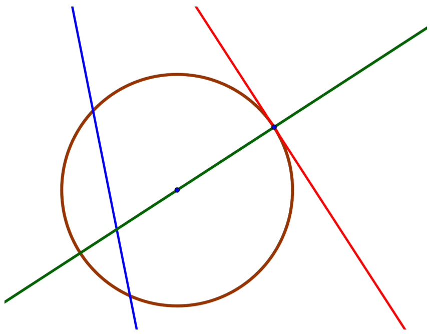
GRUPO NABLA

Asociación para la difusión y mejora de la enseñanza de las Matemáticas

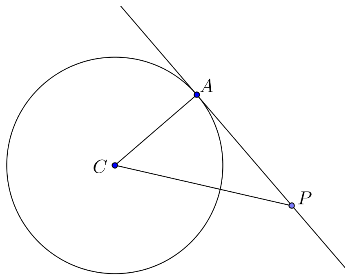


GEOMETRÍA BÁSICA

desarrollo teórico y ejercicios de aplicación

Índice

El álgebra es potente para el razonamiento geométrico pero, en esta disciplina se pierden ideas cuando se hace un desarrollo algebraico. Se me está ocurriendo, en este momento, la justificación de la perpendicularidad de la recta tangente a una circunferencia y la recta que une al punto de tangencia con el centro. En las matemáticas escolares (cuando se abordaban estos temas en ese nivel, que eso pasó a la historia por desgracia) se nos hacia una demostración a partir del siguiente gráfico:

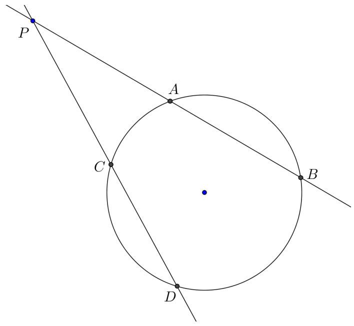


El centro de la circunferencia es el punto C, A es el punto de tangencia y P es un punto cualquiera de la tangente. Como en un triángulo la suma de dos de sus lados siempre es mayor o igual que el otro lado se tiene que $\overline{CA}+\overline{AP} \geq \overline{CP}$ cualquiera que sea P. Esto nos indica que la menor de las distancias del centro C a un punto de la tangente se alcanza en el punto A. Sabemos también que la menor distancia se alcanza con la perpendicular, esto es lo que queremos demostrar. Personalmente a mi no me convence esta demostración, la veo incompleta. ¿Porqué la menor de las distancias se alcanza con la perpendicular? Se me ocurre, para justificar mejor todo lo anterior, emplear el álgebra por medio de la geometría analítica. La ecuación de la circunferencia de centro $C(x_0, y_0)$ y radio r tiene por ecuación $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2$. Las coordenadas del punto de tangencia son $A(a, b)$. La renta tangente a la circunferencia en el punto A tiene por pendiente la derivada y'_A, donde y es la función que relaciona a x con y en la circunferencia, es decir $y = y_0 + \sqrt{r^2-(x-x_0)^2}$. Si derivamos implícitamente respecto a x en la ecuación $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = r^2$, obtenemos $2(x-x_0)+2(y-y_0)\cdot y' = 0 \Rightarrow y' = -\dfrac{x-x_0}{y-y_0}$. En el punto A la derivada será $y'_A = -\dfrac{a-x_0}{b-y_0}$ y la ecuación de la recta tangente a la circunferencia que pasa por el punto A es $y-b = y'_A(x-a) \Rightarrow y-b = -\dfrac{a-x_0}{b-y_0}\cdot(x-a)$. Esto lo podemos poner en la forma $(b-y_0)\cdot(y-b) = -(a-x_0)\cdot(x-a) \Rightarrow (b-y_0)\cdot(y-b)+(a-x_0)\cdot(x-a) = 0$, esta es la ecuación de la recta tangente a la circunferencia, cuyo vector director es $\vec{v_t} = (b-y_0, -(a-x_0))$. La recta que pasa por el punto de tangencia $A(a, b)$ y por el centro de la circunferencia (x_0, y_0) tiene por vector director $\vec{v_r} = (a-x_0, b-y_0)$. Evidentemente el producto escalar de estos dos vectores es nulo $\vec{v_t}\cdot\vec{v_r} = 0$ y esto quiere decir que son ortogonales, o lo que es lo mismo, que la recta tangente y la recta que pasa por el punto de tangencia y por el centro de la circunferencia son perpendiculares. Este razonamiento es más riguroso.

Las matemáticas escolares han abandonado casi por completo la geometría que se manipulaba por imágenes de configuraciones y figuras, cosa que no han hecho en otros países. Aquí estamos malgastando esfuerzo y recursos en enseñar algoritmos de cálculo que hacen mejor y más rápido las calculadoras. Quiero rescatar las propiedades de las tangentes y cuerdas de la circunferencia que antaño se estudiaban con profundidad.

1. Potencia de un punto respecto a una circunferencia

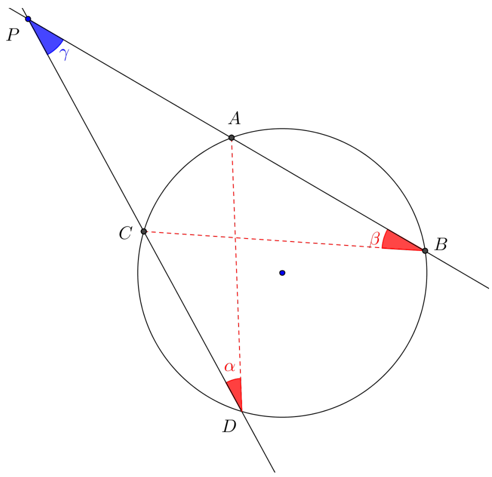
Consideremos una circunferencia y tracemos dos cuerdas cualesquiera desde un punto exterior tal y como se indica en la siguiente figura:



Entonces se verifica que $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$. Al valor de cada uno de estos productos, que es constante, se le llama potencia del punto respecto a la circunferencia.

Demostración:

Unimos los puntos B y C, A y D, tal y como indica la siguiente figura, obteniendo dos triángulos PCB y PAD :

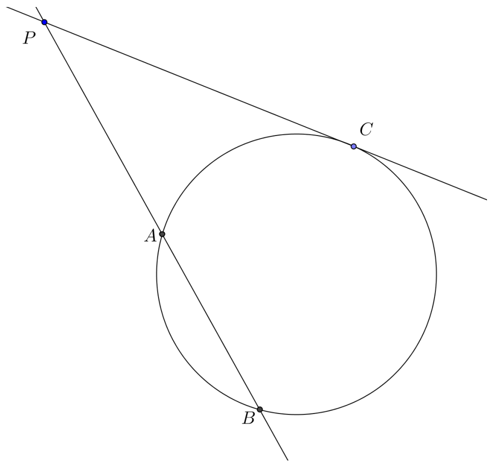


Estos dos triángulos son semejantes si aplicamos el criterio de semejanza (AA): tienen un ángulo común γ y los ángulos α y β son iguales ya que subtienden el mismo arco $\widehat{AC}$. Luego $\dfrac{\overline{PC}}{\overline{PB}} = \dfrac{\overline{PA}}{\overline{PD}} \Rightarrow \overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$.

La propiedad que tiene la potencia de un punto respecto a una circunferencia también es denominada **Teorema de las Secantes**

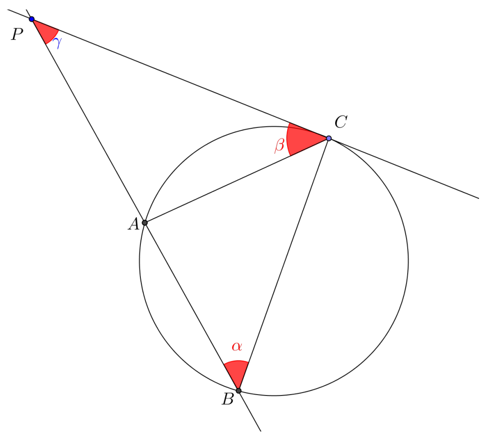
2. Teorema de la tangente y la secante

Consideremos una circunferencia, un punto exterior P y una recta tangente y otra secante como indica la siguiente figura:



Entonces $\overline{PC}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$

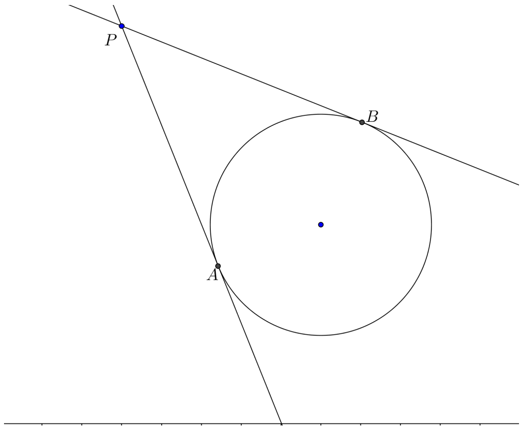
Demostración:



Unimos los vértices $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, obteniendo dos triángulos $\widehat{PAC}$ y $\widehat{PBC}$ que tienen un ángulo común γ. Los ángulos α y β son iguales porque subtienden un mismo arco $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$. Luego $\widehat{PAC}$ y $\widehat{PBC}$ son semejantes y por tanto verifican $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = \dfrac{\overline{PC}}{\overline{PB}} \Longleftrightarrow \overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC}^2$

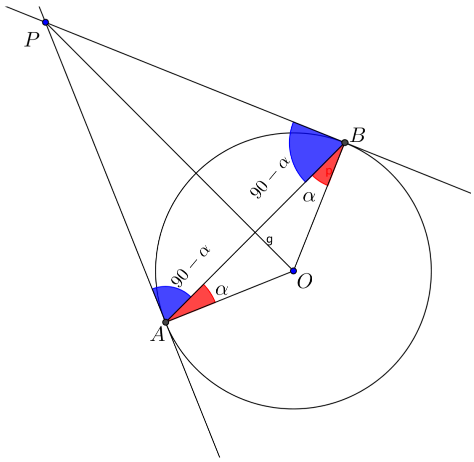
3. Teorema de las tangentes

Sea P un punto exterior a una circunferencia y sean A y B los puntos de tangencia de las dos tangentes que pasan por P, tal y como se indica en la figura:



Entonces $\overline{PA} = \overline{PB}$

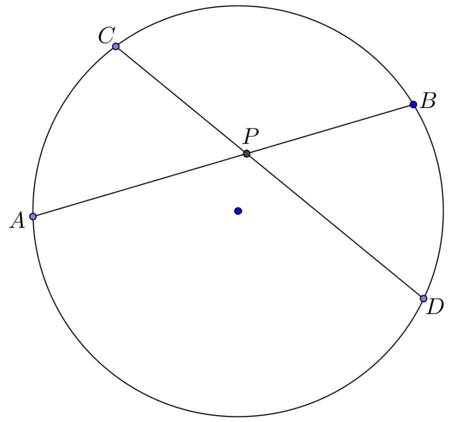
Demostración:



Sabemos que las rectas que pasan por O y A, y la que pasa por O y B son perpendiculares a las tangentes. Como el triángulo $\widehat{AOB}$ es isósceles ya que dos de sus lados miden un radio cada uno, los ángulos α son los que se señalan en la figura, por tanto el triángulo $\widehat{PAB}$ es también isósceles al tener dos ángulos iguales, luego $\overline{PA} = \overline{PB}$

4. Teorema de las cuerdas

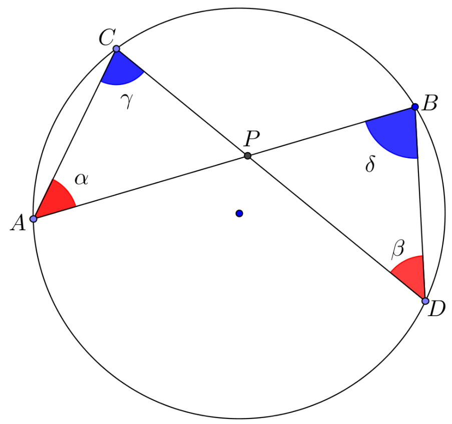
Consideremos dos cuerdas en una circunferencia tal y como se indica en la figura siguiente:



Entonces $\overline{AP} \cdot \overline{PB} = \overline{DP} \cdot \overline{PC}$

Demostración:

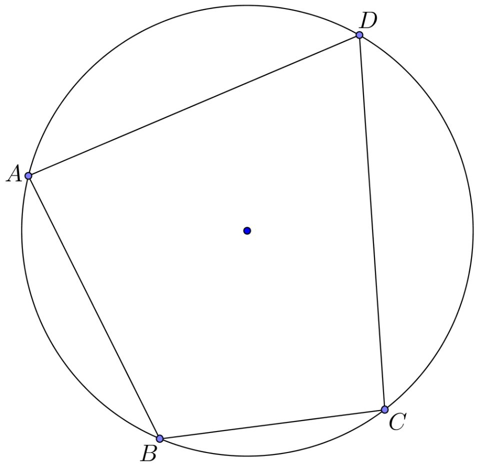
Unimos los puntos A y C, B y D, obteniendo la siguiente configuración:



Los ángulos α y β son iguales porque subtienden un mismo arco $\overset{\frown}{\text{CB}}$. Lo mismo se puede decir de los ángulos γ y δ, son iguales porque subtienden ambos el arco $\overset{\frown}{\text{AD}}$. Por tanto los triángulos $\widehat{ACP}$ y $\widehat{BDP}$ son semejantes (criterio de semejanza (AA), y se verifica que $\dfrac{\overline{CP}}{\overline{AP}} =$ $= \dfrac{\overline{PB}}{\overline{PD}} \Rightarrow \overline{AP} \cdot \overline{PB} = \overline{CP} \cdot \overline{PD}$

5. Cuadrilátero inscrito en una circunferencia

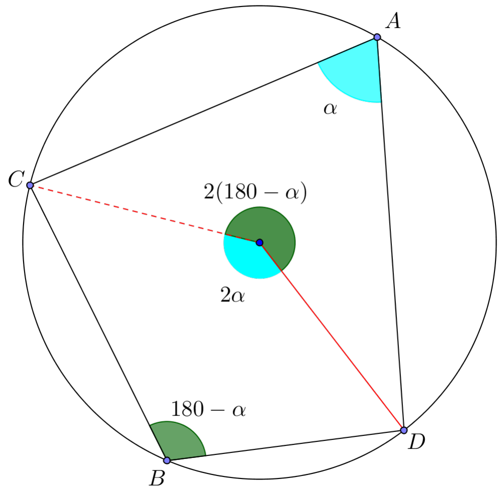
Sea el cuadrilátero inscrito en la circunferencia:



Entonces los ángulos opuestos del cuadrilátero son suplementarios.

Demostración:

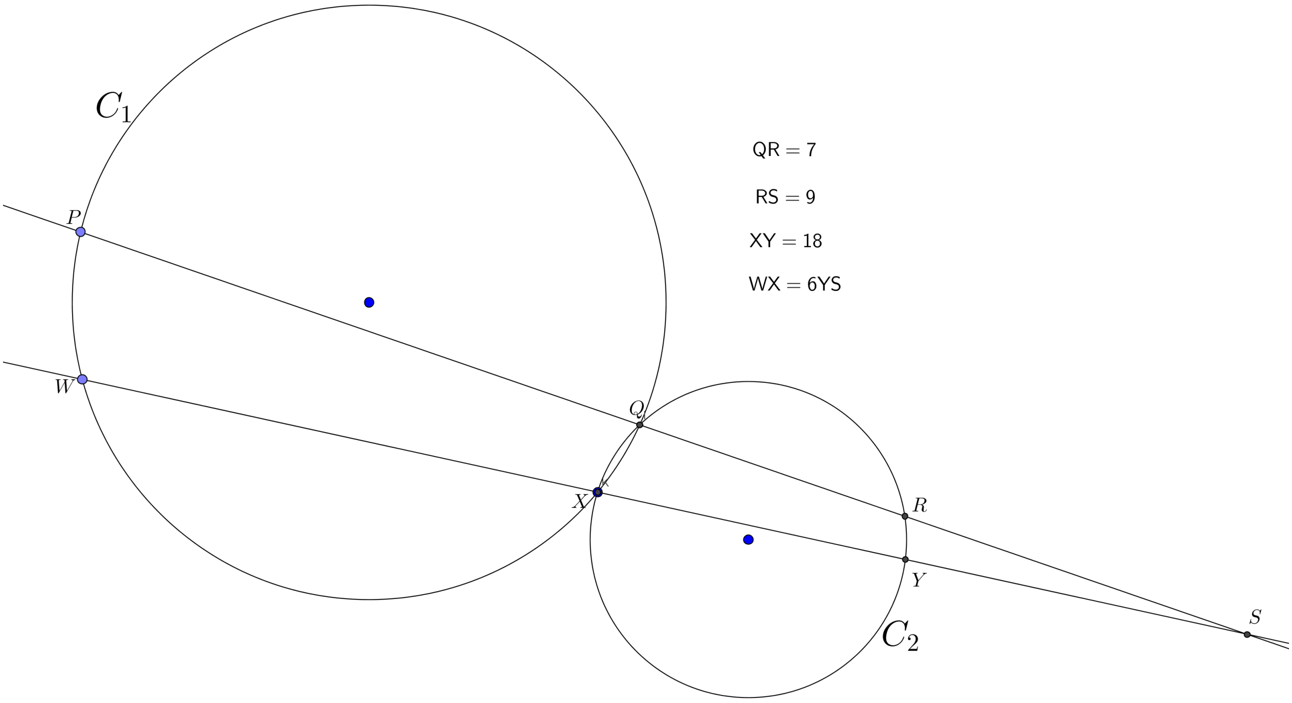
Teniendo en cuenta que el angulo inscrito es la mitad del arco que subtiende, generamos la figura:



Téngase en cuenta que $360-2\alpha = 2(180-\alpha$. Lo mismo haríamos con los vértices C y D.

6. Ejercicios de aplicación

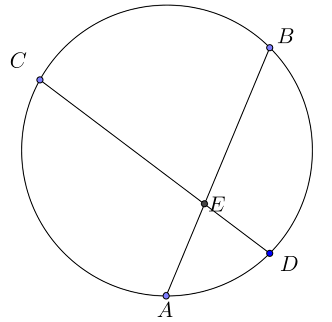
Ejercicio 1 *Los segmentos que contienen a los puntos PQRS y WXYS intersectan al círculo* C_1 *en los puntos P, Q, R, S y X. Esos mismos segmentos intersectan al círculo* C_2 *en los puntos Q, R, X e Y. Las longitudes de los segmentos* $\overline{QR}$, $\overline{RS}$ *y* $\overline{XY}$ *son, respectivamente, 7, 9 y 18. La longitud del segmento* $\overline{WX}$ *es 6 veces la del segmento* $\overline{YS}$. *¿ Cuál es la suma de las longitudes de los segmentos* $\overline{PS}$ *y* $\overline{WS}$*?*



Solución:

Según el teorema de las secantes aplicado al triángulo C_2, $\overline{QS}\cdot\overline{RS} = \overline{XS}\cdot\overline{YS}$. *Como* $\overline{QS} = \overline{QR}+\overline{RS} = 7+9 = 16$ *y además* $\overline{XS} = \overline{XY}+\overline{YS} = 18+\overline{YS}$, *obtenemos que* $16\cdot 9 = \left(18+\overline{YS}\right)\cdot\overline{YS}$, *generando la ecuación de 2º grado* $\overline{YS}^2+18\cdot\overline{YS}-144 = 0$, *cuya solución viene dada por* $\overline{YS} = \dfrac{-18\pm\sqrt{18^2+576}}{2} = \dfrac{-18\pm 30}{2} = 6$ *(la solución negativa no tiene sentido en este caso). El valor de* $\overline{WX}$ *es* $\overline{WX} = 6\cdot 6 = 36$, *el valor de* $\overline{WS}$ *es* $\overline{WS} = \overline{WX}+\overline{XY}+\overline{YS} = 36+18+6 = 60$. *Si aplicamos el teorema de las secantes al círculo* C_1 *tenemos que* $\overline{PS}\cdot\overline{QS} = \overline{WS}\cdot\overline{WX}$. *Como* $\overline{QS} = \overline{QR}+\overline{RS} = 7+9 = 16$ *se tiene que* $\overline{PS}\cdot 16 = 60\cdot 36 \Rightarrow \overline{PS} = \dfrac{60\cdot 36}{16} = 90$. *El valor que nos piden es* $\overline{PS}+\overline{WS} = 90+60 = 150$

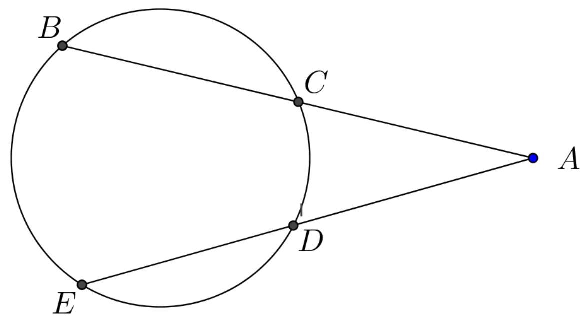
Ejercicio 2 *en la siguiente figura* $\overline{AB}$ *y* $\overline{CD}$ *son cuerdas. Sabiendo que* $\overline{ED} = 4$*,* $\overline{AE} = 5$ *y* $\overline{BE} = 20$*, hallar la longitud de* $\overline{CD}$



Solución:

Según el teorema de las cuerdas se verifica $\overline{AE} \cdot \overline{BE} = \overline{CE} \cdot \overline{DE} \Rightarrow 5 \cdot 20 = \overline{CE} \cdot 4 \Rightarrow \overline{CE} = 25$

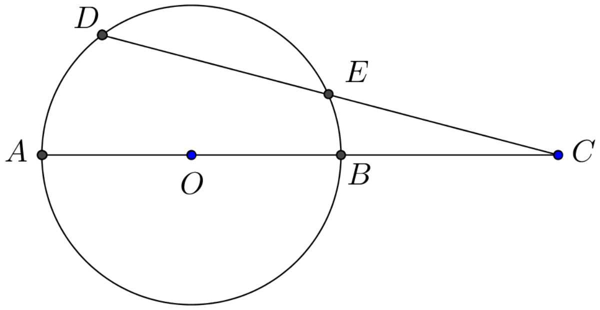
Ejercicio 3 *En la figura* $\overline{AB}$ *y* $\overline{AE}$ *son secantes. Además sabemos que* $\overline{AC} = 2$*,* $\overline{AE} = 20$ *y* $\overline{ED} = 16$*. Hallar la longitud de* $\overline{AB}$



Solución:

Se tiene que $\overline{AD} = \overline{AE} - \overline{ED} = 20 - 16 = 4$*. Según el teorema de las secantes* $\overline{AB} \cdot \overline{AC} =$
$= \overline{AE} \cdot \overline{AD} \Rightarrow \overline{AB} \cdot 2 = 20 \cdot 4 \Rightarrow \overline{AB} = 40$

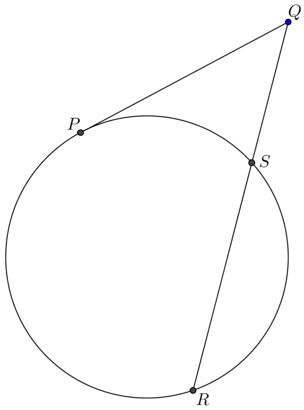
Ejercicio 4 *En la figura, O es el centro de la circunferencia,* $\overline{AC}$ *y* $\overline{DC}$ *son dos secantes,* $\overline{BC} = 6$*,* $\overline{DC} = 12$ *y* $\overline{DE} = 5$*. Hallad el diámetro de la circunferencia.*



Solución:

Se tiene que $\overline{EC} = \overline{DC} - \overline{DE} = 12 - 5 = 7$. *Según el teorema de las secantes,* $\overline{AC} \cdot \overline{CB} = \overline{DC} \cdot \overline{EC} \Rightarrow \overline{AC} \cdot 6 = 12 \cdot 7 \Rightarrow \overline{AC} = 14$. *Por otra parte* $\overline{EB} = \overline{AC} - \overline{BC} = 14 - 6 = 8$, *el diámetro de la circunferencia mide 8.*

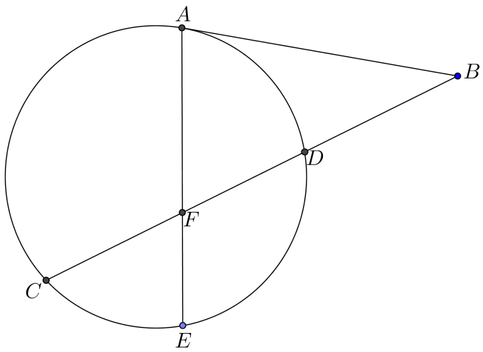
Ejercicio 5 *En la circunferencia de la figura,* $\overline{PQ}$ *es tangente en el punto P y* $\overline{RQ}$ *es secante. Si* $\overline{RQ} = 64$ *y* $\overline{RS} = 48$, *¿cuál es la longitud de* $\overline{PQ}$ *?*



Solución:

Observemos que $\overline{SQ} = \overline{RQ} - \overline{RS} = 64 - 48 = 16$. *Aplicando el teorema de la tangente y secante, se verifica que* $\overline{PQ}^2 = \overline{RQ} \cdot \overline{SR} = 64 \cdot 16 \Rightarrow \overline{PQ}^2 = 64 \cdot 16 \Rightarrow \overline{PQ} = \sqrt{64 \cdot 16} \Rightarrow \overline{PQ} = 32$

Ejercicio 6 *Sea* $\overline{AB} = 8$ *(tangente a la circunferencia en A),* $\overline{BC} = 32$, $\overline{AF} = 25$ *y* $\overline{EF} = 5$. *Si* $\overline{FD} > \overline{FC}$, *¿cual es la longitud de* $\overline{FD}$*?*



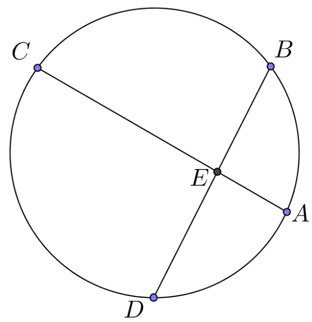
Solución:

Según el teorema de la tangente y la secante, $\overline{AB}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{BD} \Rightarrow 8^2 = 32 \cdot \overline{BD} \Rightarrow \overline{BD} = 2$. *Por tanto* $\overline{CD} = 30$. *Según el teorema de las cuerdas* $\overline{AF} \cdot \overline{FE} = \overline{CF} \cdot \overline{FD}$. *Sustituyendo valores queda* $25 \cdot 5 = (30 - \overline{FD}) \cdot \overline{FD} \Rightarrow 125 = 30 \cdot \overline{FD} - \overline{FD}^2 \Rightarrow \overline{FD}^2 - 30 \cdot \overline{FD} + 125 = 0$. *Si resolvemos esta ecuación de 2º grado* $\overline{FD} = \dfrac{30 \pm \sqrt{900 - 500}}{2} = \dfrac{30 \pm 20}{2}$. *Hay dos soluciones:*

- *Si* $\overline{FD} = 25 \Rightarrow \overline{FC} = 5$, *esta solución es válida.*
- *Si* $\overline{FD} = 5 \Rightarrow \overline{FC} = 25$, *esta solución no es válida ya que no se cumple* $\overline{FD} > \overline{FC}$

Ejercicio 7 *En la figura* $\overline{AC}$ *y* $\overline{BD}$*, se puede determinar la medida del trazo* $\overline{CE}$ *si:*

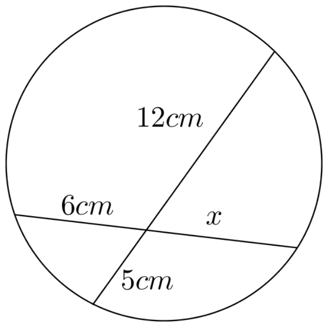
1. $\overline{AC} = 14$ *y* $\overline{DE} = 12$
2. $\overline{DB} = 16$



Solución:

Han de utilizarse las dos condiciones para poder determinar $\overline{CE}$*. Como* $\overline{AE} = 14 - \overline{CE}$*,* $\overline{BE} = \overline{BD} - \overline{DE} = 16 - 12 = 4$*, según el teorema de las cuerdas* $\overline{CE} \cdot \overline{AE} = \overline{BE} \cdot \overline{DE}$ *y teniendo en cuenta todo lo anterior se obtiene la ecuación* $(14 - \overline{CE}) \cdot \overline{CE} = 4 \cdot 12 \Rightarrow \overline{CE}^2 - 14 \cdot \overline{CE} + 48 = 0$*, resolvemos esta ecuación de 2º grado* $\overline{CE} = \dfrac{14 \pm \sqrt{196 - 192}}{2} =$
$= \dfrac{14 \pm 2}{2}$ *Obtenemos dos soluciones* $\overline{CE} = 8$ *o bien* $\overline{CE} = 6$

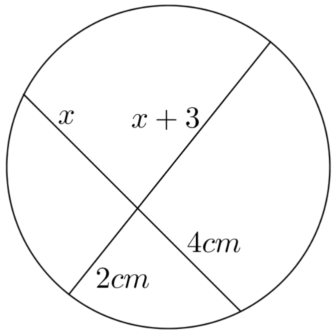
Ejercicio 8 *Calcula* x



Solución:

Según el teorema de las cuerdas $6x = 5 \cdot 12 \Rightarrow 6x = 60 \Rightarrow x = 10$

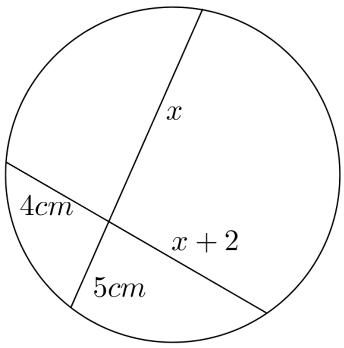
Ejercicio 9 *Calcula* x



Solución:

Según el teorema de las cuerdas $4x = 2(x + 3) \Rightarrow 4x = 2x + 6 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$

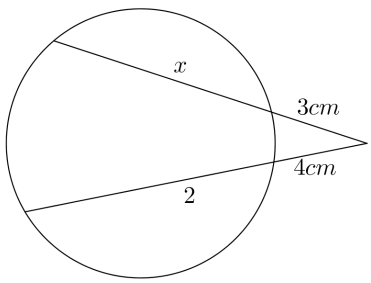
Ejercicio 10 *Calcula* x



Solución:

Por el teorema de las cuerdas $5x = 4(x + 2) \Rightarrow 5x = 4x + 8 \Rightarrow x = 8$

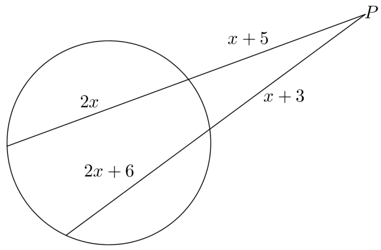
Ejercicio 11 *Calcula* x



Solución:

Según el teorema de las secantes $3(x + 3) = 4 \cdot 6 \Rightarrow 3x + 9 = 24 \Rightarrow 3x = 15 \Rightarrow x = 5$

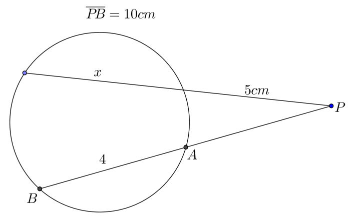
Ejercicio 12 *Calcula* x



Solución:

Según el teorema de las secantes $(3x+9)\cdot(x+3) = (3x+5)\cdot(x+5)$ *con lo que obtenemos la ecuación de primer grado* $\cancel{3x^2} + 9x + 9x + 27 = \cancel{3x^2} + 15x + 5x + 25 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1cm$

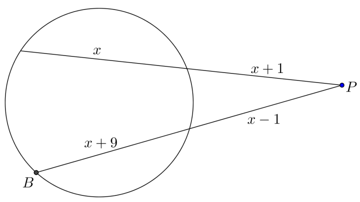
Ejercicio 13 *Calcula* x *sabiendo que* $\overline{PB} = 10cm$



Solución:

Según el teorema de las secantes $5\cdot(5+x) = 6\cdot 10 \Rightarrow 25+5x = 60 \Rightarrow 5x = 35 \Rightarrow x = 7\ cm$

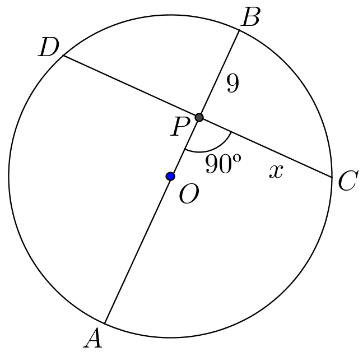
Ejercicio 14 *Calcula* $\overline{PB}$



Solución:

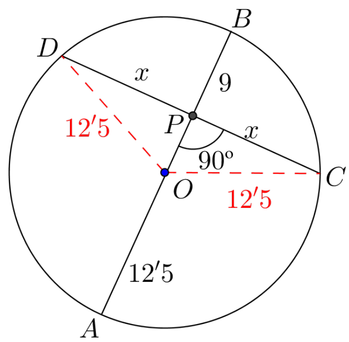
Según el teorema de las secantes $(2x+8)\cdot(x-1) = (2x+1)(x+1) \Rightarrow \cancel{2x^2} - 2x + 8x - 8 =$
$= \cancel{2x^2} + 2x + x + 1 \Rightarrow 3x = 9 \Rightarrow x = 3.$ *Como* $\overline{PB} = 2x+8 \Rightarrow \overline{PB} = 14$

Ejercicio 15 *si* $\overline{OA} = 12'5cm$, *calcula* x



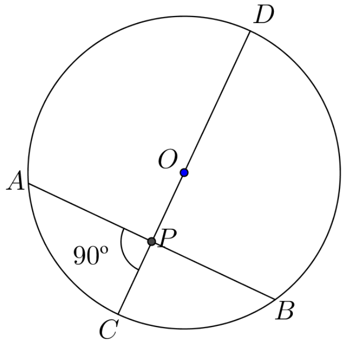
Solución:

A partir de los datos completamos la figura, quedándose así:



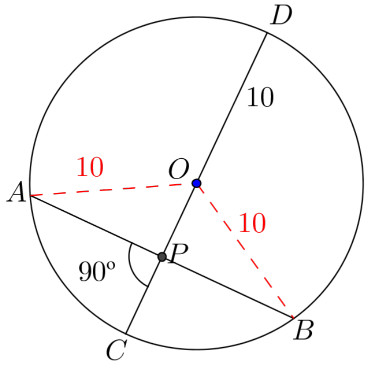
Como $\overline{OP} = \sqrt{12'5^2 - x^2} \Rightarrow \overline{PA} = 12'5 + \sqrt{12'5^2 - x^2}$*. Según el teorema de las cuerdas* $9 \cdot (12'5 + \sqrt{12'5^2 - x^2}) = x^2$*. Esta ecuación la podemos poner en la forma* $\sqrt{12'5^2 - x^2} =$ $= \left(\frac{x}{3}\right)^2 - 12'5$, *que elevándola al cuadrado se queda en* $\cancel{12'5^2} - x^2 = \left(\frac{x}{3}\right)^4 - 25\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \cancel{12'5^2} \Rightarrow$ $\frac{1}{81}x^4 - \left(\frac{34}{9}\right)x^2 = 0$, *la solución válida, en este caso, es* $x = \sqrt{306}$ *(el lector debe revisar los cálculos cuyo desarrollo secuencial he omitido por tedioso)*

Ejercicio 16 *si* $\overline{OD} = 10\ m$, $\overline{AP} = 6\ m$ *calcula* $\overline{CP} =$



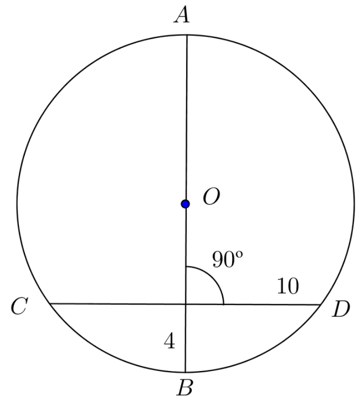
Solución:

A partir de los datos completamos la figura, quedándose así:

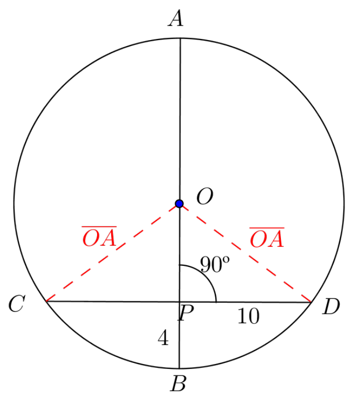


Observando la figura podemos afirmar que $\overline{AP} = \overline{BP} = 6 \Rightarrow \overline{OP} = \sqrt{100-36} = 8 \Rightarrow \overline{PD} = 18$. *Por tanto* $\overline{CP} = 20 - 18 = 2$

Ejercicio 17 *Calcula* $\overline{OA}$

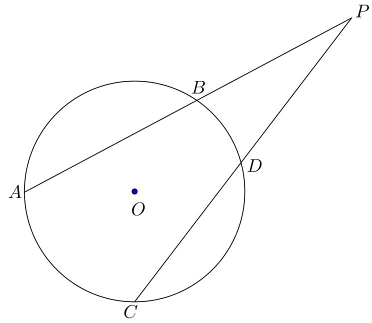


Solución:



Como el triángulo OCD es isósceles, $\overline{CP} = 10$. *Según el teorema de las cuerdas* $4 \cdot \overline{AP} = 100 \Rightarrow \overline{AP} = 25$. *Por el Teorema de Pitágoras* $\overline{OP} = \sqrt{\overline{OA}^2 - 100}$, *por tanto* $\overline{OA} = \overline{AP} - \overline{OP} \Rightarrow \overline{OA} = 25 - \sqrt{\overline{OA}^2 - 100}$, *o lo que es lo mismo,* $\sqrt{\overline{OA}^2 - 100} = 25 - \overline{OA}$ *y elevando ambos miembros de la igualdad al cuadrado obtenemos* $\cancel{\overline{OA}^2} - 100 = 625 - 50 \cdot \overline{OA} + \cancel{\overline{OA}^2} \Rightarrow \overline{OA} = 14'5$

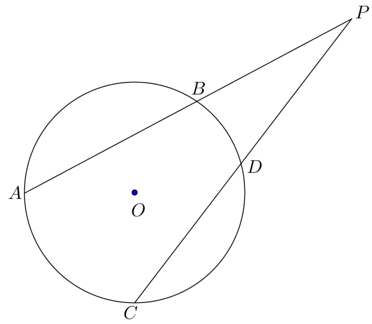
Ejercicio 18 *Si* $\overline{PC} = 24cm,\ \overline{AB} = 10cm,\ \overline{PA} = 16cm,$ *calcula* $\overline{DC}$



Solución:

Se tiene que $\overline{PB} = \overline{PA} - \overline{AB} = 16 - 10 = 6$. *Según el Teorema de las Tangentes* $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = = \overline{PC} \cdot \overline{PD} \Rightarrow 16 \cdot 6 = 24 \cdot \overline{PD} \Rightarrow \overline{PD} = 4$. *Por tanto* $\overline{DC} = \overline{PC} - \overline{PD} = 24 - 4 = 20\ cm$

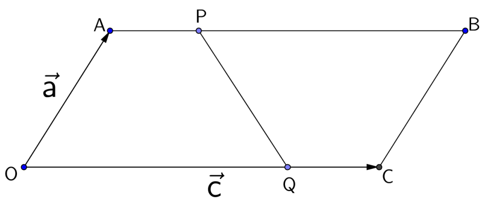
Ejercicio 19 *Si* $\overline{PA} = (23 + x)cm,\ \overline{PB} = (2x)cm,\ \overline{PC} = (18 + x)cm$ *y* $\overline{PD} = (7 - x)cm,$ *calcula* x



Solución:

Según el teorema de las secantes $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$, *es decir que se obtiene la ecuación de segundo grado* $(23 + x) \cdot 2x = (18 + x) \cdot (7 - x) \Rightarrow 46x + 2x^2 = 126 + 7x - 8x - x^2$ *trasponiendo al miembro de la izquierda y agrupando términos se obtiene* $x^2 + 19x - 42 = 0$, *cuya solución es* $x = \dfrac{-19 \pm \sqrt{361 + 168}}{2} = \dfrac{-19 \pm 23}{2}$. *Al ser* x *una distancia, su valor es positivo y solo es válida la solución positiva de la anterior ecuación, es decir,* $x = 2$

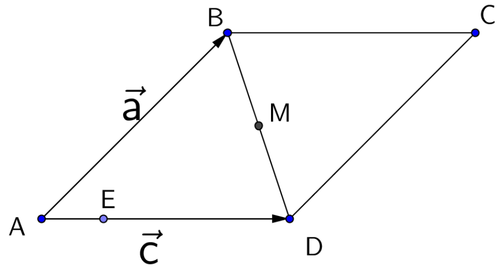
Ejercicio 20 $OABC$ *es un paralelogramo en el que* $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ *y* $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. P *es un punto de* $\overline{AB}$ *tal que* $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AP} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, *siendo* Q *el punto de* $\overline{OC}$ *tal que* $\overrightarrow{OQ} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{OC}$. *Halla, en términos de* $\vec{a}$ *y* $\vec{c}$ *el vector* $\overrightarrow{PQ}$. *Da el resultado en la forma más simplificada posible.*



Solución:

Según la relación de Chasles se verifica que $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}$*. Si despejamos* $\overrightarrow{PQ}$ *obtenemos* $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{AP}=\dfrac{2}{3}\vec{c}-\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{c}$*, al ser* $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$*. Luego* $\overrightarrow{PQ}=\dfrac{1}{6}\vec{c}-\vec{a}$

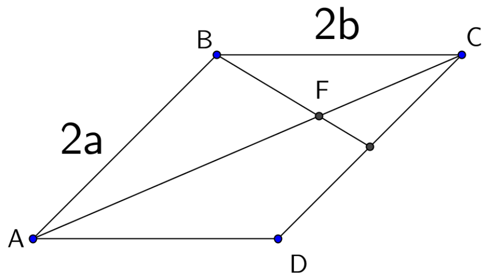
Ejercicio 21 *Sea el paralelogramo* $ABCD$*. Sea* M *un punto del segmento* BD *tal que verifica la condición* $BM:MD=1:1$ *y sea* E *un punto del segmento* AD *tal que* $AD:DE=K:1$*. Sabemos que* $\overrightarrow{ME}=3\vec{c}-\dfrac{1}{2}\vec{a}$*. Halla el valor de* k*.*



Solución:

Se tiene que $\vec{c}-\vec{a}=\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BM}\Rightarrow\overrightarrow{BM}=\dfrac{\vec{c}-\vec{a}}{2}$*. Por otra parte* $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{ME}$ *con lo cual* $\overrightarrow{AE}=\vec{a}+\dfrac{\vec{c}-\vec{a}}{2}+3\vec{c}-\dfrac{1}{2}\vec{a}\Rightarrow\overrightarrow{AE}=\dfrac{7}{2}\vec{c}$*. Como* $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}$*, se tiene que* $\vec{c}=\dfrac{7}{2}\vec{c}+\overrightarrow{ED}\Rightarrow\overrightarrow{ED}=-\dfrac{5}{2}\vec{c}\Rightarrow\overrightarrow{DE}=\dfrac{5}{2}\vec{c}$*. Al ser* $\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{DE}\Rightarrow\vec{c}=k\cdot\dfrac{5}{2}\vec{c}\Rightarrow k=\dfrac{2}{5}$

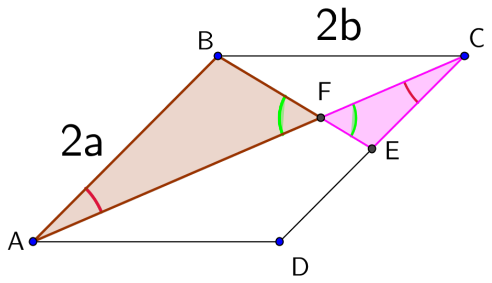
Ejercicio 22 *Consideremos el siguiente paralelogramo:*



en donde $\overrightarrow{CE}:\overrightarrow{ED}=1:1$*. Demuestra que* $\overrightarrow{AF}:\overrightarrow{FC}=2:1$

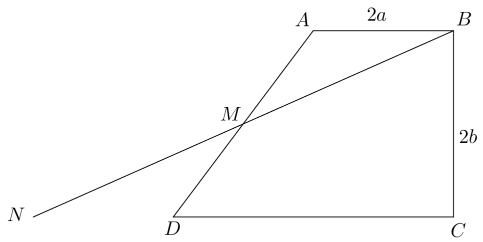
Solución:

En la siguiente figura los ángulos señalados en rojo son iguales al tratarse de ángulos internos alternos. Los ángulos señalados en verde también lo son al tratarse de ángulos opuestos por el vértice.



Según el criterio de semejanza AA, los triángulos AFB y CFE son semejantes y por tanto, al ser $CE = ED$, $\dfrac{AF}{2a} = \dfrac{FC}{a} \Rightarrow \dfrac{AF}{FC} = \dfrac{2a}{a} = \dfrac{2}{1}$

Ejercicio 23 *Consideremos el siguiente trapecio $ABCD$*



en el que se verifican las siguientes propiedades:

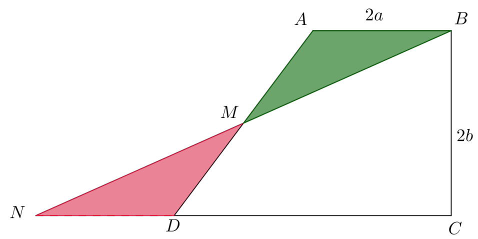
i) $DC : AB = 2 : 1$

ii) $AM : MD = 1 : 1$

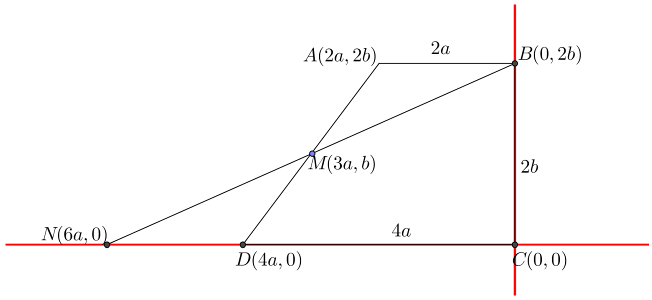
iii) $BM : MN = 1 : 1$

Demostrar que CDN es una línea recta.

Solución:



Los triángulos rojo y verde son iguales al ser semejantes con razón de semejanza igual a 1 (tienen dos lados iguales y el ángulo comprendiso entre ellos es el mismo al ser opuestos por el vértice. Es el criterio de semejanza LAL). El triángulo rojo se puede obtener girando el triángulo verde, que se acoplará a continuación de lado dc al ser paralelas las rectas AB y DC. Podríamos resolver de forma algebraica este ejercicio. Hagamos una traslación llevando el punto C al origen de coordenadas como se indica en la siguiente figura:



Como $DC : AB = 2 : 1 \Rightarrow DC = 4a$, por tanto $D(4a, 0)$. Al ser $AM : MD = 1 : 1$, M es el punto medio de AD con lo que $M(3a, b)$. Por último, $BM : MN = 1 : 1$ nos indica que M es también el punto medio de BN y por ello $N(6a, 0)$Los puntos $C(0, 0)$, $D(4a, 0)$ y $N(6a, 0)$ están alineados, pertenecen a la recta $y = 0$ que es el eje de abcisas.