EBAU EXTREMADURA
Curso 2019/2020

Miguel Galo Fernández

EBAU 2020

Índice de Contenidos

1. Primera Pregunta

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad (EBAU)

Universidad de Extremadura

Curso 2019-2020

Materia: **Matemáticas II** Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN. El examen consta de **10 preguntas**, cuyo valor es de **2 puntos cada una**. El estudiante ha de elegir 5 preguntas.

Observación importante: En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen solo se tendrán en cuenta las cinco primeras preguntas respondidas. Se seguirá el orden en el que las respuestas aparezcan desarrolladas por el estudiante. Si se desea que alguna de ellas no sea tenida en cuenta, el estudiante ha de tacharla y dejarlo claramente indicado. En ese caso, además de las cuatro primeras preguntas sin tachar, se corregiría la que ocupe el siguiente lugar. **Justificar** las respuestas.

PREGUNTAS

1. Dada la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ 2 & -k & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

   a) Estudie los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los que la matriz tiene inversa. (1 punto)

   b) Calcule la inversa para $k = 1$. (1 punto)

Solución:

a) Para que la matriz sea singular (para que no tenga inversa) su determinante ha de ser nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & k \\ 2 & -k & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k^2 - k - 2 = 0 \Rightarrow k = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow k = 2 \text{ ó } k = -1$$

La matriz tiene inversa $\forall k \neq 2, \ -1$.

b) Para $k = 1$ la matriz es A= $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y su inversa viene dada por la expresión $A^{-1} = \frac{(Adj\, A)^T}{|A|}$. Calculamos la matriz adjunta de A:

$$\text{Adj A}= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la traspuesta de la adjunta $(Adj\ A)^T = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y como $|A| = -2$, finalmente tenemos que:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3/2 & 1 & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

2. Segunda Pregunta

2. Discuta en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} x & + & \lambda y & - & z & = 1 \\ -\lambda x & + & y & & & = \lambda \\ & & (\lambda+3)\, y & - & 2z & = 4 \end{array}\right\}$$

Solución:

La matriz ampliada es $A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & \text{-1} & 1 \\ \text{- }\lambda & 1 & 0 & 1 \\ \text{o} & \lambda+3 & \text{-2} & 4 \end{array}\right)$

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes $|A| = \left|\begin{array}{ccc} 1 & \lambda & \text{-1} \\ \text{- }\lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda+3 & \text{-2} \end{array}\right| =$
$= -\lambda^2+3\lambda-2$ e igualamos a cero este determinante, obteniendo la ecuación $\lambda^2-3\lambda+2=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \lambda = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \dfrac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow \lambda = 1$ *ó* $\lambda = 2$. Para $\lambda \neq 1,\ 2$ se tiene que rango (A) $=$
=rango $(A|B) = 3$ y según el Teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado con solución única.

Para $\lambda = 1$ la matriz ampliada es $A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \text{-1} & 1 \\ \text{- 1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & \text{-2} & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \text{-1} & 1 \\ 0 & 2 & \text{-1} & 2 \\ 0 & 4 & \text{-2} & 4 \end{array}\right) \sim$
$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \text{-1} & 1 \\ 0 & 2 & \text{-1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ rango (A) $=$ rango $(A|B) = 2 \neq 3$, de nuevo según el Teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado con infinitas soluciones.

Para $\lambda = 2$ la matriz ampliada es $A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \text{-1} & 1 \\ \text{- 2} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & \text{-2} & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \text{-1} & 1 \\ \text{- 0} & 5 & \text{-2} & 1 \\ 0 & 5 & \text{-2} & 4 \end{array}\right) \sim$
$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \text{-1} & 1 \\ \text{- 0} & 5 & \text{-2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow$ rango (A) $= 2 \neq$ rango $(A|B) = 3$, según el Teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es incompatible y no tiene solución.

3. Tercera Pregunta

3. Sean el plano Π de ecuación $2x+y-z-2=0$ y la recta r dada por $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z-1}{3}$.

a) Estudie la posición relativa de la recta respecto del plano.

b) Calcule la distancia de la recta al plano.

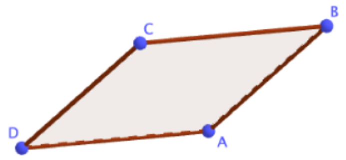
Solución:

a) El vector normal al plano es $\vec{n} = (2, 1, -1)$, el vector director de la recat es $\vec{v} = (3, -3, 3)$ y el punto de la recta es $P(0, 2, 1)$. Como el producto escalar del vector normal y el vector director es cero $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow$ la recta y el plano son paralelos.

b)La distancia entre la recta y el plano vale $d(r, \pi) = d(P, \pi) = \dfrac{|2 - 2 - 1 - 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{6}} =$
$= \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

4. Cuarta Pregunta

4. Tres vértices consecutivos de un paralelogramo son $A(1, 3, -2)$, $B(4, 3, 1)$ y $C(1, 0, 1)$ como podemos observar en la siguiente representación:



a) Calcule el cuarto vértice D.
b) Calcule el área del paralelogramo.

Solución:

a) La recta r, paralela a la que pasa por CB, que pasa por A tiene como vector director $\overrightarrow{CB} = (3, 3, 0)$, por tanto $r : \begin{cases} \text{x=1+3t} \\ \text{y=3+3t} \\ \text{z=-2} \end{cases}$. La recta que s paralela a la que pasa por AB, que contiene al punto C, tiene como vector director $\overrightarrow{AB} = (3, 0, 3)$. Por tanto $s : \begin{cases} \text{x=1+3k} \\ \text{y=0} \\ \text{z=1+3k} \end{cases}$. El punto D es la intersección de las rectas r y s. Vamos a calcularlo.

$$\begin{array}{lcll} 1 + 3t = 1 + 3k & & t - k = 0 & \\ 3 + 3t = 0 & \Rightarrow & t = -1 & \text{Luego } D(-2, 0, -2) \\ -2 = 1 + 3k & & k = -1 & \end{array}$$

b) El área del paralelogramo viene dada por $A = |\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}| = \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \text{-3} & \text{-3} & 0 \\ \text{-3} & 0 & \text{-3} \end{vmatrix} \right| = |9\vec{i} -$
$- 9\vec{j} - 9\vec{k}| = 9 \cdot \sqrt{3}\ u^2$

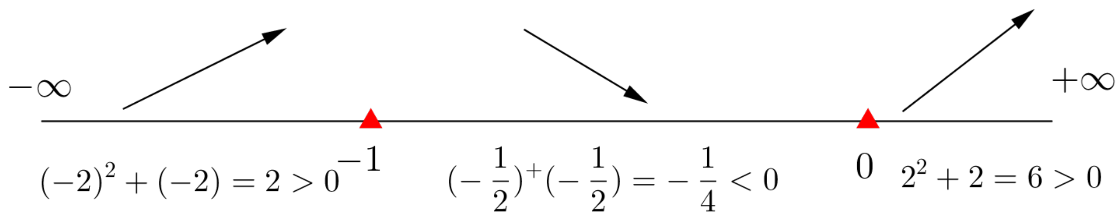
5. Quinta Pregunta

5. a) Estudie la monotonía (crecimiento y decrecimiento) y los extremos relativos (máximos y mínimos) de la función $f(x) = e^x\,(x^2 - x + 1)$.

b) Justifique si existe algún valor de x tal que $f(x) = 2$.

Solución:

a) Si $f'(x) > 0 \Rightarrow$ f es creciente. $f'(x) = e^x(x^2 - x + 1) + e^x(2x - 1) = e^x(x^2 + x)$ Si ha de ser positiva $f'(x)$, como e^x siempre es positiva, ha de serlo $(x^2 + x)$, $x^2 + x = 0 \Rightarrow (x(x+1) = 0 \Rightarrow x = 0$ *ó* $x = -1$



f es creciente en $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$, y es por tanto decreciente en $(-1, 0)$. Para hallar los extremos relativos de la función aplicamos la condición necesaria de extremo $f'(x) = 0 \Rightarrow e^x(x^2 + x) = 0 \Rightarrow x = -1$ *ó* $x = 0$. Como $f''(x) = e^x(x^2 + 3x + 1)$ si aplicamos la condición suficiente de extremo $f''(-1) = -\dfrac{1}{e} < 0$ se alcanza un máximo en $x = -1$ y el punto máximo es $\left(-1, \dfrac{3}{e}\right)$, $f''(0) = e > 0$ se alcanza un mínimo en $x = 0$ y el punto mínimo es $(0, e)$

b) Consideremos la función $g(x) = e^x(x^2 - x + 1) - 2$. Entonces $g(0) = -1$ y $g(1) = e - 2 \simeq 0'73$. Consideremos ahora la función g restringida al intervalo cerrado $[0, 1]$, es decir

$$\begin{array}{lccl} \text{g:} & [0,1] & \longrightarrow & \mathrm{R} \\ & \text{x} & \longrightarrow & \text{g(x)= e}^x(x^2 - x + 1) - 2 \end{array}$$

. Esta función cumple las siguientes propiedades:

i Es continua en $[0, 1]$.

ii toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo $[0, 1]$.

Aplicando el teorema de Bolzano a la función g $\exists \xi \in (0, 1)$ tal que $g(\xi) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow e^\xi(\xi^2 - \xi + 2) - 2 = 0 \Rightarrow e^\xi(\xi^2 - \xi + 2) = 2$

6. Sexta Pregunta

6. Considere la función $f(x)$, donde $a \in \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - e^x}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ a & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

a) Calcule el valor de a para que la función sea continua.

b) Calcule la ecuación de la recta tangente en $x = 1$.

Solución:

a) El punto crítico en la continuidad es $x = 0$. Para que f sea continua en $x = 0$ ha de verificar las siguientes propiedades:

i) $\exists f(0) = a$

ii) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-e^x}{x} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-e^x}{1} = -1$

iii) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) \Rightarrow a = -1$

Calculamos la derivada de la función en $x = 1$, $f'(x) = \dfrac{-xe^x - (1-e^x}{x^2} = \dfrac{e^x - xe^x - 1}{x^2} \Rightarrow$ $\Rightarrow f'(1) = -1$. La ecuación de la recta tangente en $x = 1$ viene dada por:

$$y - f(1) = f'(1)(x-1) \Rightarrow y - (1-e) = -(x-1) \Rightarrow y = -x + 2 - e$$

7. Séptima Pregunta

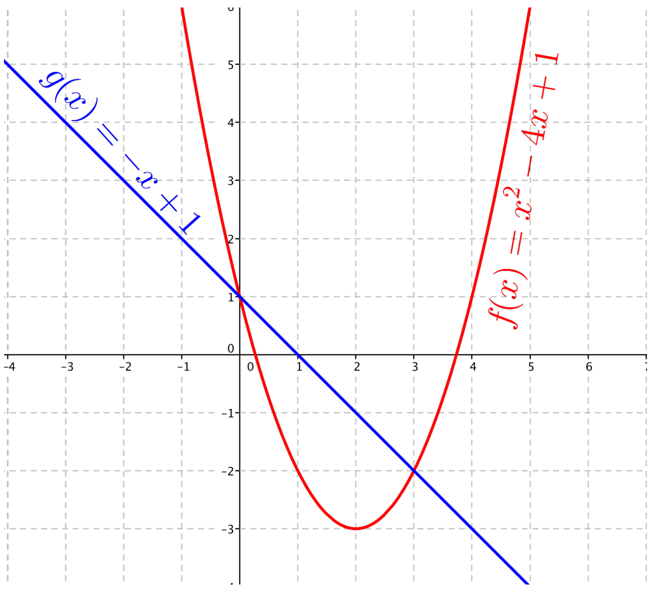
7. Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 4x + 1$ y $g(x) = -x + 1$, se pide:

a) Represente de forma aproximada la región delimitada por las dos curvas.

b) Calcule el área de dicha región.

Solución:

a)



Los puntos de corte entre la recta y la parábola vienen dados por la solución de la ecuación $x^2 - 4x + \cancel{1} = -x + \cancel{1} \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0$ ó $x = 3$, como se puede ver en la gráfica anterior los puntos de corte son (0,1) y (3,-2).

b) El área de la región vale $A = \displaystyle\int_0^3 [-x - 1 - (x^2 - 4x + 1)]dx = \int_0^3 (-x^2 + 3x)dx =$ $= -9 + \dfrac{27}{2} = \dfrac{9}{2}\ u^2$

8. Octava Pregunta

8. Resuelva la integral

$$\int \frac{-x+7}{x^2+x-2}\,dx.$$

Solución:

Se trata de una integral racional propia. Vamos a descomponerla en fracciones simples. $x^2+x-2=0 \Rightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\dfrac{-1\pm 3}{2} \Rightarrow x=1,\ 2 \Rightarrow x^2+x-2=(x-1)(x-2)$

$\dfrac{-x+7}{x^2+x-2}=\dfrac{-x+7}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-2}=\dfrac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)} \Rightarrow -x+7=$
$=A(x-2)+B(x-1) \Rightarrow -x+7=(A+B)x+(-2A-B)$. Identificando los polinomios generamos el sistema $\begin{cases} \text{A+B=-1} \\ \text{-2A-B=7} \end{cases}$. Si sumamos las dos ecuaciones $-A=6 \Rightarrow A=-6 \Rightarrow B=5$.

$\dfrac{-x+7}{x^2+x-2}=-\dfrac{6}{x-1}+\dfrac{5}{x-2} \Rightarrow \displaystyle\int \frac{-x+7}{x^2+x-2}dx=-6\int\frac{1}{x-1}dx+5\int\frac{1}{x-2}dx=$
$=-6ln|x-1|+5ln|x-2|+C$ siendo C un número real constante cualquiera.

9. Novena Pregunta

9. Una librería compra lotes de material escolar a tres empresas A, B y C. A la empresa A le compra el 40 % de los lotes, a B el 25 % y a C el resto. De la empresa A le viene defectuoso el 1 % de los lotes, de B el 2 % y de C el 3 %. Elegido un lote al azar, se pide:

   a) Calcule la probabilidad de que sea defectuoso.

   b) Si sabemos que no es defectuoso, calcule la probabilidad de que lo haya fabricado la empresa B.

Solución:

Sean los sucesos A≡ compra a la empresa A, B≡ compra a la empresa B, C≡ compra a la empresa C, D≡ artículo defectuoso. Del texto se desprende que $P(A)=0'4$, $P(B)=0'25$, $P(C)=0'35$, $P(D/A)=0'01$, $P(D/B)=0'02$, $P(D/C)=0'03$

a) Según el teorema de la probabilidad total: $P(D)=P(A)\cdot P(D/A)+P(B)\cdot P(D/B)+$
$+P(C)\cdot P(D/C)=0'4\cdot 0'01+0'25\cdot 0'02+0'35\cdot 0'03=0'159$

b) Según el Teorema de Bayes $P(B/\overline{D})=\dfrac{P(B)\cdot P(\overline{D}/B)}{P(\overline{D})}=\dfrac{0'25\cdot(1-0'02)}{1-0'159}=0'29$

10. Décima Pregunta

10. Se ha hecho un estudio de un famoso jugador de baloncesto de la ACB y se sabe que tiene una probabilidad de encestar un triple del 60 %. Si realiza 8 tiros a canasta

a) Calcule la probabilidad de que enceste 5 triples.

b) Calcule la probabilidad de que enceste al menos 2.

c) Determine la media y la desviación típica de la distribución.

Solución:

a) Se trata de una distribución binomial. Del texto obtenemos que n = 8, p = 0'6, q = 0'4. Sea X≡ número de triples encestados. Nos piden $P(X = 5) = \binom{8}{5} \cdot (0'6)^5 \cdot (0'4)^3 = 112 \cdot (0'6)^5 \cdot (0'4)^3 = 0'56$

b) $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \binom{8}{0} \cdot (0'6)^0 \cdot (0'4)^8 -$
$- \binom{8}{1} \cdot (0'6)^1 \cdot (0'4)^7 = 0'95$

c) En una binomial la media es $\mu = n \cdot p = 8 \cdot 0'6 = 4'8$, y la desviación típica vale $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{8 \cdot 0'6 \cdot 0'4} \Rightarrow \sigma = 1'39$