos).

Solución:

a) El punto crítico es $t = 6$. Para que la función sea continua en este punto se han de cunplir estas tres condiciones:

i) $\exists B(6) = 6a - 36$

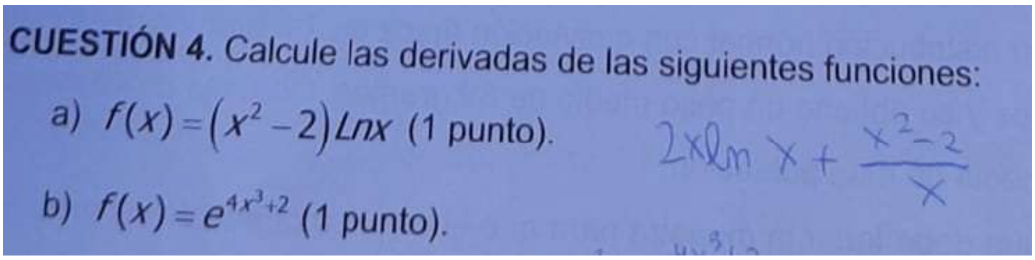
ii) $\exists \lim\limits_{t\to 6} B(t) \begin{cases} \lim\limits_{t\to 6^-} B(t) = 6a - 36 \\ \lim\limits_{t\to 6^+} B(t) = 12 \end{cases} \Rightarrow 6a - 36 = 12 \Rightarrow \boxed{a = 8}$

iii) $\lim\limits_{t\to 6} B(t) = B(6)$, que se cumple evidentemente si $a = 8$

b) Según observamos en la gráfica la función es creciente $\forall t \in (0,4) \cup (6,10)$ y es decreciente $\forall t \in (4,6)$

c) Si observamos la gráfica, el máximo beneficio se obtiene para t=10, y vale B(10)=20

4. Ejercicio 4



CUESTIÓN 4. Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = (x^2 - 2)Lnx$ (1 punto). $2x\ln x + \frac{x^2-2}{x}$

b) $f(x) = e^{4x^3+2}$ (1 punto).

Solución:

a) $f'(x) = xLnx + \dfrac{x^2-2}{x}$

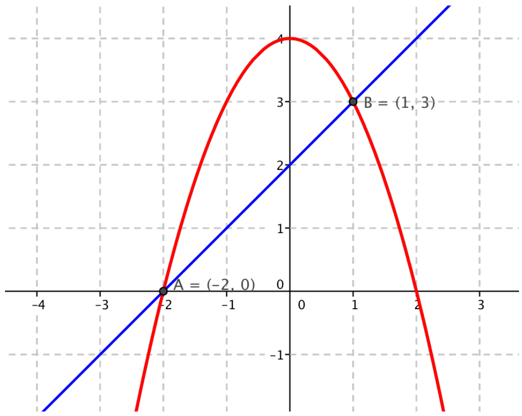
b) $12xe^{4x^3+2}$

5. Ejercicio 5

CUESTIÓN 5. (2 puntos) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por la parábola $f(x) = 4 - x^2$ y la recta $g(x) = 2 + x$. Calcular su área.

Solución:

a) La gráfica del recinto es la siguiente:



La figura nos informa que los puntos de corte de ambas gráficas son $A(-2, 0)$ y $B(1, 3)$. Para más seguridad las obtenemos de modo analítico. $4 - x^2 = 2 + x \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{-1 \pm 3}{2} \begin{cases} \text{x=1} \\ \text{x=-2} \end{cases}$

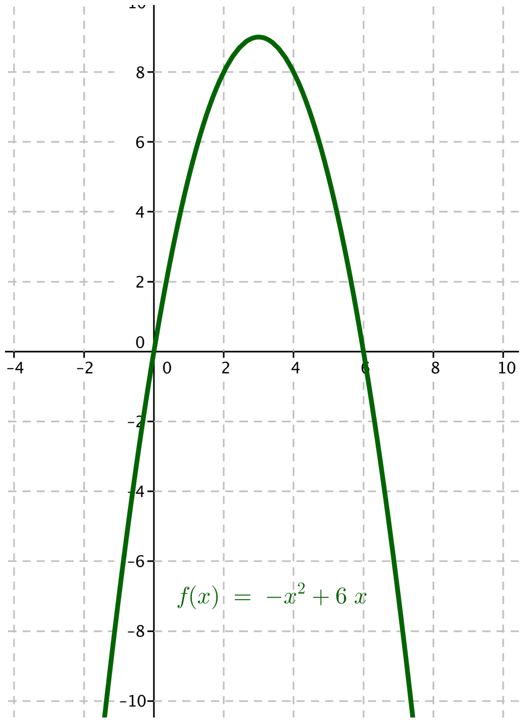
b) El área vale $A = \displaystyle\int_{-2}^{1} 4 - x^2 - (2 + x)dx = \int_{-2}^{1} -x^2 - x + 2dx = -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \Big|_{-2}^{1} =$
$= -\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2} + \cancel{2} + \dfrac{8}{3} - \cancel{2} + 4 = 4 + \dfrac{7}{3} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{24 + 14 - 3}{6} = \dfrac{35}{6}\ u^2$

6. Ejercicio 6

CUESTIÓN 6. (2 puntos) Calcular el área del recinto limitado por la parábola $f(x) = -x^2 + 6x$ y el eje OX. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

Solución:

La gráfica de la función se muestra a continuación, siendo los puntos de corte con el eje OX A(0,0) y B(6,0).



El área del recinto vale $A = \int_0^6 (-x^2+6x)dx = -\frac{x^3}{3} + 3x^2\Big|_0^6 = -\frac{216}{3} + 108 = 36\ u^2$

7. Ejercicio 7

CUESTIÓN 7. Entre los alumnos ERASMUS que han llegado este curso a la Universidad de Murcia el 75% hablan inglés, el 50% hablan francés y un 5% no hablan ninguno de estos dos idiomas. Elegido un alumno al azar:

a) Calcule la probabilidad de que hable inglés o francés. (0,5 puntos).

b) Calcule la probabilidad de que hable inglés y francés. (0,5 puntos).

c) Calcule la probabilidad de que, hablando inglés, no hable francés. (1 punto).

Solución:

Sean los sucesos I ≡habla inglés, F ≡ habla francés. Del enunciado obtenemos las siguientes probabilidades, $P(I) = 0'75$, $P(F) = 0'5$, $P(\overline{I} \cap \overline{F}) = 0'05$

a) La ley de Morgan establece que $P(\overline{I \cup F}) = P(\overline{I} \cap \overline{F}) = 0'05 \Rightarrow P(I \cup F) = 0'95$

b) Por los axiomas de Kolmogorov sabemos que $P(I \cup F) = P(I) + P(F) - P(I \cap F) \Rightarrow P(I \cap F) = P(I) + P(F) - P(I \cup F) \Rightarrow P(I \cap F) = 0'75 + 0'5 - 0'95 = 0'3$

c) $P(\overline{F}/I) = \frac{P(\overline{F} \cap I)}{P(I)} = \frac{P(I) - P(I \cap F)}{P(I)} = \frac{0'75 - 0'3}{0'75} = 0'6$

8. Ejercicio 8

CUESTIÓN 8. En una empresa multinacional el 60% de las reuniones se realizan a través de videoconferencia. El 40% de los empleados que asisten a estas videoconferencias son de países de la Unión Europea, mientras que en las reuniones presenciales solo el 20% son trabajadores que no pertenecen a la Unión Europea. Si elegimos un trabajador al azar:

a) Calcule la probabilidad de que pertenezca a la Unión Europea. (1 punto). 0,56

b) Sabiendo que el trabajador es de la Unión Europea, ¿Cuál es la probabilidad de que haya asistido a la reunión por videoconferencia? (1 punto). 0,4286

Solución:

Sean los sucesos V $\equiv$ asiste por videoconferencia, E $\equiv$ es ciudadano de la UE. Del texto del ejercicio se desprende que $P(V) = 0'6$, $P(V \cap E) = 0'4$, $P(\overline{V} \cap \overline{E}) = 0'2$

a) Por las Leyes de Morgan $P(\overline{V} \cap \overline{E}) = P(\overline{V \cup E}) = 0'2 \Rightarrow P(V \cup E) = 0'8$. Según los axiomas de Kolmogorov $P(V \cup E) = P(V) + P(E) - P(V \cap E) \Rightarrow P(E) = P(V \cup E) -$ $- P(V) + P(V \cap E) \Rightarrow P(E) = 0'8 - 0'6 + 0'4 = 0'6$

b) $P(V/E) = \dfrac{P(V \cap E)}{P(E)} = \dfrac{0'4}{0'6} = \dfrac{2}{3}$

9. Ejercicio 9

CUESTIÓN 9. (2 puntos) El precio medio de los aspiradores de una gran superficie se distribuye según una distribución normal de desviación típica 100€. Se toma una muestra aleatoria de 9 aspiradoras de distintas marcas obteniendo un precio medio de 178,89€. Determine un intervalo de confianza al 99% para el precio medio.

Hallar el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que, con un nivel de confianza del 99% el error cometido de estimación del precio no supere los 50€.

Solución:

a) El intervalo de confianza de la media viene dado por $I = \left(\mu - Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

Como $\mu = 178'89$, $\sigma = 100$, $n = 9 \Rightarrow I = \left(178'89 - 2'34 \cdot \dfrac{100}{3}, 178'89 - 2'34 \cdot \dfrac{100}{3}\right) =$ $= (100'89, 256'89)$. El valor de $Z_{\alpha/2} = Z_{0'005} = 2'34$ lo hemos obtenido de la tabla de la normal, teniendo en cuenta que $\alpha = 0'01 \Rightarrow \alpha/2 = 0'005$

b) El error cometido viene dado por la expresión $Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{234}{\sqrt{n}} \leq 50 \Rightarrow 4'68 \leq \sqrt{n} \Rightarrow$ $21'9 \leq n$. El tamaño mínimo de la muestra es $n = 22$ aspiradores

10. Ejercicio 10

CUESTIÓN 10. (2 puntos) Se sabe que el peso de los tarros de cacao de un supermercado es un variable aleatoria que sigue una distribución normal con desviación típica de 1,8 gramos. Se tom una muestra aleatoria de 9 tarros y se obtiene un peso medio de 89 gramos. Obtenga un interva de confianza, al 95%, para la media de esta población. (87,824 , 90,176)
¿Cuál será el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que el error cometido de estimac del peso no supere 1 gramo, a un nivel de confianza del 95%? 13

Solución:

Según nos indica el texto $\sigma = 1'8$, $\mu = 89$, $n = 9$, $\alpha = 0'05$. Calculamos $Z_{\alpha/2} = 1'96$ mirando en una tabla normal.

a) El intervalo de confianza de la media viene dado por $I = \left(\mu - Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, es decir $I = \left(89 - 1'96 \cdot \dfrac{0'6}{\sqrt{9}}, 89 + 1'96 \cdot \dfrac{0'6}{\sqrt{9}}\right) = (87'824, 90'176)$

b) El error viene dado por $E = Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1'96 \cdot \dfrac{1'8}{\sqrt{n}} \leq 1 \Rightarrow 1'96 \cdot 1'8 \leq \sqrt{n} \Rightarrow 3'528 \leq$ $\leq \sqrt{n} \Rightarrow 12'45 \leq n$ El tamaño mínimo de la muestra ha de ser 13.