Crecimiento de las poblaciones

Miguel Galo Fernández

1 de abril de 2020

Figura 1: Las matemáticas de las epidemias

Índice de Contenidos

1. Preámbulo

Jamás pensé que viviría lo que estoy viendo ahora mismo. He divagado mucho, desde la poca información que dispongo, intentando explicarme qué esta sucediendo. ¿ Tenemos uno de los mejores sistemas sanitarios del mundo? Si lo tenemos no lo veo, el desastre sanitario al que estoy asistiendo me hace no creérmelo. No quiero seguir, tal vez por temor a no ser objetivo. Mi desánimo ante el espectáculo de un estado reducido a su mínima expresión, mi incertidumbre y mi miedo ante el futuro del mundo que surja de esto, que indudablemente no será el mismo que he vivido, me llenan de angustia. Escribo estas líneas para mitigar mi desasosiego. Doy un giro de 180º, me voy a la objetividad que puedan darme las matemáticas.

Las epidemias tienen que ver con el crecimiento de las poblaciones. Por ejemplo la pandemia de Corona Virus tiene mucho que ver con la capacidad de crecimiento que tenga este virus. El primero que estudió el crecimiento de las poblaciones (en este caso poblaciones humanas) fue Malthus. Su modelo se basa en la hipótesis de que el incremento del número de individuos de la población es directamente proporcional a ese número. Este modelo tiene un inconveniente, supone un crecimiento en ascenso hasta el infinito. La experiencia nos dice que esto no es así. Otro defecto es que supone constante la constante de proporcionalidad mencionado, de nuevo la experimentación con poblaciones indica que esto no es así. Hay una variante del modelo de Malthus para estudiar la población de infectados en una epidemia. El incremento de los infectados en un periodo es directamente proporcional a los infectados en el periodo anterior, la constante de proporcionalidad es el producto del número de individuos de la población que se exponen a contaminarse por la probabilidad de que un individuo se contagie. El modelo más completo es el modelo logístico de Vershulst. Introduce este modelo un concepto nuevo, la población máxima que soporta el el entorno en donde se desarrolla la epidemia. La variación de la población en el tiempo se puede obtener como producto de la constante de proporcionalidad del crecimiento, de la propia población y de la proporción de recursos de los que se dispone para la expansión de la población. Una evidencia de que el modelo de Malthus no siempre funciona es la tabla de la evolución del Corona Virus en España, podemos observar que la tasa de crecimiento no es constante. ¿Que podemos hacer en este caso?, ¿cómo podemos interpolar los datos que nos presenta la tabla? Si esto fuera posible tendríamos un patrón de comportamiento del crecimiento que nos simplificaría mucho las cosas. Esto es bastante difícil de obtener, si nos fijamos el factor de contagio está entre 1 y 1.85. ¿Sería aceptable tomar la media de los factores de contagio como representante de un factor de contagio constante? Si aceptamos esto, la tasa media de contagio sería del 32 %.

Quisiera reproducir aquí unas líneas del texto **La ecuación logística de Carlos Velázquez**, para dejar constancia de la gran repercusión que han tenido las ideas del crecimiento de la población en la sociedad:

La teoría de Malthus sobre el crecimiento de la población puso a toda la correcta sociedad inglesa a temer las catástrofes de la sobrepoblación. A los políticos se les cuestionaba sobre lo que harían para evitarlas, los párrocos se devanaban los sesos tratando de encontrar en la Biblia una explicación a este inexcusable descuido del Creador, y los grandes capitalistas y terratenientes tomaron las ideas de Malthus como bandera política para imponer su agenda y limitar el uso de los impuestos para ayudar a los pobres, argumentando que utilizarlos para la beneficencia pública sólo traería sufrimientos mayores en el futuro. Con el tiempo la discusión sobrepasó las fronteras inglesas, y las ideas de Malthus se enfrentaron a mejores críticos, como Ives Guyot, que en 1877, basándose en estadísticas sobre la población y la riqueza en Estados Unidos, Francia e Inglaterra, sostenía que contra toda previsión la riqueza parecía aumentar más rápidamente que la población, contrariando el argumento de Malthus. La tranquilidad vino por algo que no tuvo en cuenta Malthus: la generación de riqueza con la mecanización que trajo la revolución industrial hizo que esta creciera mucho más rápido que la población.

Cuadro 1: Evolución del Corona Virus en España

Día	Nuevos	Acumulados	Incremento
31 de enero	1	1	
9 de febrero	1	2	100 %
13 de febrero	1	3	50 %
24 de febrero	1	4	33 %
25 de febrero	4	8	100 %
26 de febrero	6	14	75 %
27 de febrero	12	26	85 %
28 de febrero	19	45	73 %
29 de febrero	14	59	31 %
1 de marzo	25	84	42 %
2 de marzo	41	125	49 %
3 de marzo	44	169	35 %
4 de marzo	59	228	35 %
5 de marzo	54	282	24 %
6 de marzo	83	365	29 %
7 de marzo	65	430	18 %
8 de marzo	244	674	57 %
9 de marzo	557	1.231	83 %
10 de marzo	464	1.695	38 %
11 de marzo	582	2.277	34 %
12 de marzo	869	3.146	38 %
13 de marzo	2.086	5.232	66 %
14 de marzo	1.100	6.332	21 %
15 de marzo	1.512	7.844	24 %
16 de marzo	2.098	9.942	27 %
17 de marzo	1.236	11.178	12 %
18 de marzo	3.591	14.769	31 %
19 de marzo	3.308	18.077	22 %
20 de marzo	2.333	20.410	13 %
21 de marzo	4.964	25.374	24 %
22 de marzo	3.394	28.768	13 %
23 de marzo	4.321	33.089	15 %
24 de marzo	6.584	39.673	19 %
25 de marzo	7.937	47.610	20 %
26 de marzo	8.578	56.188	18 %
27 de marzo	7.871	64.059	14 %
28 de marzo	8.189	72 248	13 %
29 de marzo	6.549	78 797	9 %
30 de marzo	6.398	85.195	8 %
31 de marzo	9.222	94.417	11 %

2. El modelo exponencial de Malthus

Como hemos comentado en el preámbulo, el modelo de Malthus se expresa matemáticamente mediante la ecuación diferencial $\frac{dI(t)}{dt} = rI(t)$, donde $I(t)$ es el número de infectados en un instante t y r es la constante de proporcionalidad del crecimiento. Esta sencilla ecuación diferencial se resuelve separando las variables, es decir $\frac{dI}{I} = rdt$. Si integramos esta igualdad obtenemos $\int \frac{dI}{I} = \int rdt \Rightarrow Ln(I) = rt + c$, donde c es la constante de integración. Ahora despejamos la función que nos da el número de infectados en el tiempo $I(t) = e^{rt+c} = e^c \cdot e^{rt}$. Llamando $L = e^c$ nos queda que el número de infectados es $I(t) = Le^{rt}$. Si aplicamos el modelo a la tabla del Corona Virus en España tenemos que para t=0 (el tiempo cero es el 31 de enero, comienzo del estudio estadístico) había un infectado, es decir que $I(0) = 1 = Le^0 \Rightarrow L = 1$. Finalmente la función de infectados es $I(t) = e^{rt}$. Si aceptamos el valor anteriormente comentado $r = 32\,\% = 0{,}32 \Rightarrow \boxed{I(t) = e^{o,32t}}$. En la siguiente gráfica la poligonal en negro corresponde a la representación gráfica de los puntos de la tabla anterior. La poligonal en rojo corresponde a la gráfica de la exponencial $I(t) = e^{0{,}41t}$, como podemos observar esta función exponencial se ajusta bastante bien a la evolución temporal del número de infectados.

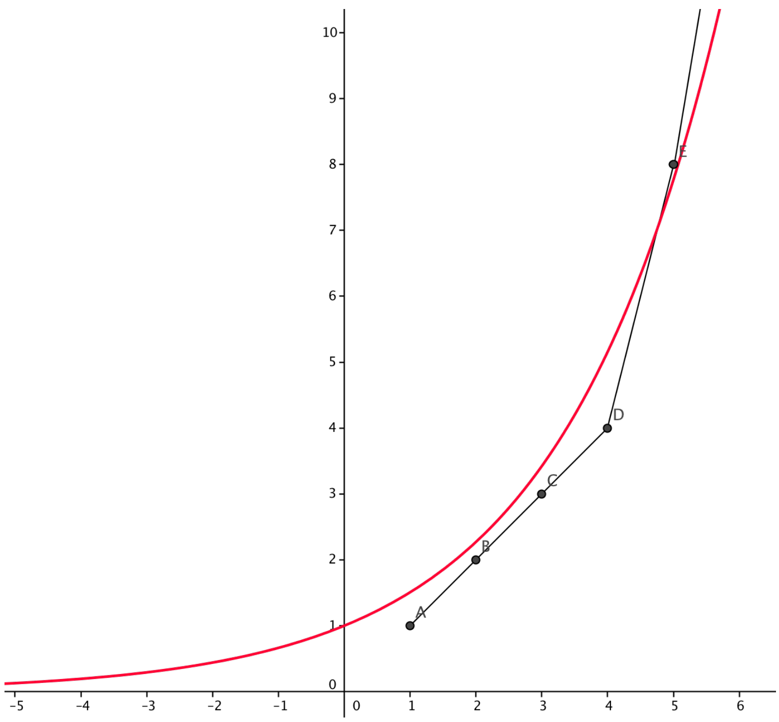

Figura 2: Exponencial de malthus para la evolución del Corona Virus en España

Según hemos visto, parece ser que la tasa de crecimiento de la población de infectados se aproxima al 41 %. Este valor lo he obtenido viendo las distintas gráficas para la exponencial $I = e^(rt)$ según valores de r. El que más se aproxima a la poligonal de la tabla es $r = 0{,}41$.

3. El modelo EPI

Este modelo se basa en suponer que la variación de infectados en un periodo de tiempo es directamente proporcional a la tasa de crecimiento, al número de individuos de la población expuestos al contagio y al número de infectados en el periodo anterior. Si denotamos por $\triangle I_n = I_n - I_{n-1}$, donde I_n es el número de infectados en el periodo n, por E al número de individuos expuestos, por p a la probabilidad de que un individuo se infecte, por r a la constante de proporcionalidad del crecimiento, entonces $\triangle I_n = EpI_{n-1}$. Luego $I_n - I_{n-1} = EpI_{n-1} \Rightarrow I_n = (1+Ep)I_{n-1}$. El factor de crecimiento de los infectados es $F = 1 + Ep$. Para que no varíe el número de infectados, lo que es equivalente a que $In = I_{n-1}$, ha de ser $1 + Ep \simeq 0$. Esto se puede conseguir de dos formas, o bien $E \simeq 0$ que es lo que se pretende con la cuarentena o bien $p = 0$ que no tiene sentido en la pandemía ya que supondría la ausencia de infectados.

4. El modelo logístico

Este modelo se basa, como ya dijimos en el preámbulo, en la afirmación de que la variación de una población en el tiempo viene dada por la ecuación $\frac{dp}{dt} = rp(1-\frac{p}{k})$, donde p es el número de individuos de la población en un instante t, r es el factor de crecimiento de la población y k es el número máximo de individuos que admite el entorno. Se pueden dar tres casos:

a) Que $(1 - \frac{p}{k}) > 0$ o lo que es lo mismo que $k > p$, esto supone una variación positiva de la población, es decir que se está expandiendo. Si la población p se refiere al Corona Virus, la epidemia está expandiéndose.

b) Que $(1 - \frac{p}{k}) < 0$ o lo que es lo mismo que $k < p$, esto supone una variación negativa de la población, es decir que se está contrayendo. Si la población p se refiere al Corona Virus, la epidemia está en vías de extinción.

c) Que $(1 - \frac{p}{k}) = 0$ o lo que es lo mismo que $k = p$, esto supone que no hay variación en la población, es decir que permanece constante. Si la población p se refiere al Corona Virus, el número de infectados permanecería constante.

   Vamos a resolver la ecuación diferencial $\frac{dp}{dt} = rp(1 - \frac{p}{k})$. La resolvemos por medio de la separación de variables, es decir poniéndola en la forma $\frac{dp}{dt} = \frac{r}{k}p(k-p)$, ahora separamos las variables $\frac{1}{p(k-p)}dp = \frac{r}{k}dt \Rightarrow \int \frac{1}{p(k-p)}dp = \int \frac{r}{k}dt$. Vamos a resolver, por separado, estas dos integrales.

La integral $\int \frac{1}{p(k-p)}dp$ es racional propia, descomponemos en fracciones simples la fracción algebraica $\frac{1}{p(k-p)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{k-p} \Rightarrow A(k-p) + Bp = 1$, obtenemos:

- si $k = p \Rightarrow B = \frac{1}{k}$
- si $p = 0 \Rightarrow A = \frac{1}{k}$

Luego $\displaystyle\int \frac{1}{p(k-p)}dp = \frac{1}{k}\int \frac{1}{p}dp - \frac{1}{k}\int \frac{1}{p-k} = \frac{1}{k}Ln\frac{p}{p-k}$

La integral $\displaystyle\int \frac{r}{k}dt$ es inmediata, $\displaystyle\int \frac{r}{k}dt = \frac{r}{k}t + C$, C es la constante de inegración.

Igualando las dos integrales resueltas obtenemos $\dfrac{1}{k}Ln\dfrac{p}{p-k} = \dfrac{r}{k}t + C$, llamando $D = KC$ que de nuevo será constante $Ln\dfrac{p}{p-k} = rt + D \Rightarrow \dfrac{p}{p-k} = e^{rt+D} = e^{D}\cdot e^{rt}$. De nuevo cambiamos el nombre de la constante $L = e^{D}$. Hemos llegado a la expresión $\dfrac{p}{p-k} = Le^{rt}$. Si en esta ecuación despejamos , nos queda $\boxed{p = \dfrac{kLe^{rt}}{Le^{rt}-1}}$. Esta expresión nos da la evolución de la población respecto al tiempo. Las constantes k,L y r se obtienen por experimentación. Por ejemplo si p se refiere a la población de infectados por Corona Virus en España desde el 31 de enero de 2020 hasta el 31 de marzo de 2020 (los datos están recogidos en la tabla del principio), r ya lo tenemos (yo propongo, por aproximación, $r = 41\,\%$), para calcular L y K tomamos de la tabla dos valores iniciales, por ejemplo si t=0 p vale 1, y si t=1 p vale 2, con estos valores se pueden calcular las referidas constantes.