Índice de Contenidos

Solución al examen EBAU 8/7/2020 Murcia

Miguel Galo Fernández

1. Ejercicio 1

1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a:

$$\begin{cases} x + y - z = 4 \\ x + a^2y - z = 3-a \\ x - y + az = 1 \end{cases}$$

a) **[1 p.]** Determine para qué valores de a el sistema tiene solución única. Si es posible, calcule dicha solución para $a=0$.

b) **[1 p.]** Determine para qué valor de a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

c) **[0,5 p.]** Determine para qué valor de a el sistema no tiene solución.

Solución:

La matriz ampliada es $A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & a^2 & -1 & 3-a \\ 1 & -1 & a & 1 \end{array}\right)$. El determinante de la matriz de los coeficientes es:

$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & a^2 & -1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = a^3 + a^2 - a - 1$. Este determinante vale cero si $a^3 + a^2 - a - 1 = 0$, resolvemos por Ruffini:

$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & & 1 & 2 & 1 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}$, nos queda la ecuación $a^2 + 2a + 1 = 0$, calculamos sus raíces por la fórmula de Baskara $a = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} \Rightarrow a = -1$ (raiz doble).

Resumiendo $\boxed{\text{el determinante de la matriz de los coeficientes es cero para a=1 o bien a=-1}}$

Si a=1 la matriz ampliada es $A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \end{array}\right)$, en este caso $Rango(A) = 2 \neq Rango(A|B) = 3$

Si a=-1 la matriz ampliada es $A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right)$, en este caso $Rango(A) = 2 = Rango(A|B)$

En la siguiente tabla resumimos la discusión del sistema, según el teorema de Rouché-Fröbenius:

a	Rango(A)	Rango($A|B$)	Tipo de sistema
$\neq 1, \neq -1$	3	3	Sistema CD
=-1	2	2	Sistema CI
=1	2	3	Sistema Incompatible

a) Para a=0 el sistema es compatible determinado. La matriz ampliada es:

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Nos queda el sistema $\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 4 \\ & & 2y & - & z & = & 3 \\ & & & - & z & = & 1 \end{array}\right\}$ cuya solución es $z = -1$, $y = 1$, $x = 2$

b) El sistema tiene infinitas soluciones cuando es compatible indeterminado, es decir en el caso en el que $a = -1$, cuya matriz ampliada es:

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right) \text{ que genera el sistema:}$$

$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 4 \\ & & 2y & & & = & 3 \end{array}\right\} \Rightarrow y = \dfrac{3}{2}$, $x + \dfrac{3}{2} - z = 4 \Rightarrow x = \dfrac{5}{2} + z$, finalmente la solución del sistema es $x = \dfrac{5}{2} + \lambda$, $y = \dfrac{3}{2}$, $z = \lambda$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

c) El sistema no tiene solución para a=1

2. Ejercicio 2

2: Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) **[1 p.]** Compruebe que las matrices A y B son regulares (o inversibles) y calcule sus matrices inversas.

b) **[1,5 p.]** Resuelva la ecuación matricial $AXB = A^t - 3B$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

Solución:

a) Las matrices son invertibles si su determinante no es cero:

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 3 = -1 \neq 0 \Rightarrow$ A es invertible.

$|B| = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 3 = 1 \neq 0 \Rightarrow$ B es invertible.

La inversa de A se calcula por la expresión $A^{-1} = \dfrac{(adj A)^t}{|A|}$

La matriz adjunta de A vale $AdjA = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (AdjA)^t = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$
$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

La inversa de B se calcula por la expresión $B^{-1} = \dfrac{(adjB)^t}{|B|}$

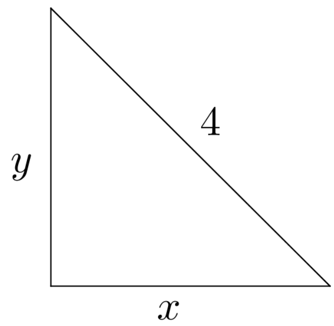
La matriz adjunta de B vale $AdjB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 33 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow (AdjB)^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$
$B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

b) $AXB = A^t - 3B \Rightarrow A^{-1}AXBB^{-1} = X = A^{-1}(A^t - 3B)B^{-1}$ y sustituyendo:
$X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 26 \\ -10 & -15 \end{pmatrix}$

3. Ejercicio 3

3: [2,5 p.] De entre todos los triángulos rectángulos cuya hipotenusa mide 4 metros, determine las dimensiones de aquel cuya área es máxima. ¿Cuál es el valor de dicha área máxima?

solución:



La función a optimizar (maximizar en este caso) es $f(x,y) = \dfrac{1}{2}xy$ que nos da la expresión del área del triángulo de la figura.

La relación entre variables la proporciona el Teorema de Pitágoras $x^2 + y^2 = 16 \Rightarrow$
$\Rightarrow y = \sqrt{16 - x^2}$, no hemos señalado el signo - delante de la raíz porque no tiene sentido tratándose de la longitud de un segmento.

La función a optimizar en una variable es $f(x) = \dfrac{1}{2}x\sqrt{16 - x^2}$. La derivada primera de esta función debe ser nula $f'(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{16 - x^2} + \dfrac{1}{2}x\dfrac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{16 - x^2}} = 0 \Rightarrow \dfrac{8 - x^2}{\sqrt{16 - x^2}} = 0 \Rightarrow x = 2\sqrt{2}$

El candidato a ser máximo es $x = 2\sqrt{2}$, para ver que en este punto se alcanza el máximo ha de ser negativa la derivada segunda en él. Se tiene $f''(x) = \dfrac{-40x + 3x^3}{(16 - x^2)\sqrt{16 - x^2}} \Rightarrow$
$\Rightarrow f''(2\sqrt{2}) = -2 < 0$, se alcanza un máximo en $x = 2\sqrt{2} \Rightarrow y = 2\sqrt{2}$, el triángulo rectángulo es isósceles. El área viene dada por $f(2\sqrt{2}) = \dfrac{1}{2}2\sqrt{2}\sqrt{16 - (2\sqrt{2})^2} = 4\ u^2$.

4. Ejercicio 4

4: a) **[2 p.]** Calcule la integral indefinida $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$.

b) **[0,5 p.]** Determine el área del recinto limitado por el eje OX, la gráfica de la función $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ y la recta vertical $x=1$.

solución:

a) La integral se resuelve por cambio de variable $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx \left\{ \begin{array}{l} t = 1+\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x} = t-1 \\ dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \\ dx = 2\sqrt{x}dt = 2(t-1)dt \end{array} \right\} =$

$$= \int \frac{t-1}{t}2(t-1)dt = 2\int \frac{t^2-2t+1}{t}dt = 2\int \left(t-2+\frac{1}{t}\right)dt = 2\left(\frac{t^2}{2}-2t+ln|t|+C\right) =$$

$$= t^2-4t+2ln|t|+C = \boxed{(1+\sqrt{x})^2-4(1+\sqrt{x})+2ln(1+\sqrt{x})+C}$$

b) Área$=\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx = (1+\sqrt{x})^2-4(1+\sqrt{x})+2ln(1+\sqrt{x})\Big|_0^1 = -1+2ln2$

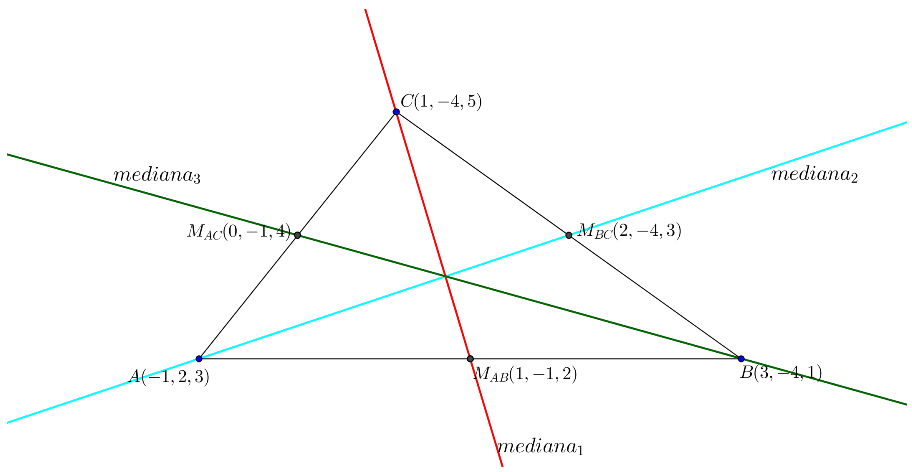
5. Ejercicio 5

5: Se llama **mediana** de un triángulo a cada una de las rectas que pasan por un vértice del triángulo y por el punto medio del lado opuesto a dicho vértice.

a) **[1,5 p.]** Calcule las ecuaciones de las tres medianas del triángulo de vértices $A=(-1,2,3)$, $B=(3,-4,1)$ y $C=(1,-4,5)$.

b) **[1 p.]** Compruebe que las tres medianas se cortan en un punto y calcule las coordenadas de dicho punto.

solución:



En la figura se han colocado los puntos medios de cada lado y se han nombrado las medianas como $mediana_1$, $mediana_2$ y $mediana_3$

a) La mediana $mediana_1$ pasa por los puntos $C(1,-4,5)$ y $M_{AB}=(1,-1,2)$, por tanto su vector director es $\vec{V_1}=(0,3,-3)\sim(0,1,-1)$ y su ecuación $mediana_1 : \begin{cases} \text{x=1} \\ \text{y=-4+ } \lambda \\ \text{z=5- } \lambda \end{cases}$

La mediana $mediana_2$ pasa por los puntos $A(-1,2,3)$ y $M_{BC}=(2,-4,3)$, por tanto su vector director es $\vec{V_2}=(3,-6,0)\sim(1,-2,0)$ y su ecuación $mediana_2 : \begin{cases} \text{x=-1+ } \mu \\ \text{y=2- 2 } \mu \\ \text{z=3} \end{cases}$

La mediana $mediana_3$ pasa por los puntos $B(3,-4,1)$ y $M_{AC}=(0,-1,4)$, por tanto su vector director es $\vec{V_3}=(-3,3,3)\sim(-1,1,1)$ y su ecuación $mediana_3 : \dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y+4}{1}=\dfrac{z-1}{1}$

b) Hallamos el punto de corte de las medianas $mediana_1$ y $mediana_2$ resolviendo el sistema:
$\left.\begin{array}{l} 1=-1+\mu \\ -4+\lambda=2-2\mu \\ 5-\lambda=3 \end{array}\right\}$, cuya solución es $\lambda=\mu=2$ por tanto $mediana_1 \cap mediana_2 = P(1,-2,3)$
Tan solo nos queda por comprobar que $P\in mediana_3$ sustituyendo las coordenadas de P en la ecuación de $mediana_3$, $mediana_3 : \dfrac{1-3}{-1}=\dfrac{-2+4}{1}=\dfrac{3-1}{1}=2$. Concluimos afirmando que las tres medianas del triángulo se cortan en el punto $P(1,-2,3)$.

6. Ejercicio 6

6: Considere la recta r y el plano π dados por las siguientes ecuaciones:

$$r : \frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{0} \quad \text{y} \quad \pi : x-2y-z=4.$$

a) **[1 p.]** Estudie la posición relativa de la recta y el plano.

b) **[0,5 p.]** En caso de que la recta corte al plano, calcule el punto de corte y el ángulo que forman. En caso contrario, calcule la distancia entre la recta y el plano.

c) **[1 p.]** Determine el plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.

solución:

a) La ecuación general del plano es $\pi : x-2y-z-4=0$. El vector director de la recta es $\vec{v}=(2,1,0)$ y el ventor normal al plano es $\vec{n}=(1,-2,-1)$. Como el producto escalar de estos vectores $\vec{v}\cdot\vec{n}=2-2+0=0$ es cero, el plano y la recta son paralelos. $P(-1,2,1)$ es un punto de la recta, se tiene que $d(r,\pi)=d(P,\pi)=\dfrac{|-1-4-1-4|}{\sqrt{1+4+1}}=\dfrac{10}{\sqrt{6}}=\dfrac{5\sqrt{6}}{3}$.

b) Si el plano que queremos hallar π' contiene a a la recta y es perpendicular al plano π:

- Los vectores $\vec{v}=(2,1,0)$ y $\vec{n}=(1,-2,-1)$ están en el plano.
- El punto $P(-1,2,1)$ pertenece al plano

La ecuación general del plano viene dada por la expresión $\pi' : \begin{vmatrix} \text{x+1} & \text{y-2} & \text{z-1} \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$, desarrollando esta ecuación se obtiene $\pi' : x-2y+5z-2=0$.

7. Ejercicio 7

7: Una urna tiene 2 bolas blancas y 3 bolas rojas. Consideramos la variable aleatoria que cuenta el número de bolas blancas que se obtienen al repetir nueve veces el siguiente experimento: se saca una bola de la urna y, después de anotar el color, se devuelve la bola a la urna.

a) **[1 p.]** ¿Qué tipo de distribución sigue dicha variable aleatoria y cuáles son sus parámetros?

b) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la media y la desviación típica de esta distribución?

c) **[1 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que el número de bolas anotado sea menor o igual que 4?

solución:

a) Se trata de una distribución binomial, $X \equiv$ número de bolas blancas que se obtienen al extraer, con reemplazamiento, 9 veces una bola de la urna. Los sucesos son dicotómicos, se dividen en éxitos (extraer blanca con probabilidad $p = \dfrac{2}{5} = 0'4$) y fracasos (extraer roja con probabilidad $q = \dfrac{3}{5} = 0'6$).

b) La media es $\mu = n \cdot p = 9 \cdot \dfrac{2}{5} = 3'6$ y la desviación típica es $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{2'16} = 1'47$.

c) $P(x \leq 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$, donde $P(X = k) = \dbinom{9}{k}(0'4)^k \cdot (0'6)^{9-k}$, de este modo:

$P(X = 0) = \dbinom{9}{0}(0'4)^0 \cdot (0'6)^9 = 0'0101$

$P(X = 1) = \dbinom{9}{1}0'4 \cdot (0'6)^8 = 0'0605$

$P(X = 2) = \dbinom{9}{2}(0'4)^2 \cdot (0'6)^7 = 0'1612$

$P(X = 3) = \dbinom{9}{3}(0'4)^3 \cdot (0'6)^6 = 0'2508$

$P(X = 4) = \dbinom{9}{4}(0'4)^4 \cdot (0'6)^5 = 0'2508$

Por tanto $P(x \leq 4) = 0'7334$

8. Ejercicio 8

8: En una determinada población, el 40 % de los individuos lee diariamente la prensa y el 75 % ve diariamente las noticias en la televisión. Además, el 25 % de los individuos lee la prensa y ve las noticias en la televisión diariamente.

a) **[0,5 p.]** ¿Son independientes los sucesos "leer diariamente la prensa" y "ver diariamente las noticias en la televisión"?

b) **[1 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que un individuo lea la prensa diariamente pero no vea las noticias en la televisión?

c) **[1 p.]** Si un individuo lee la prensa diariamente, ¿cuál es la probabilidad de que también vea las noticias en la televisión?

solución:

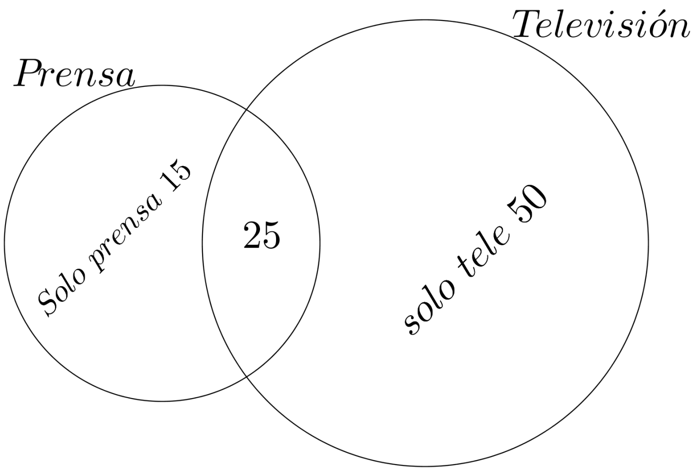


Figura 1: Tomamos una población de 100 individuos

Leer prensa $\equiv$ **P**. Ver televisión $\equiv$ **T**.

a)Si estos sucesos son independientes cumplirían $P(P \cap T) = P(P) \cdot P(T)$ y esto no se verifica ya que $0'25 \neq 0'4 \cdot 0'75 = 0'3$

b) Según podemos ver en el diagrama de Venn anterior $P(P \cap \overline{T}) = \dfrac{15}{100} = 0'15$

c) $P(T/P) = \dfrac{P(T \cap P)}{P(P)} = \dfrac{25}{40} = 0'625.$