Índice de Contenidos

Solución al examen EBAU 10/9/2020 Murcia

Miguel Galo Fernández

1. Ejercicio 1

1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 2 \\ x & - & ay & + & a^2z & = & -1 \\ -ax & + & a^2y & - & a^3z & = & 2 \end{array}\right.$$

a) **[1 p.]** Compruebe que el sistema nunca tiene solución única.

b) **[1 p.]** Determine para qué valores de a el sistema tiene infinitas soluciones.

c) **[0,5 p.]** Si es posible, resuélvalo para el valor de $a = 2$.

Solución:

a) La matriz ampliada es: $A|B = A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & \text{-a} & \text{a}^2 & \text{-1} \\ \text{-a} & \text{a}^2 & \text{-a}^3 & 2 \end{array}\right)$, para hallar su rango lo hacemos por el método de Gauss:

$$A|B = A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & \text{-a} & \text{a}^2 & \text{-1} \\ \text{-a} & \text{a}^2 & \text{-a}^3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & \text{1+a} & \text{1-a}^2 & 3 \\ 0 & \text{a+a}^2 & \text{a-a}^3 & \text{2a+2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & \text{1+a} & \text{1-a}^2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \text{-a+2} \end{array}\right)$$

- Si $-a+2 \neq 0 \Rightarrow a \neq 2$, entonces $Rango(A) = 2 \neq Rango(A|B) = 3$, se trata de un sistema incompatible que no tiene solución.
- Si $a = 2 \Rightarrow Rango(A) = Rango(A|B) = 2$, el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones.

b) El valor de a para que haya infinitas soluciones es $a = 2$

c) Para $a = 2$ el sistema es equivalente a $\left\{\begin{array}{ccccccc} \text{x} & + & \text{y} & + & \text{z} & = & 2 \\ & & \text{3y} & \text{-} & \text{3z} & = & 3 \end{array}\right. \Rightarrow y = 1 + z \Rightarrow$ $x = 1 - 2z$. La solución es:

$$\left\{\begin{array}{c} x = 1 - 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right. , \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

2. Ejercicio 2

2: Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) **[1 p.]** Calcule las potencias sucesivas A^2, A^3, A^4, A^5 y A^6.

b) **[1 p.]** Calcule A^{2020}.

c) **[0,5 p.]** Compruebe que la matriz A es regular (o inversible) y calcule su inversa.

Solución:

a) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

$A^5 = A^4 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$A^6 = A^5 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ (matriz identidad de orden 2)

b) Se tiene que $2020 = 36 \cdot 6 + 4 \Rightarrow A^{2020} = A^{36 \cdot 6+4} = (A^6)^{36} \cdot A^4 = I^{36} \cdot A^4 = A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

c) $|A| = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 3 = 1 \neq 0 \Rightarrow A$ es regular. La inversa de A se halla mediante la expresión $A^{-1} = \dfrac{Adj(A)^t}{|A|}$. La adjunta de A vale $Adj(A) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow Adj(A)^t =$
$= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

3. Ejercicio 3

3: Calcule los siguientes límites:

a) **[1,25 p.]** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(3+x) - \ln(3-x)}{2x}$.

b) **[1,25 p.]** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}\right)$.

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{Ln(3+x) - Ln(3-x)}{2x} = \dfrac{0}{0}$ indeterminación de L'Hôpital. Por tanto:

$$\lim_{x\to 0}\frac{Ln(3+x)-Ln(3-x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3+x}+\frac{1}{3-x}}{2}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}{2}=\frac{1}{3}$$

b) $\lim_{x\to 0}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2})=\infty-\infty$ indeterminado. Si multiplicamos y dividimos por el conjugado obtenemos $\lim_{x\to 0}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2})=\lim_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2})\cdot(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2})}=$
$\lim_{x\to 0}\dfrac{\cancel{x}+1-\cancel{x}-2}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2})}=\lim_{x\to 0}\dfrac{-1}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2})}=\dfrac{-1}{\infty}=0$

4. Ejercicio 4

4: a) **[2 p.]** Calcule la integral indefinida $\int \ln(1+x^2)\,dx$.

b) **[0,5 p.]** Calcule la integral definida $\int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx$.

Solución:

a) Aplicamos el método de integración por partes:

$$\int Ln(1+x^2)dx\left\{\begin{array}{l}\text{u=Ln(1+x}^2\text{)}\Rightarrow du=\dfrac{2x}{1+x^2}dx\\ \text{dv=dx}\Rightarrow v=x\end{array}\right\}=x\cdot Ln(x^2+1)-2\int\frac{x^2}{x^2+1}dx$$

$\displaystyle\int\frac{x^2}{x^2+1}dx=\int\frac{(1+x^2)-1}{1+x^2}dx=\int dx-\int\frac{1}{1+x^2}dx=x-arctgx+C$. Luego $\displaystyle\int Ln(1+x^2)dx=x\cdot Ln(x^2+1)-2x+2arctgx+C$, siendo C una constante real.

b) $\displaystyle\int_0^1 Ln(1+x^2)dx=xLn(1+x^2)-2x-2arctx\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}-2+Ln(2)$

5. Ejercicio 5

5: Considere los puntos $P=(5,6,1)$ y $Q=(-3,-2,5)$, y la recta

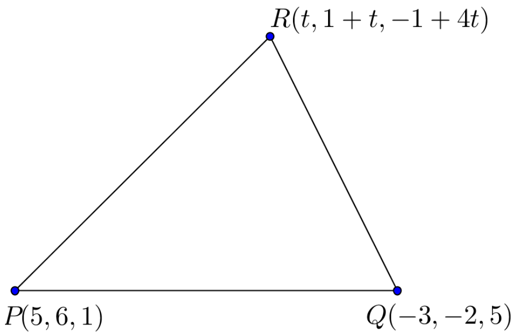
$$r:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{4}.$$

a) **[1,5 p.]** Determine el punto R de la recta r para el cual el área del triángulo $\widehat{PQR}$ es $18\sqrt{2}$ unidades cuadradas.

Observación: hay dos puntos R que son solución del apartado a); basta con encontrar uno de ellos.

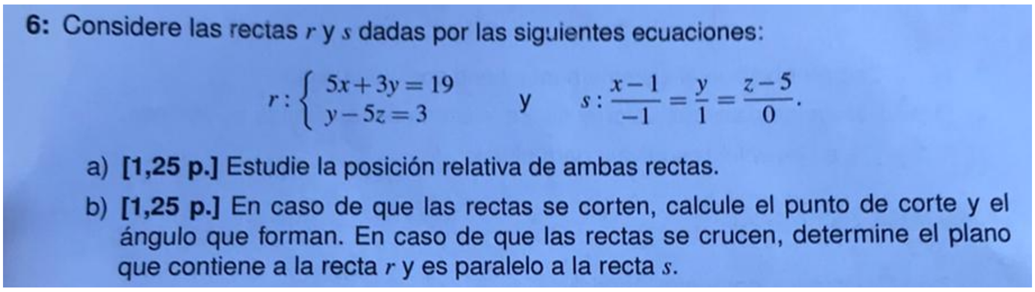
Solución:

Ponemos la recta r en paramétricas $r:\left\{\begin{array}{l}\text{x=t}\\ \text{y=1+t}\\ \text{z=-1+4t}\end{array}\right.$. El punto R tiene por coordenadas $(t,1+t,-1+4t)$



$\overrightarrow{PQ} = (-8, -8, 4)$, $\overrightarrow{PR} = (t-5, t-5, -2+4t)$ El área del triángulo viene dada por la expresión $A = \left|\frac{1}{2}|\overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PR}\right| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \text{-8} & \text{-8} & 4 \\ \text{t-5} & \text{t-5} & \text{-2+4t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \text{-4} & \text{-4} & 2 \\ \text{t-5} & \text{t-5} & \text{-2+4t} \end{vmatrix} =$
$= |(18-18t, -18+18t, 0)| = \sqrt{(18-18t)^2 + (-18+18t)^2} = (18-18t)\sqrt{2}$ (solo nos piden una de las soluciones). Como el valor del área es $18\sqrt{2} \Rightarrow (18-18t)\cancel{\sqrt{2}} = 18\cancel{\sqrt{2}} \Rightarrow t = 0$. El punto R que nos piden tiene coordenadas $R(0, 1, -1)$

6. Ejercicio 6



6: Considere las rectas r y s dadas por las siguientes ecuaciones:

$$r: \begin{cases} 5x+3y=19 \\ y-5z=3 \end{cases} \quad \text{y} \quad s: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-5}{0}.$$

a) **[1,25 p.]** Estudie la posición relativa de ambas rectas.

b) **[1,25 p.]** En caso de que las rectas se corten, calcule el punto de corte y el ángulo que forman. En caso de que las rectas se crucen, determine el plano que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s.

Solución:

a) Ponemos las rectas en paramétricas

$\left.\begin{array}{l} \text{5x+3y=19} \\ \text{y-5z=3} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{y=3+5z} \\ \text{x=2-3z} \end{array}\right.$ Las ecuaciones paramétricas de las rectas son:

$r: \begin{cases} \text{x= 2-3 } \lambda \\ \text{y=3+5 } \lambda \\ \text{z= } \lambda \end{cases}, \quad s: \begin{cases} \text{x= 1 - } \mu \\ \text{y= } \mu \\ \text{z= 5} \end{cases}$ Evidentemente las rectas no son paralelas ya que sus vectores directores $\vec{v}_r = (-3, 5, 1)$, $\vec{v}_s = (-1, 1, 0)$ no son proporcionales. Igualando las ecuaciones param.etricas generamos el sistema:

$\left.\begin{array}{ccccc} \mu & - & 3\lambda & = & -1 \\ \mu & - & 5\lambda & = & 3 \\ & & \lambda & = & 5 \end{array}\right\}$ Su matriz ampliada es $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -14 \end{array}\right)$ Según el Teorema de Rouché-Fröbenius, como $Rango(A) = 2 \neq Rango(A|B) = 3$ se trata de un sistema incompatible, no tiene solución por tanto las rectas no se cortan, como tampoco son paralelas, han de cruzarse.

b) El plano que nos piden contiene al punto $P(2{,}3{,}0)$ y a los vectores $\vec{v}_r = (-3, 5, 1)$ $\vec{v}_s = (-1, 1, 0)$ Su ecuación general viene dada por $\pi : \begin{vmatrix} \text{x-2} & \text{y-3} & \text{z} \\ \text{-3} & 5 & 1 \\ \text{-1} & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$. Desarrollando este determinante obtenemos la ecuación general del plano $\pi : x + y - 2z - 5 = 0$

7. Ejercicio 7

7: El peso de los recién nacidos, medido en kilogramos (kg), sigue una distribución normal de media $\mu = 2{,}8$ kg y desviación típica σ. Se sabe que solo el $20{,}05\,\%$ de ellos pesa más de 3 kg.

a) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que un recién nacido pese más de 2,6 kg?

b) **[1 p.]** Calcule la desviación típica de esta distribución normal.

c) **[1 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que un recién nacido pese menos de 2,9 kg?

Solución:

En primer lugar vamos a calcular σ. Sea X $\equiv$ peso de un niño. Del enunciado obtenemos que $P(X \geq 3) = 0'2005$. Si tipifica,os la variable llamando Z a la variable tipificada obtenemos $P(Z \geq \dfrac{3 - 2'8}{\sigma}) = 0'2005 \Rightarrow P(Z \leq \dfrac{0'2}{\sigma}) = 0'7995$. Si buscamos este valor en la tabla de la normal, $\dfrac{0'2}{\sigma} = 0'85 \Rightarrow \sigma = 0'2353$

a) $P(X > 2'6) = P(Z > \dfrac{2'6 - 2'8}{0'2353}) = P(Z > -0'85) = P(Z < 0'85) = 0'8023$

b) La desviación típica la hemos calculado al principio $\sigma = 0'2353$

c) $P(X < 2'9) = P(Z < \dfrac{0'1}{0'2353}) = P(Z < 0'42) = 0'6628$

8. Ejercicio 8

8: Dos urnas A y B contienen bolas de colores con la siguiente composición: La urna A contiene 3 bolas verdes, 4 negras y 3 rojas, y la urna B contiene 6 bolas verdes y 4 bolas negras. Además, se tiene un dado que tiene 2 caras marcadas con la letra A y 4 caras marcadas con la letra B. Se lanza el dado y se saca una bola al azar de la urna que indica el dado.

a) **[0,75 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea verde?

b) **[0,75 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea roja?

c) **[1 p.]** Si bola extraída es verde, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna B?

Solución:

Sea el suceso A$\equiv$ elegir, después de lanar el dado, la urna A. Sea el suceso B$\equiv$ elegir, después de lanar el dado, la urna B. V$\equiv$ extraer bola verde, N$\equiv$ obtener roja negra y R$\equiv$ sacar bola roja. Entonces el conjunto $\{A, B\}$ es una partición del espacio muestral en sucesos elementales, ya que $A \cup B = E$(suceso seguro) y $A \cap B = \emptyset$. Además $P(A) = \frac{2}{6}$, $P(B) = \frac{4}{6}$, $P(V/A) = \frac{3}{10}$, $P(N/A) = \frac{4}{10}$, $P(R/A) = \frac{3}{10}$, $P(V/B) = \frac{6}{10}$, $P(N/B) = \frac{4}{10}$ y $P(R/B) = 0$, todos estos resultados se extraen del enunciado del ejercicio.

a) Según el teorema de la probabilidad total $P(V) = P(A)P(V/A) + P(B)P(V/B) = = \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{10} + \frac{4}{6} \cdot \frac{6}{10} = \frac{1}{2}$

b) De nuevo por el teorema de la probabilidad total $P(R) = P(A)P(R/A) + P(B)\cancel{P(R/B)} = = \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{10}$

c) Por el Teorema de Bayes $P(B/A) = \frac{P(B)P(V/B)}{P(V)} = \frac{\frac{4}{\cancel{6}} \cdot \frac{\cancel{6}}{10}}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{5}$