

¿Cuál de los dos es el mayor e^π ó π^e ?

Consideremos la función : $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \rightarrow f(x) = \frac{\ln x}{x}$

Estudiamos la monotonía de esta función $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$. La función será creciente cuando $f'(x) > 0 \Rightarrow 1 - \ln x > 0 \Rightarrow \ln x < 1 \Rightarrow x < e$. Entonces:

- f es creciente en el intervalo $(0, e)$ y decreciente en $(e, +\infty)$. Sabemos que $e \simeq 2'718\dots$ y que $\pi \simeq 3'14159\dots$, por tanto $e, \pi \in (e, +\infty)$, como f es decreciente en $(e, +\infty)$, al ser $e < \pi \Rightarrow f(e) > f(\pi) \Rightarrow \frac{1}{e} > \frac{\ln \pi}{\pi} \Rightarrow \pi > e \cdot \ln \pi \Rightarrow \pi > \ln \pi^e \Rightarrow e^\pi > \pi^e$