Índice de Contenidos

Solución al examen Matemáticas CCSS
EBAU 8/7/2020 Murcia
Miguel Galo Fernández

1. Ejercicio 1

CUESTIÓN 1. (2 puntos) Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro a:

$$\left.\begin{aligned} x+ay+z&=1\\ 2y+az&=2\\ x+y+z&=1 \end{aligned}\right\}$$

Resolverlo para a=3.

Solución:

La matriz de los coeficientes es $A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a & 2 \\ 0 & \text{1-a} & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a & 2 \\ 0 & 0 & a^2-a & \text{2a-2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a & 2 \\ 0 & 0 & \text{a(a-1)} & \text{2(a-1)} \end{array}\right)$

- Si $a \neq 0, 1 \Rightarrow rango(A) = 3 = rango(A|B)$.
- Si $a = 0 \Rightarrow rango(A) = 2 \neq 3 = rango(A|B)$.
- Si $a = 1 \Rightarrow rango(A) = 2 = rango(A|B)$.

Aplicando el Teorema de Rouché-Fröbenius, la discusión del sistema queda resumida en la siguiente tabla:

a	Rango(A)	Rango($A|B$)	Sistema
$\neq 0,\ 1$	3	3	C.D
0	2	3	Incompatible
1	2	2	C.I

Para $a = 3$ sabemos que el sistema es CD (compatible determinado) según la tabla anterior. La matriz ampliada es equivalente a :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & 2y & + & 3z & = & 2 \\ & & & & 6z & = & 4 \end{array}\right\} \Rightarrow z = \frac{2}{3},\ y = 0,\ x = \frac{1}{3}$$

2. Ejercicio 2

CUESTIÓN 2. (2 puntos) La repoblación forestal de un bosque quemado en un gran incendio se va a llevar a cabo por dos empresas diferentes de jardinería. Hay que repoblar con pinos, eucaliptos y chopos. La primera empresa es capaz de plantar, en una semana, 30 pinos, 20 eucaliptos y 20 chopos. La segunda empresa planta 20 pinos, 30 eucaliptos y 20 chopos. El coste semanal se estima en 33.000€ para la primera empresa de jardinería y de 35.000€ para la segunda. Se necesita plantar un mínimo de 60 pinos, 120 eucaliptos y 100 chopos. ¿Cuántas semanas deberá trabajar cada grupo para finalizar el proyecto con el mínimo coste?

Solución:

La información que se obtiene del texto se resume en la siguiente tabla:

Empresa	Pinos	Eucaliptos	Chopos	Coste semana	Semanas
A	30	20	20	33	x
B	20	30	20	35	y

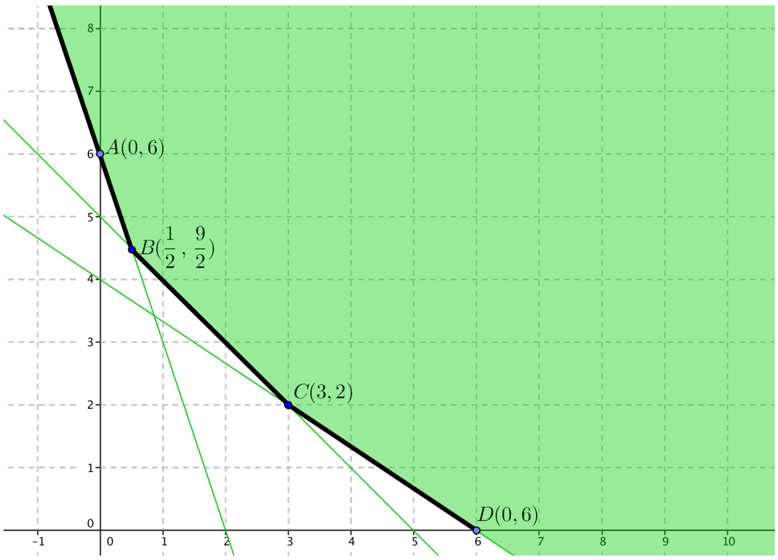
El coste semanal de cada empresa se da en miles de euros. Las restricciones son:

$30x + 20y \geq 60$

$20x + 30y \geq 120$

$20x + 20y \geq 100$

La región en verde es la intersección de la región que representan las inecuaciones anteriores. Sabemos que la función de coste $f(x, y) = 33x+35y$, que queremos minimizar, alcanza el óptimo en uno de los puntos de la poligonal ABCD.



Se tiene que $f(A) = 210$, $f(B) = 174$, $f(C) = 169$, $f(D) = 198$, el mínimo se alcanza en el punto C(3,2), debe trabajar 3 semanas la empresa A y 2 la empresa B.

3. Ejercicio 3

CUESTIÓN 3. (2 puntos) El beneficio semanal obtenido en una empresa de ordenadores viene dado para la función $B(x) = -2x^2 + 24x - 36$, donde x representa el número de ordenadores vendidos semanalmente. Calcular el número de ordenadores vendidos cada semana para que el beneficio sea máximo. ¿Cuál es este beneficio máximo?

Solución:

Para que la función $B(x)$ alcance un mínimo en el punto x_0 se ha de cumplir que $B'(x_0) = 0$ y que $B''(x_0) < 0$.

$B'(x) = -4x + 24 = 0 \Rightarrow x = 6$, $B''(x) = -4 \Rightarrow B''(6) = -4 < 0$, se alcanza un máximo en $x = 6$, ha de vender 6 ordenadores a la semana para alcanzar un beneficio máximo y el máximo beneficio es B(6)=108.

4. Ejercicio 4

CUESTIÓN 4. Sea la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$:

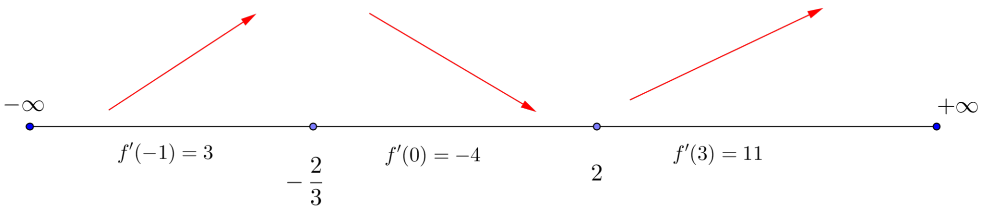
a) Determinar los valores de a y b de forma que la función tenga un extremo relativo en $x = 1$ y la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$ tenga de pendiente $m = -1$ (1 punto).

b) Si en la función anterior $a = -2$ y $b = -4$, determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función, así como sus extremos relativos (1 punto)

Solución:

a) Si f tiene un extremo en x=1 ha de ser $f'(1) = 0$, Como $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow f'(1) =$ $= 3 + 2a + b = 0 \Rightarrow \boxed{2a + b = -3}$. Si la pendiente en $x = 0$ es $m = -1 \Rightarrow f'(0) = b = -1 \Rightarrow$ $\boxed{b = -1}$. Luego $2a - 1 = -3 \Rightarrow \boxed{a = -1}$

b)$f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 1$. Para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento hemos de ver el signo de la derivada primera. $f'(x) = 3x^2 - 4x - 4$. Si igualamos a cero la derivada primera $3x^2 - 4x - 4 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 + 48}}{6} = \dfrac{4 \pm 8}{6} \Rightarrow x = 2,\ ó\ x = -\dfrac{2}{3}$



f es creciente $\forall x \in (-\infty, -\dfrac{2}{3}) \cup (2, +\infty)$

f es decreciente $\forall x \in (-\dfrac{2}{3}, 2)$

f alcanza extremos en los valores para los que $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{2}{3}$ ó $x = 2$ Como

$$f''(x) = 6x - 4 \Rightarrow \begin{cases} f''(-\frac{2}{3}) = -8 < 0 \\ f''(2) = 8 > 0 \end{cases}$$

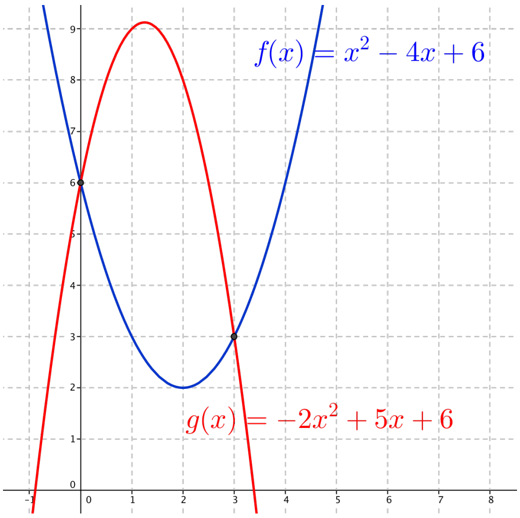
f alcanza un máximo en $x = -\dfrac{2}{3}$ y un mínimo en $x = 2$

5. Ejercicio 5

CUESTIÓN 5. (2 puntos) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por las parábolas $f(x) = x^2 - 4x + 6$ y $g(x) = -2x^2 + 5x + 6$. Calcular su área.

Solución:

Representamos gráficamente el recinto:



Según observamos en la figura los puntos de intersección entre las gráficas de las funciones son (0,6) y (3,3). Si queremos hallar estos puntos de forma algebraíca resolvemos la ecuación

$$x^2 - 4x + \cancel{6} = -2x^2 + 5x + \cancel{6} \Rightarrow 3x^2 - 9x = 0 \Rightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 6 \\ x = 3 \Rightarrow y = 3 \end{cases}$$

El área del recinto limitado por las dos parábolas es $\displaystyle\int_o^3 (-2x^2 + 5x + 6 - x^2 + 4x - 6)dx =$

$$= \int_o^3 (-3x^2 + 9x)dx = -x^3 + \frac{9}{2}x^2 \Big|_o^3 = -27 + \frac{81}{2} = \frac{27}{2}\ u^2$$

6. Ejercicio 6

CUESTIÓN 6. Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$:

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto $x = 1$ (1 punto).

b) Calcular el área de la región del plano limitado por la gráfica de la función $f(x)$ el eje OX y las rectas de ecuación $x = 0$ y $x = 1$. (1 punto).

Solución:

a) La ecuación de la recta tangente es $y - f(1) = f'(1)(x-1)$, $f(1) = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$. La derivada de la función vale $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(1) = -\dfrac{1}{(1+1)^2} = -\dfrac{1}{2}$. Por tanto la recta tangente es $y - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}(x-1) \Rightarrow \boxed{y = 1 - \dfrac{1}{2}x}$

b) El área la podríamos calcular directamente por medio de la expresión $\left| \displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{1+x} dx \right| = Ln(x+1)|_0^1 = Ln(2)\ u^2$

7. Ejercicio 7

CUESTIÓN 7. En una ferretería se encuentran mezclados 100 tornillos de color azul, 60 de color blanco y 40 de color rojo. La probabilidad de que un tornillo sea defectuoso es de 0,01 si es azul, 0,02 si es blanco y de 0,03 si es rojo. Un comprador elige un tornillo al azar:

a) Calcule la probabilidad de que el tornillo sea defectuoso. (1 punto)

b) Sabiendo que el tornillo es defectuoso, ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanco? (1 punto)

Solución:

De la lectura del enunciado se obtiene: A≡ tornillo azul, B≡ tornillo blanco, R≡ tornillo rojo, D≡ tornillo defectuoso, $P(A) = 0'5$, $P(B) = 0'3$, $P(R) = 0'2$, $P(D/A) = 0'01$, $P(D/B) = 0'02$, $P(D/R) = 0'03$. Sea X≡ extraer un tornillo. El conjunto $\{A, B, R\}$ es una partición del espacio muestral en sucesos elementales.

a) Según el Teorema de la probabilidad total $P(D) = P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) +$ $+ P(R) \cdot P(D/R) = 0'5 \cdot 0'01 + 0'3 \cdot 0'02 + 0'2 \cdot 0'03 = 17 \cdot 10^{-3}$

b) Según el Teorema de Bayes $P(B/D) = \dfrac{P(B) \cdot P(D/B)}{P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(R) \cdot P(D/R)} =$ $= \dfrac{6}{17}$

8. Ejercicio 8

CUESTIÓN 8. (2 puntos) Dado dos sucesos independientes A y B se conoce que $P(A) = 0,3$ y que $P(\overline{B}) = 0,4$. Calcular las siguientes probabilidades:

a) $P(A \cup B)$. (0,75 puntos)

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$. (0,5 puntos)

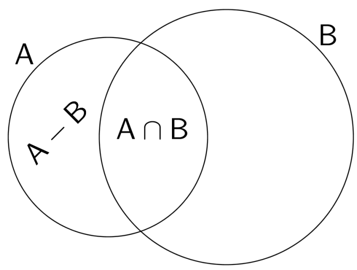
c) $P(A / \overline{B})$. (0,75 puntos)

Solución:

a) Se tiene que $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0'4 = 0'6$. Si los sucesos A y B son independientes se verifica que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0'3 \cdot 0'6 = 0'18$. La probabilidad de la unión de dos sucesos se calcula mediante la expresión $P(A) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0'3 + 0'6 - 0'18 = 0'72$.

b) Según las leyes de Morgan $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0'72 = 0'28$

c)



Según se observa en la figura los sucesos $A - B$ y $A \cap B$ son incompatible y además $A = (A - B) \cup (A \cap B)$. Por tanto $P(A) = P(A - B) + P(A \cap B) \Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) =$ $= 0'3 - 0'18 = 0'12$, pero $A - B = A \cap \overline{B} \Rightarrow P(A \cap \overline{B}) = 0'12$. Si aplicamos la definición de probabilidad condicionada $P(A/\overline{B}) = \dfrac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \dfrac{0'12}{0'4} = 0'3$

9. Ejercicio 9

CUESTIÓN 9. Se ha estimado que el consumo medio de gasolina de los automóviles de un concesionario se distribuye según una distribución normal con una desviación típica de 0,5 litros. Se han probado 10 automóviles, elegidos aleatoriamente, de este concesionario por conductores con la misma forma de conducir y en carreteras similares, obteniendo un consumo medio de 6,5 litros por cada 100km.

a) Determine un intervalo de confianza, al 95% de confianza, para la media del gasto de gasolina de estos vehículos. (1,25 puntos)

b) Hallar el tamaño mínimo que debe tener la muestra para que, con un nivel de confianza del 95%, el error cometido del consumo de gasolina sea inferior a 0,2. (0,75 puntos)

Solución:

a) El grado de significación es $\alpha = 0'05$, el intervalo de confianza que nos piden viene dado por la expresión $I = \left(\overline{x} - z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \ , \ \overline{x} + z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, donde $n = 10$, $\overline{x} = 6'5$, $\sigma = 0'5$. Si buscamos en una tabla de la distribución normal $z_{\alpha/2} = 1'96$. Entonces el intervalo de confianza es $I = (6'19, 6'81)$

b) El error cometido viene dado por la expresión $E = z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \left(\dfrac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2$. Sustituyendo valores obtenemos que el tamaño de la muestra es $n = 25$

10. Ejercicio 10

CUESTIÓN 10. En un laboratorio farmacéutico se analiza el PH de una solución y se supone que este sigue una distribución normal con una desviación típica de 0,02. Con un ensayo de 6 mediciones de la misma solución se obtuvo un PH medio de 7,91.

a) Determine un intervalo de confianza al 95% para la media de todas las determinaciones de PH de la misma solución obtenida por el mismo método. (1,25 puntos)

b) Con el mismo nivel de confianza anterior, ¿cuál será el tamaño mínimo de la muestra para que el error cometido sea inferior a 0,01? (0,75 puntos)

Solución:

a) Este ejercicio es una repetición del anterior. El intervalo de confianza viene dado por la expresión $I = \left(\overline{x} - z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \ , \ \overline{x} + z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, pero en este caso $n = 6$, $\overline{x} = 7'91$, y $\sigma = 0'07$. Como en el caso anterior $z_{\alpha/2} = 1'96$. El intervalo es $I = (7'85, 7'97)$.

b) El error cometido viene dado por la expresión $E = z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \left(\dfrac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2$. Sustituyendo valores obtenemos que el tamaño de la muestra es $n = 15$