TEMA 7

SERIES INTEGRALES Y TRANSFORMADA DE FOURIER

Funciones periódicas

Diremos que una función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es periódica de periodo T o bien que es T-periódica si: $f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Evidentemente una función $f(x)$ T-periódica ha de estar definida $\forall x \in \mathbb{R}$.

- Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones de periodo T, entonces $h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ es una función T-periódica, esto es así ya que:

$$h(x+T) = \alpha f(x+T) + \beta g(x+T) = \alpha f(x) + \beta g(x) = h(x)$$

- Si $f(x)$ es una función T-periódica $\forall n \in \mathbb{Z}$ se verifica que $f(x + n \cdot T) = f(x)$. Para demostrar esto hay que proceder por inducción. Para $n = 1$ es la definición de función T-periódica. Supongamos que la propiedad se verifica para $n = k$, es decir que se cumple:

$$f(x+kT) = f(x)$$

Vamos a probar que también se cumple para $n = k+1$:

$$f[x+(k+1)T] = f[(x+T)+k\cdot T] = f(x+T) = f(x).$$

Podemos concluir diciendo que si T es el periodo de f entonces $\ldots -3T, -2T, -T, T, 2T, 3T, \ldots$ también son periodos de f. Llamaremos <u>periodo principal</u> (o primitivo) de f al menor de todos los periodos no negativos.

En lo que sigue utilizaremos las siguientes expresiones:

$$\cos A \cdot \cos B = \frac{1}{2}\left[\cos(A+B) + \cos(A-B)\right]$$

$$\operatorname{sen} A \cos B = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(A+B) + \operatorname{sen}(A-B)\right]$$

$$\operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} B = +\frac{1}{2}\left[\cos(A-B) - \cos(A+B)\right]$$

Veamos el porqué de esto:

Según las propiedades del ángulo suma:

$$(I)\quad \cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \cancel{\operatorname{sen} b}$$
$$(II)\quad \cos(a-b) = \cos a \cos b + \cancel{\operatorname{sen} a} \operatorname{sen} b$$

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cdot \cos b \Rightarrow \cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$

Si restamos (II) − (I) nos queda:

$$\cos(a-b) - \cos(a+b) = 2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \Rightarrow \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) \cdot \cos(a+b)\right]$$

De la misma manera tenemos que:

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \cancel{\operatorname{sen} b}$$
$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cos b - \cancel{\cos a} \operatorname{sen} b$$

$$\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b) = 2\cos b \operatorname{sen} a \Rightarrow \operatorname{sen} a \cos b = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)\right]$$

Ejemplos de funciones periódicas son $f(x) = \operatorname{sen} x$, $f(x) = \cos x$ con periodo $T = 2\pi$. Funciones no periódicas son $f(x) = e^x$, $f(x) = \ln x$, $f(x) = x^2$.

Lo que pretendemos en este tema es representar funciones periódicas de periodo 2π en términos de las funciones 2π-periódicas simples ($\cos x$, $\operatorname{sen} x$, $\cos nx$, $\operatorname{sen} nx$, etc).

La función $f(x) = \operatorname{sen} nx$ es periódica de periodo 2π ya que:

$$\operatorname{sen}[n(x+2\pi)] = \operatorname{sen}[nx + 2n\pi] = \operatorname{sen} nx \underbrace{\cos 2n\pi}_{=1} + \cos nx \underbrace{\operatorname{sen} 2n\pi}_{=0}$$

$$= \operatorname{sen} nx.$$

Llamamos sistema trigonométrico al conjunto

$\{1, \cos x, \operatorname{sen} x, \cos 2x, \operatorname{sen} 2x, \ldots, \cos nx, \operatorname{sen} nx, \ldots\}$ $n \in \mathbb{N}$.

El sistema trigonométrico tiene una propiedad fundamental y es que es ortogonal en $[-\pi, \pi]$, es decir la integral en $[-\pi, \pi]$ del producto de dos cualesquiera funciones diferentes de este sistema es cero:

a) $$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \operatorname{sen} nx \, dx = 0$$

b) $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \operatorname{sen} nx \, dx = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

c) $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos mx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \pi & \text{si } m = n \end{cases}$$

d) $$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \cdot \operatorname{sen} mx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \pi & \text{si } m = n \end{cases}$$

Vamos a demostrar las 4 propiedades anteriores:

a) • $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx \, dx = \frac{1}{n} \operatorname{sen}(nx) \Big]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{n} \left(\operatorname{sen} n\pi - \operatorname{sen}(-n\pi) \right) =$

$= \dfrac{1}{n} \left(\operatorname{sen} n\pi + \operatorname{sen} n\pi \right) = \dfrac{2}{n} \overbrace{\cancel{\operatorname{sen} n\pi}}^{=0} = 0$

$\operatorname{sen}(-n\pi) = -\operatorname{sen} n\pi$

• $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \operatorname{sen} nx \, dx = -\frac{1}{n} \cos nx \Big]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{n} \left(-\cos n\pi + \cos(-n\pi) \right)$

$= -\dfrac{1}{n} \left(-\cos n\pi + \cos n\pi \right) = 0$

$\cos(-n\pi) = \cos n\pi$

b) Según las identidades anteriores, de transformación de sumas en producto, tenemos que:

$$\operatorname{sen} nx \cdot \cos mx = \frac{1}{2} \left[\operatorname{sen}(n+m)x + \operatorname{sen}(n-m)x \right]$$

Luego:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \cos mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(n+m)x \, dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(n-m)x \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 0 .$$

c) Aplicando las fórmulas de transformación de sumas en productos tenemos que:

$$\cos(nx)\cdot\cos(mx) = \frac{1}{2}\left[\cos(n+m)x + \cos(n-m)x\right].$$ Por tanto:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cdot\cos(mx)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n+m)x\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n-m)x\,dx$$

- Si $n \neq m$, según el apartado a):

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n+m)x\,dx = 0 = \int_{-\pi}^{\pi}\cos(n-m)x\,dx \Rightarrow \int_{-\pi}\cos(nx)\cos(mx)\,dx = 0$$

- Si $n = m$:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n+m)x\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\cos 2nx\,dx = 0$$ según apartado a)

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n-m)x\,dx = \int_{\pi}^{\pi}\cos 0\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}dx = \pi-(-\pi) = 2.$$

Luego: $$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cdot\cos mx\,dx = \frac{1}{2}(2\pi) = \pi$$

d) Para demostrar este apartado se procede como en c)

Series trigonométricas.

Una serie trigonométrica es una serie en la forma:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} [a_n \cdot \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)]$$ donde (a_n) y (b_n) son dos sucesiones de números reales. El factor $\frac{1}{2}$ del término independiente es un convenio que justificaremos más adelante. Lo primero que hay que observar es que todos sus sumandos son funciones periódicas de periodo 2π por lo que, si la serie es convergente, convergerá a una función periódica de periodo 2π.

Series de Fourier

Sea $f(x)$ una función 2π-periódica. La pregunta que se nos plantea es saber si podemos obtener f como suma de una serie geométrica:

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)].$$ A esta serie se le llama serie de Fourier de $f(x)$ y a los valores reales a_n y b_n se les llama coeficientes de Fourier de la serie.

Este problema se desdobla en dos:

a) Determinar los coeficientes a_n y b_n

b) Establecer si la serie de Fourier

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n\geq 1} [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)]$$ converge.

<u>Teorema</u> (fórmula de Euler para determinar los coeficientes de Fourier)

Sea $f(x)$ una función 2π-periódica que admite un desarrollo en serie trigonométrica:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)],$$ suponiendo que

esta serie converja a la función $f(x)$. Entonces:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 1.$$

<u>Demostración</u>:

Si suponemos que $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)]$,

integrando entre $-\pi$ y π:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \, dx$$

Según hemos visto anteriormente:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \, dx = 0 \quad \text{por tanto:}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\cdot 2\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

Para determinar a_n y b_n $1 \leq n < +\infty$ emplearemos el método de Euler. Este método consiste en multiplicar por $\cos mx$ y por $\operatorname{sen} mx$ la expresión:

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n \geq 1} [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)]$ y después integrar entre $-\pi$ y π. Veamos:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)\cdot \cos mx = \frac{a_0}{2}\cos(mx) + \sum_{n \geq 1}[a_n \cos(nx)\cos(mx) + b_n \operatorname{sen}(nx)\cos(mx)]$$

Si ahora integramos en $[-\pi, \pi]$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)dx = \frac{a_0}{2}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)dx}_{=0} + \sum_{n \geq 1} a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(mx)dx + b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}(nx)\cos(mx)dx}_{=0}$$

Luego:

$$\sum_{n\geq 1} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cdot\cos(mx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,dx$$

Según hemos visto anteriormente:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cdot\cos(mx)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m\neq n \\ \pi & \text{si } m=n \end{cases}.$$

Luego:

$$\sum_{n\geq 1} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\cdot\cos mx\,dx = a_n\cdot\pi = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos(nx)\,dx$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos(nx)\,dx.$$

De igual forma si ahora multiplicamos la expresión:

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}[a_n\cos(nx) + b_n\operatorname{sen}(nx)]$ por $\operatorname{sen} mx$ queda:

$$f(x)\operatorname{sen}(mx) = \frac{a_0}{2}\cdot\operatorname{sen}(mx) + \sum_{n\geq 1}\left[a_n\cos(nx)\operatorname{sen}(mx) + b_n\operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}(mx)\right]$$

Si ahora integramos entre $-\pi$ y π:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(mx)\,dx = \frac{a_0}{2}\underbrace{\cancel{\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}(mx)\,dx}}_{=0} + \sum_{n\geq 1}\Big[a_n\underbrace{\cancel{\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\operatorname{sen}(mx)\,dx}}_{=0} + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sen}(nx)\cdot\operatorname{sen}(mx)\,dx\Big]$$

Luego:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{sen}(mx)\,dx = \sum_{n\geq 1} b_n \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(nx)\cdot\text{sen}(mx)\,dx$$

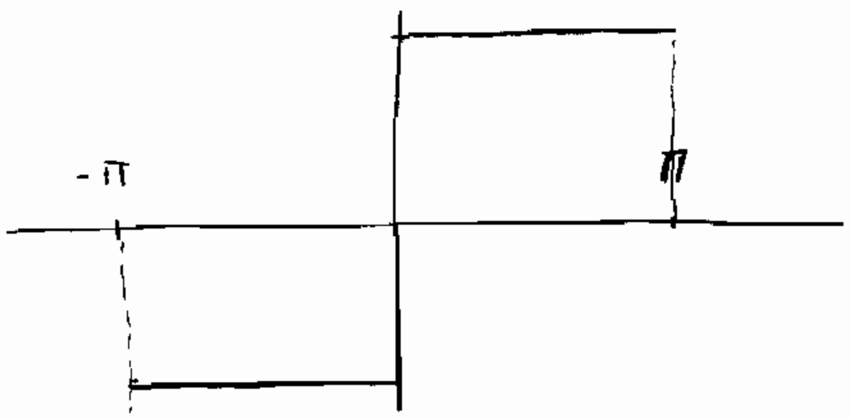
Teniendo en cuenta que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(mx)\cdot\text{sen}(nx)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m\neq n \\ \pi & \text{si } n=m \end{cases}$$ queda:

$$b_n\cdot\pi = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\text{sen}(nx)\,dx \Rightarrow b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{sen}(nx)\,dx.$$

Ejemplo: determinar la serie de Fourier de la función:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } -\pi \leq x < 0 \\ x & \text{si } 0\leq x < \pi \end{cases} \quad \text{y } f(x+2\pi) = f(x).$$



Calculemos los coeficientes de Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -x\,dx + \int_{0}^{\pi} x\,dx\right] = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \, dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -x\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi} x\cos nx\,dx\right]$$

$$\int x\cos nx\,dx \text{ (por partes) } \left\{\begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \cos nx\,dx \Rightarrow v = \frac{1}{n}\operatorname{sen} nx \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{1}{n}x\operatorname{sen} nx - \frac{1}{n}\int \operatorname{sen} nx\,dx = \frac{1}{n}x\operatorname{sen} nx + \frac{1}{n^2}\cos nx$$

Entonces:

- $$\int_{-\pi}^{0} -x\cos nx\,dx = -\left[\frac{1}{n}x\operatorname{sen} nx + \frac{1}{n^2}\cos nx\right]_{-\pi}^{0} =$$

$$= -\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2}\cos n\pi\right) = \frac{-1}{n^2}\left(1 - \cos n\pi\right) = \frac{-1}{n^2}\left[1 - (-1)^n\right]$$

- $$\int_{0}^{\pi} x\cos nx\,dx = \left[\frac{1}{n}x\operatorname{sen} nx + \frac{1}{n^2}\cos nx\right]_{0}^{\pi} = \frac{1}{n^2}\cos n\pi - \frac{1}{n^2} =$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[(-1)^n - 1\right]$$

Luego:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}(-1)^n + \frac{1}{n^2}(-1)^n - \frac{1}{n^2}\right]$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\cdot\left[\frac{-2}{n^2} + \frac{2}{n^2}(-1)^n\right] = \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ -\frac{4}{n^2\pi} & n \text{ impar} \end{cases}$$

Por tanto: $a_{2k+1} = \frac{-4}{\pi(2k+1)^2}$ $\quad a_{2k} = 0$

Del mismo modo:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot \operatorname{sen} nx\, dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -x \operatorname{sen} nx\, dx + \int_{0}^{\pi} x \operatorname{sen} nx\, dx\right]$$

$$\int x \operatorname{sen} nx\, dx \text{ (por partes) } \left\{\begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \operatorname{sen} nx\, dx \Rightarrow v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{array}\right\} =$$

$$= -\frac{1}{n} x \cos nx + \frac{1}{n}\int \cos nx\, dx = -\frac{1}{n} x \cos nx + \frac{1}{n^2}\operatorname{sen} nx$$

$$-\int_{-\pi}^{0} x \operatorname{sen} nx\, dx = -\left[-\frac{1}{n} x \cos nx + \frac{1}{n^2}\operatorname{sen} nx\right]_{-\pi}^{0} = +\frac{1}{n}\pi \cos n\pi$$

$$= +\frac{1}{n}\pi(-1)^n$$

$$\int_{0}^{\pi} x \operatorname{sen} nx\, dx = \left[-\frac{1}{n} x \cos nx + \frac{1}{n^2}\operatorname{sen} nx\right]_{0}^{\pi} = -\frac{1}{n}\pi \cos n\pi = -\frac{1}{n}(-1)^n$$

$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ impar} \\ -\frac{1}{n} & \text{si } n \text{ par.} \end{cases}$$

Por tanto:

$$f(x) = \sum_{K=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2K+1)^2}\cos(2K+1)\pi + \frac{1}{2K+1}\operatorname{sen}(2K+1)\pi \cancel{-\frac{1}{2K}\operatorname{sen} 2K\pi}^{=0}$$

$$f(x) = \sum_{K=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2K+1)^2}\cos(2K+1)\pi + \frac{1}{2K+1}\operatorname{sen}(2K+1)\pi.$$

CONVERGENCIA DE LA SERIE DE FOURIER

Supongamos que $f(x)$ es una función 2π-periódica para la que existen $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$, $b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\,dx$ con $n \geq 1$, además $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$. Si la función es continua o continua a trozos (continua salvo en un número finito de puntos del intervalo) podemos calcular la serie de Fourier. Es conveniente que la serie de Fourier así obtenida converja y tenga por suma la función $f(x)$. La mayoría de las funciones con las que trabajaremos verifican esto salvo en los saltos.

Llamamos serie de Fourier de la función 2π-periódica $f(x)$ a:

$$S(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\operatorname{sen} nx)$$

Si la suma de la serie de Fourier de $f(x)$ es la función $f(x)$ escribimos $S(x) = f(x)$

Cuando la serie de Fourier de $f(x)$ no tenga por suma $f(x)$ pondremos $f(x) \sim S(x)$. Si la serie de Fourier no converge también pondremos $f(x) \sim S(x)$

<u>Definición</u> <u>de</u> <u>función</u> <u>continua</u> <u>a trozos</u>.

Una función $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice continua a trozos en $[a,b]$ si existe una partición de $[a,b]$ $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$ tal que:

i) f restringida a cada subintervalo $f:]x_i, x_{i+1}[\longrightarrow \mathbb{R}$ es continua $\forall i = 0, 1, \dots n$

ii) f no está necesariamente definida en los extremos del intervalo x_i, x_{i+1}

iii) f no es continua en los extremos de los subintervalos x_i, x_{i+1} $\forall i = 0, 1 \dots n$ pero tiene en estos puntos una discontinuidad de salto finito, es decir:

$$\exists \lim_{x \to x_i^-} f(x) \neq \exists \lim_{x \to x_i^+} f(x)$$, es decir existen en x_i los dos límites laterales finitos pero su valor es distinto.

TEOREMA DE DIRICHLET

Este teorema nos da las condiciones suficientes de convergencia puntual de una serie de Fourier. Dice así:

Sea $f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función 2π-periódica, continua a trozos en el intervalo $[-\pi, \pi]$ y acotada en este intervalo. Entonces la serie de Fourier de la función $f(x)$:

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$$

converge en cada punto $x \in [-\pi, \pi]$. Además:

i) Si $x \in [-\pi, \pi]$ es un punto de continuidad de $f(x)$ entonces $f(x) = S(x)$

ii) Si $x \in [-\pi, \pi]$ es un punto de discontinuidad de $f(x)$ entonces:

$$S(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2} \text{ donde:}$$

$$f(x^-) = \lim_{h \to 0} f(x-h) \quad , \quad f(x^+) = \lim_{h \to 0} f(x+h)$$

La demostración del teorema de Dirichlet es difícil (me imagino que no la habrá dado).

OTRAS FORMAS DE LAS SERIES DE FOURIER

Sea la función $f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ $2L$-periódica.

Hacemos el cambio:

$$\frac{x}{L} = \frac{t}{\pi} \Rightarrow x = \frac{L}{\pi} t. \text{ Entonces:}$$

$$f(x) = f\left(\frac{L}{\pi} t\right)$$

Definimos la función $g : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ por:

$g(t) = f\left(\frac{L}{\pi} t\right)$. Entonces g es 2π-periódica:

$$g(t+2\pi) = f\left(\frac{L}{\pi}(t+2\pi)\right) = f\left(\frac{L}{\pi} t + 2L\right) = f(x+2L) =$$

$= f(x) = f\left(\frac{L}{\pi} t\right) = g(t)$. De esta forma la serie de Fourier de g es:

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt) \quad \text{donde:}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{L}{\pi} t\right) dt. \text{ Si hacemos el}$$

cambio $x = \frac{L}{\pi} \cdot t$

$$dx = \frac{L}{\pi}\, dt \Rightarrow dt = \frac{\pi}{L}\, dx$$. Además como:

$$-\pi < t < \pi \Rightarrow -\pi < \frac{\pi}{L}\cdot x < \pi \Rightarrow -L < x < L$$. Entonces:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-L}^{L} f(x)\cdot\frac{\pi}{L}\, dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\, dx$$

Procediendo de la misma manera obtenemos:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cdot \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \qquad n \geq 1$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \qquad n \geq 1$$

Ejemplo:

Determinar la serie de Fourier de:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } -2 \leq t < 1 \\ K & \text{si } -1 \leq t < 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq t < 2 \end{cases}$$ siendo f periodica de

periodo 4, es decir $f(t+4) = f(t)$.

Tenemos que $2L = 4 \Rightarrow L = 2$. Por tanto la serie de Fourier de $f(x)$ es:

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}\left[a_n\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}x\right)\right]$$

Según hemos visto:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} k\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\, k\, x\Big|_{-1}^{1} = k.$$

Si $n \geq 1$ se tiene que:

- $$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cdot \cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx = \frac{k}{2}\int_{-1}^{1} \cos\frac{n\pi}{2}x\,dx$$

$$a_n = \frac{k}{2}\cdot\frac{1}{\frac{n\pi}{2}}\cdot \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}x\Big|_{-1}^{1} = \frac{2k}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2k}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}\begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ (-1)^m\cdot\frac{2k}{(2m+1)\pi} & \text{si } n = 2m+1 \end{cases}$$

- $$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx = \frac{k}{2}\int_{-1}^{1}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)x\,dx$$

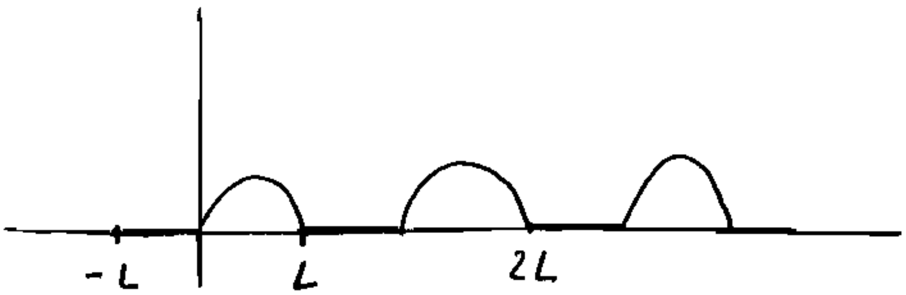
$$= -\frac{k}{2}\cdot\frac{1}{\frac{n\pi}{2}}\cdot\left[-\cos\frac{n\pi}{2}x\right]_{-1}^{1} = \frac{-k}{n\pi}\left[-\cos\frac{n\pi}{2}+\cos\frac{n\pi}{2}\right]$$

$\Rightarrow b_n = 0$. Por tanto la serie de Fourier de $f(x)$ es:

$$S(x) = k + \sum_{m\geq 0}(-1)^m\cdot\frac{2k}{(2m+1)\pi}$$

Un voltaje senoidad.

$f(t) = E.\,\text{Sen}(Wt)$ se hace pasar por un rectificador de media onda, que corte la porción negativa de la onda. Encontrar la serie de Fourier de la función periódica resultante.



$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } -L < t < 0 \\ E\cdot\text{Sen}(Wt) & 0 < t < L \end{cases}$$

El periodo es $p = 2L = \frac{2\pi}{W} \Rightarrow L = \frac{\pi}{W}$

La serie de Fourier de la funcion $u(t)$ es:

$$s(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n\geq 1}\left[a_n\cdot \text{Cos}(nWx) + b_n\,\text{Sen}(nWx)\right]$$

Tenemos que:

$$a_0 = \frac{1}{\frac{\pi}{W}}\int_{-\frac{\pi}{W}}^{\frac{\pi}{W}} f(t)\,dt = \frac{W}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{W}} E\,\text{Sen}(Wt)\,dt = -\frac{EW}{\pi}\left[\frac{\text{Cos}\,Wt}{W}\right]_0^{\frac{\pi}{W}}$$

$$\Rightarrow a_0 = -\frac{E}{\pi}\left(\text{Cos}\,\pi - \text{Cos}\,0\right) = \frac{2E}{\pi}$$

$$a_n = \frac{W}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{W}} E\,\text{sen}(Wt) \cdot \cos(nWt)\,dt$$

Teniendo en cuenta que:

$$\text{sen}\,A\,\text{sen}\,B = \frac{1}{2}\left[\text{sen}(A+B) + \text{sen}(A-B)\right]$$

$$\begin{array}{l} A = Wt \\ B = Wt \cdot n \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} A+B = (1+n)\,Wt \\ A-B = (1-n)\,Wt \end{array}$$, nos queda:

$$a_n = \frac{EW}{\pi} \int_0^{\pi/W} \frac{1}{2}\left[\text{sen}(1+n)Wt + \text{sen}(1-n)Wt\right] dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{EW}{2\pi} \cdot \left[-\frac{1}{(1+n)W} \cos(1+n)Wt\right]_0^{\pi/W} + \frac{EW}{2\pi}\left[\frac{-1}{(1-n)W} \cdot \cos(1-n)Wt\right]_0^{\pi/W}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{-E}{2(1+n)\pi}\left(\cos(1+n)\pi - 1\right) + \frac{E}{2(n-1)\pi}\left(\cos(1-n)\pi - 1\right)$$

La expresión de a_n es para $n \geq 1$ y aquí hay un problema.

Si n es par $n = 2m$ y en la expresión de a_n:

$$\cos(1+n)\pi - 1 = \cos(1+2m)\pi - 1 = -1-1 = -2$$

$$\cos(1-n)\pi - 1 = \cos(1-2m)\pi - 1 = -1-1 = -2$$

Si n es impar $n = 2m+1$ y se cumple:

$$\cos(1+n)\pi - 1 = \cos[(1+2m+1)\pi] - 1 = \cos 2(1+m)\pi - 1 = 0$$

$$\cos(1-n)\pi - 1 = \cos[(1-2m-1)\pi] - 1 = \cos(-2m)\pi - 1 = 1-1 = 0$$

De esta forma:

$$a_n = \begin{cases} -\frac{E}{2\pi}\left[\frac{-2}{1+n} + \frac{-2}{1-n}\right] = \frac{2E}{\pi} \cdot \frac{1}{(1+n)(1-n)} & \text{si } n = 2m. \\ 0 & \text{si } n = 2m+1 \end{cases}$$

De la misma forma es fácil ver que:

$$b_1 = \frac{E}{2} \quad \text{y que} \quad b_n = 0 \quad \forall n \neq 1.$$

Así la serie de Fourier de $f(t)$ es:

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \cos n\frac{\pi}{L}t + b_n \cdot \operatorname{sen} n\frac{\pi}{L}t =$$

$$= \frac{E}{\pi} + \sum_{m\geq 1} a_{2m} \cdot \cos\frac{2m\pi}{\frac{\pi}{w}}t + b_1 \operatorname{sen}\frac{\pi}{\frac{\pi}{w}}t =$$

$$= \frac{E}{\pi} \cdot \sum_{m\geq 1}\left[\frac{2E}{\pi} \cdot \frac{1}{(1+2m)(1-2m)} \cos(2mwt) + \frac{E}{2}\operatorname{sen} wt\right] =$$

$$= \frac{E}{\pi} + \frac{E}{2}\operatorname{sen} wt + \frac{2E}{\pi}\left[\frac{-1}{1\cdot 3}\cos 2wt + \frac{(-1)}{3.5}\cos 4wt + \cdots\right]$$

SERIES DE FOURIER DE FUNCIONES PARES E IMPARES

Recordemos la definición de función par e impar.

Sea $L > 0$, $f : [-L, L] \longrightarrow \mathbb{R}$. Se dice que:

a) f es par si $f(x) = f(-x) \quad \forall x \in [-L, L]$

b) f es impar si $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in [-L, L]$

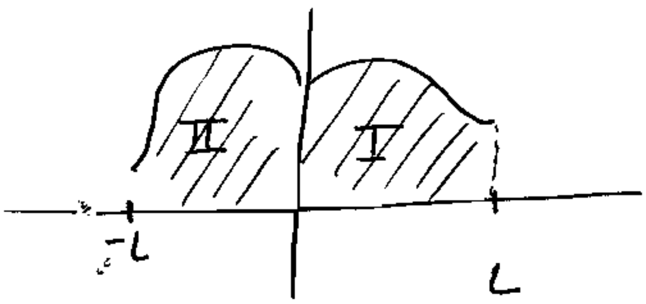
Si f es par entonces:

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{L} f(x)\,dx$$

Si f es impar entonces:

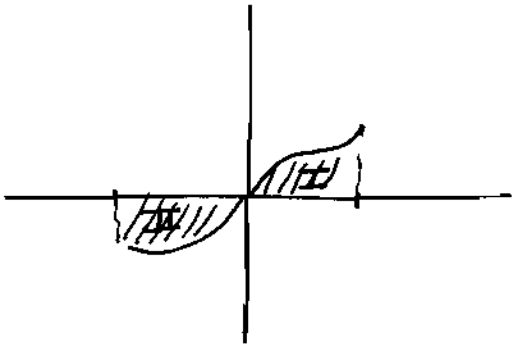
$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 0$$

Veamos un esbozo de demostración de esto:



Area I = Area II si f es par

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \int_{-L}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{L} f(x)\,dx = \text{Area II} + \text{Area I} = 2\int_{0}^{L} f(x)\,dx$$



Si f es impar $-$ Area II $=$ Area I

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \int_{-L}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{L} f(x)\,dx = \text{Area II} + \text{Area I} = 0.$$

Se verifica que: el producto de una función par por una función impar es una función impar, el producto de dos funciones impares es una función par, etc.

Teorema:

Sea f una función $2L$-periódica, integrable en $[-L, L]$

Entonces:

(1) Si f es par la serie de Fourier de f es la serie de Fourier de los cosenos dada por:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cdot \cos \frac{n\pi}{L} x \quad \text{donde:}$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cdot \cos \frac{n\pi}{L} x\,dx = \frac{2}{L} \int_{0}^{L} f(x) \cdot \cos \frac{n\pi}{L} x\,dx \quad n \geq 0$$

(2) Si f es impar la serie de Fourier de f es la serie de los senos dada por:

$$f(x) \sim \sum_{n\geq 1} b_n \cdot \operatorname{Sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad n \geq 1 \quad \text{donde}$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \cdot \operatorname{Sen} \frac{n\pi}{L}x \, dx \qquad \forall n \geq 1$$

La demostración de este teorema se basa en el hecho de que $\operatorname{Cos}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ es una función par y $\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ es una función impar. Por tanto:

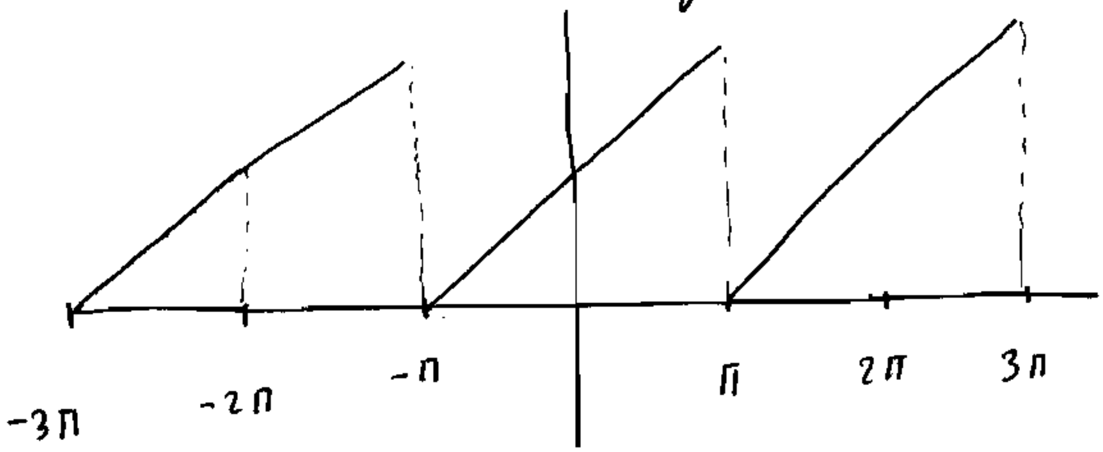
Si $f(x)$ es par $\Rightarrow f(x) \cdot \operatorname{Sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ es impar y por ello $b_n = 0$, ya que $b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \cdot \operatorname{Sen}\frac{\pi n}{L}x = 0$

Si $f(x)$ es impar, al ser $\operatorname{Cos}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ par $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) \cdot \operatorname{Cos}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ es impar y por tanto $a_n = 0$ ya que $a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \cdot \operatorname{Cos}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = 0.$

Ejemplo: obtener la serie de Fourier de la función

$f(x) = x + \pi \qquad x \in [-\pi, \pi] \quad y \quad f(x+2\pi) = f(x)$



observación: Los coeficientes de la serie de Fourier de una función suma $f_1 + f_2$ son la suma de los coeficientes de Fourier de las funciones f_1 y f_2

$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ donde:

$f_1(x) = x \qquad f_2(x) = \pi$ siendo f_1 y f_2 2π-periódicas.

Como f_1 es impar:

$$f_1(x) \sim \sum_{n \geq 1} b_n \cdot \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \, dx = \sum_{n \geq 1} b_n \cdot \operatorname{sen} nx \, dx$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cdot \operatorname{sen} nx \, dx = +\frac{2}{\pi} \left[-\frac{x}{n} \cos nx + \frac{1}{n^2} \operatorname{sen} nx \right]_0^{\pi}$$

$$\int x \operatorname{sen} nx \, dx \left\{ \begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \operatorname{sen} nx \, dx \Rightarrow v = -\frac{1}{n} \cos nx \end{array} \right\} = \frac{-x}{n} \cos nx + \frac{1}{n} \int \cos nx \, dx =$$

$$= -\frac{x}{n} \cos nx + \frac{1}{n^2} \operatorname{sen} nx$$

Luego:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi}{n}\cos n\pi\right] = -\frac{2}{n}\cos(n\pi) = -\frac{2}{n}\cdot(-1)^n = (-1)^{n+1}\cdot\frac{2}{n}$$

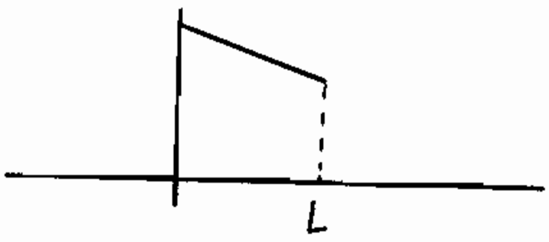
Luego:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) = \pi + \sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1}\cdot\frac{2}{n}\,\text{sen}(nx) =$$

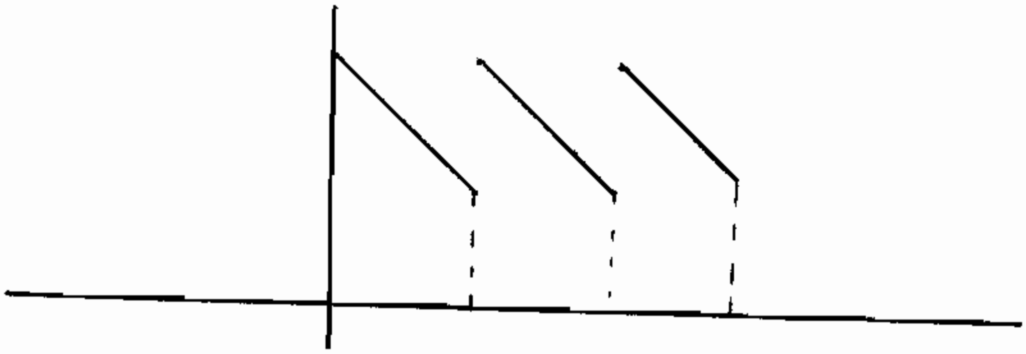
$$= \pi + 2\left[\text{sen}\,x - \frac{1}{2}\,\text{sen}\,2x + \frac{1}{3}\,\text{sen}\,3x + \cdots\right]$$

Desarrollos de medio rango

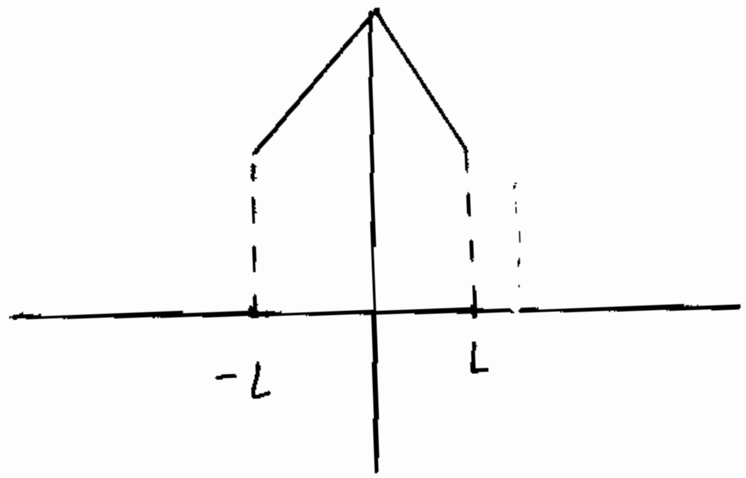
Supongamos que tenemos una función como la que indica la figura:

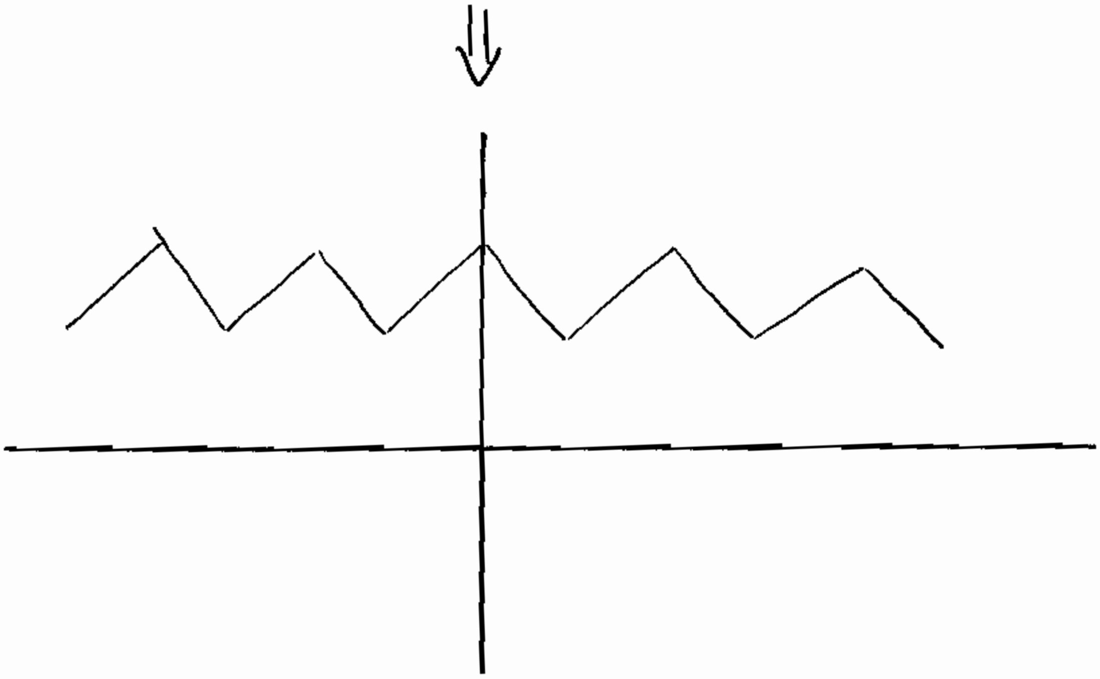


* Podemos extenderla y convertirla en una función periódica

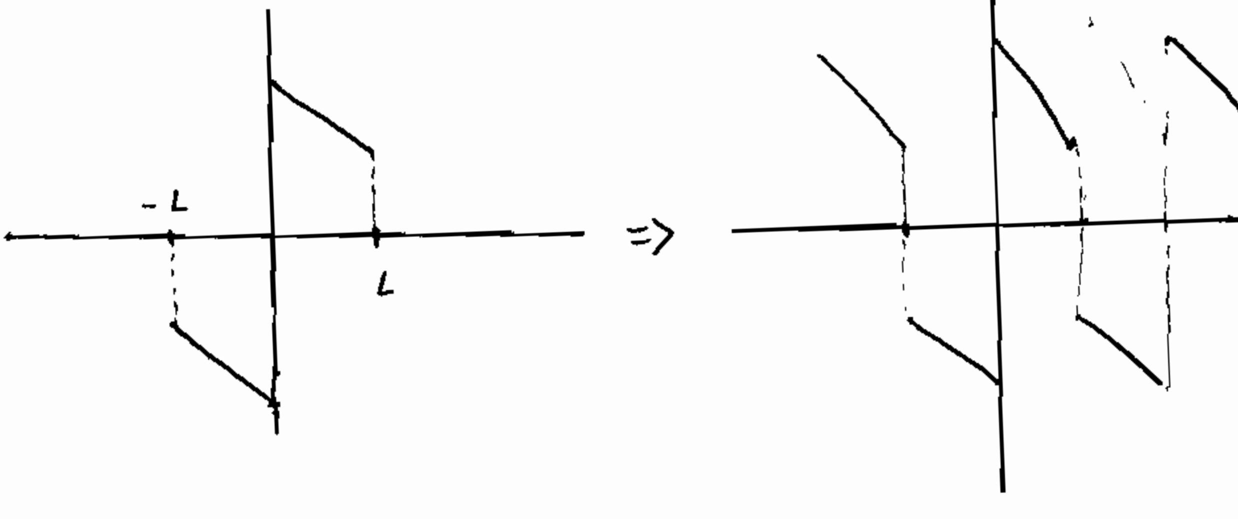


* La podemos convertir en par y luego en periódica





* Podemos convertirla en impar y luego en periódica



Hay veces que surge la necesidad práctica de usar series de Fourier de funciones que están definidas para ciertos valores entre 0 y L. Podría extenderse $f(x)$ periódicamente (con periodo L) para después representar la función extendida con una serie de Fourier, la cual incluiría términos en seno y coseno. Hay una alternativa mejor:

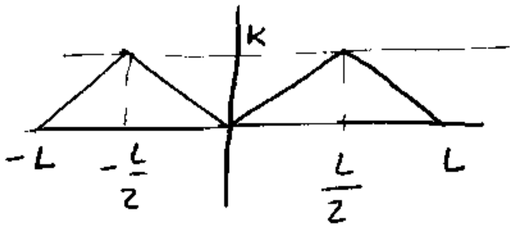
1º Extender $f(x)$ como una función par en $[-L, L]$ para despues extenderla periódicamente con periodo $2L$, obteniendo de esta forma una serie de Fourier en cosenos

2º Extender $f(x)$ como una función impar en $[-L, L]$ para después extenderla periódicamente con periodo $2L$, obteniendose de esta forma una serie de Fourier de senos.

Las series de Fourier que se obtienen según los apartados 1º y 2º se llaman "los dos desarrollos de medio rango de la función $f(x)$"

Ejemplo: Encontrar los desarrollos de medio rango de la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2K}{L}\, x & \text{si } 0 \leq x < \frac{L}{2} \\ \frac{2K}{L}\,(L-x) & \text{si } \frac{L}{2} \leq x < L \end{cases}$$



i) Función par (extensión periódica par)

Al ser $f(x)$ par de periodo L:

$$\therefore f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cdot \cos \frac{n \cdot \pi}{L} x$$

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x)\,dx = \frac{2}{L} \left(\int_0^{L/2} \frac{2K}{L} x \, dx + \int_{L/2}^{L} \frac{2K}{L} (L-x)\,dx \right)$$

$$= \frac{4K}{L^2} \left(\left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{L/2} - \left[\frac{(L-x)^2}{2} \right]_{L/2}^{L} \right) = \frac{4K}{L^2} \left(\frac{L^2}{8} + \frac{L^2}{8} \right) = K.$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cdot \cos \frac{n\pi}{L} x \, dx = \frac{2}{L} \left(\int_0^{L/2} \frac{2K}{2} x \cos \frac{n\pi}{L} x \, dx + \right.$$

$$\left. + \int_{L/2}^{L} \frac{2K}{L} (L-x) \cos \frac{n\pi}{L} x \, dx \right) = \frac{4K}{L^2} \left(\int_0^{L/2} x \cos \frac{n\pi}{L} x \, dx + \int_{L/2}^{L} (L-x) \cos \frac{n\pi}{L} x \, dx \right)$$

$$\int x \cdot \cos\frac{n\pi}{L}x\,dx \quad \left\{\begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \cos\frac{n\pi}{L}x\,dx \Rightarrow v = \frac{L}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{L}{n\pi}\,x\cdot\operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x - \int\frac{L}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x\,dx =$$

$$= \frac{L}{n\pi}\,x\operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{L}x$$

$$\int_0^{L/2} x\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx = \frac{L^2}{2n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} + \overbrace{\cancel{\frac{L^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}}}^{=0} - \frac{L^2}{n^2\pi^2} =$$

$$\frac{L^2}{2n\pi}(-1)^n - \frac{L^2}{n^2\pi^2} = \frac{L^2}{n\pi}\left[\frac{(-1)^n}{2} - \frac{1}{n\pi}\right]$$

$$\int(L-x)\cos\frac{n\pi}{L}x = L\int\cos\frac{n\pi}{L}x - \int x\cdot\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx =$$

$$= \frac{L^2}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x - \int x\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx \quad \left\{\begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \cos\frac{n\pi}{L}x\,dx \Rightarrow v = \frac{L}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x \end{array}\right.$$

$$= \frac{L^2}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x - \frac{L}{n\pi}\,x\operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x - \frac{L}{n\pi}\int\operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x\,dx =$$

$$= \frac{L^2}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x - \frac{L}{n\pi}\,x\operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\cdot\cos\frac{n\pi}{L}x.$$ Luego:

$$\int_{L/2}^{L}(L-x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx = \cancel{\frac{L^2}{n\pi}\cdot\operatorname{sen}n\pi - \frac{L^2}{n\pi}\operatorname{sen}n\pi} + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\cos n\pi - \frac{L^2}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} -$$

$$- \frac{L^2}{2n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} + \cancel{\frac{L^2}{n^2\pi^2}\cdot\cos\frac{n\pi}{2}} = \frac{L^2}{n^2\pi^2}(-1)^n + \frac{L^2}{n\pi}(-1)^{n+1} + \frac{L^2}{2n\pi}(-1)^{n+1}$$

Es decir:

$$a_n = \frac{4K}{L^2}\left[\frac{L^2}{n\pi}\left(\frac{(-1)^n}{2} - \frac{1}{n\pi}\right) + \frac{L^2}{n^2\pi^2}(-1)^n + \frac{3L^2}{2n\pi}(-1)^{n+1}\right]$$

$$a_n = \frac{4K}{L^2}\left[-\frac{L^2}{n^2\pi^2} + \frac{L^2}{n^2\pi^2}(-1)^n + \frac{L^2}{n\pi}(-1)^{n+1}\right]$$

$$a_n = \frac{-4K}{n^2\pi^2} + \frac{4K}{n^2\pi^2}(-1)^n + \frac{4K}{n\pi}(-1)^{n+1} = \begin{cases} -\frac{4K}{n\pi} & \text{si } n \text{ par} \\ -\frac{8K}{n^2\pi^2} + \frac{4K}{n\pi} & \text{si } n \text{ impar} \end{cases}$$

$$f(x) \sim \frac{K}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cdot \cos \frac{n\pi}{L} x$$

De igual forma se obtendría la extensión periódica impar.

(Esto es un follón).

FORMA COMPLEJA DE LA SERIE DE FOURIER

Hemos visto que si $f(x)$ es una función 2π-periódica la podemos desarrollar como:

$$f(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n\geq 1} [a_n \cdot \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx]$$

Como $\cos nx = \dfrac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}$ y $\operatorname{sen} nx = \dfrac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} =$

$= \dfrac{e^{-inx} - e^{inx}}{2} i$ podemos poner:

$$f(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2} \left(a_n \cdot e^{inx} + a_n \cdot e^{-inx} + i b_n e^{-inx} - i b_n \cdot e^{inx} \right)$$

$$f(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n\geq 1} \left[\frac{a_n - i b_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + i b_n}{2} e^{-inx} \right]$$

Llamando $c_0 = \frac{1}{2} a_0$ $\quad c_n = \dfrac{a_n - i b_n}{2}$ $\quad c_{-n} = \dfrac{a_n + i b_n}{2}$

nos queda:

$$f(x) \sim c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n \cdot e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{inx} +$$

$+ \sum_{n=0}^{\infty} c_{-n} e^{-inx} = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{inx}$ esta es la forma compleja de la serie de Fourier

Calculamos ahora los coeficientes complejos:

$$c_n = \frac{a_n - i b_n}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx - \frac{i}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{sen}(nx)\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot(\cos nx - i\,\text{sen}\,nx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot e^{-inx}\,dx$$

$$c_{-n} = \frac{a_n + i b_n}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx + \frac{i}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{sen}\,nx\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot(\cos nx + i\,\text{sen}\,nx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot e^{inx}\,dx$$

Podemos concluir entonces que los coeficientes complejos de la serie de Fourier son:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot e^{-inx}\,dx$$

Ejemplo: $f(x) = e^x$, $-\pi \le x \le \pi$, $f(x+2\pi) = f(x)$.

La serie de Fourier compleja es:

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{inx}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{x}\cdot e^{-inx}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-in)x}\,dx = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{1-in}\cdot e^{(1-in)x}\Big]_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1+in}{1+n^2}\cdot\left(e^{\pi-i\pi n} - e^{-\pi+i\pi n}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1+in}{1+n^2}\left[e^{\pi}(\cos n\pi - \underbrace{\cancel{i\,\text{sen}\,n\pi}}_{=0}) - e^{-\pi}(\cos n\pi + \underbrace{\cancel{i\,\text{sen}\,n\pi}}_{=0})\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1+in}{1+n^2}\left(e^{\pi}\cos n\pi - e^{-\pi}\cos n\pi\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1+in}{1+n^2}\left[e^{\pi}(-1)^n - e^{-\pi}(-1)^n\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1+in}{1+n^2}\cdot(-1)^n\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right)$$

Luego:

$$e^{x} \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1+in}{1+n^2}(-1)^n\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)\cdot e^{inx}$$

INTEGRALES DE FOURIER

En muchos problemas prácticos intervienen funciones no periódicas, surge entonces la pregunta de qué puede hacerse para generalizar el método de las series de Fourier. En este apartado veremos como para el caso de funciones no periódicas la serie de Fourier se transforma en una integral de Fourier. El método consistirá en partir de una función $f_L(x)$ que sea $2L$-periódica y haremos tender $L \longrightarrow \infty$ para romper la periodicidad.

DEFINICIÓN DE INTEGRAL DE FOURIER

Sea $f :]-\infty, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ tal que la integral $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt$ es convergente. Se define la integral de Fourier de $f(x)$ como:

$$\int_0^{+\infty} \left[A(w) \cdot \cos(wx) + B(w) \cdot \operatorname{sen}(wx) \right] dw \text{ donde}$$

$$A(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(wt)\, dt \;;\; B(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \operatorname{sen}(wt)\, dt$$

A las funciones $A(W)$ y $B(W)$ se les llama coeficientes de la integral de Fourier de $f(x)$.

Veamos un criterio que nos permita saber si la integral de Fourier es convergente.

TEOREMA DE LA INTEGRAL DE FOURIER

Sea $f:]-\infty,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua a trozos en todo intervalo finito, con derivadas laterales por la derecha y por la izquierda en todos los puntos (es decir $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ $\exists f'(x_0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, $\exists f'(x_0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$)

y tal que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$ es convergente. Entonces

existe la integral de Fourier: $\int_0^{+\infty} A(W) \cos(Wx) + B(W) \operatorname{Sen}(Wx)\, dx$

siendo el valor de esta integral:

$$\int_0^{+\infty} A(W)\cdot \cos(Wx) + B(W)\cdot \operatorname{Sen}(Wx)\, dx = \frac{1}{2}\left[f(x^+) + f(x^-)\right]$$

donde $f(x^+) = \lim_{h\to 0^+} f(x+h)$, $f'(x^-) = \lim_{h\to 0^-} f(x+h)$

Aclaremos un poco el valor de la integral de Fourier. Hemos puesto que, en el caso de ser convergente, el valor de la integral de Fourier es:

$$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = \int_0^{+\infty}[A(W)\cos(Wx)+B(W)\cdot \operatorname{sen}(Wx)]\,dW$$

- Si f es continua en x:

$$f(x^+)=f(x^-)=f(x) \Rightarrow \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}=f(x).$$

Por tanto si f es continua en x:

$$f(x)=\int_0^{+\infty}[A(W)\cdot\cos(Wx)+B(W)\cdot\operatorname{sen}(Wx)]\,dW$$

Si f es discontinua en x:

$$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = \int_0^{+\infty}[A(W)\cdot\cos(Wx)+B(W)\cdot\operatorname{sen}(Wx)]\,dW$$

Ejemplo: Encontrar la representación por integral de Fourier de la función $f(x)$

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } |x|<1 \\ 0 & \text{si } |x|>1 \end{cases}$$

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot \cos(wt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\cos(wt)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot \left.\frac{\operatorname{sen}(wt)}{w}\right|_{-1}^{1} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen} w}{w} + \frac{\operatorname{sen} w}{w}\right] = \frac{2}{w\pi}\operatorname{sen} w$$

$$B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot \operatorname{sen}(wt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\operatorname{sen}(wt)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot \left.\frac{-\cos(wt)}{w}\right|_{-1}^{1} = \frac{1}{\pi}\left(-\cos w + \cos(-w)\right) = 0$$

Luego la integral de Fourier de $f(x)$ es:

$$\int_{0}^{+\infty} A(w)\cdot\cos(wx)\,dw = \int_{0}^{+\infty}\frac{2}{w\pi}\cdot\operatorname{sen} w\cdot\cos(wx)\,dw$$

$$\frac{2}{\pi}\cdot\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos(wx)\cdot\operatorname{sen}(w)}{w}\,dw = \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$$

Por tanto:

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos(wx)\cdot\operatorname{sen}(w)}{w}\,dw = \frac{\pi}{4}\cdot\left(f(x^+)+f(x^-)\right)$$

Como podemos expresar $f(x)$ en $[0,+\infty[$ como:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x \le 1 \\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Resulta que f tiene una discontinuidad de salto en $x = 1$

$f(1^+) + f(1^-) =$

$$f(1^+) = \lim_{h \to 0^+} f(1+h) = 0$$

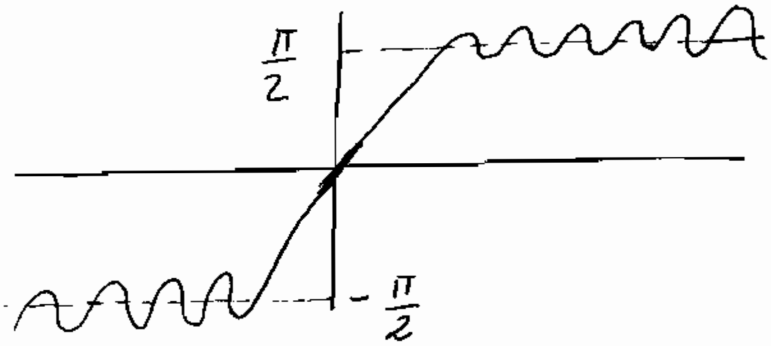
$$f(1^-) = \lim_{h \to 0^-} f(1+h) = 1$$

Por tanto:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(wx)\,\text{sen}(w)}{w}\,dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Esta integral es conocida como el factor discontinuo de Dirichlet. Si $x = 0$ la anterior integral queda como:

$$\lim_{a \to \infty} \int_0^a \frac{\text{sen}\,w}{w}\,dw = \frac{\pi}{2}$$



INTEGRALES DE FOURIER DE COSENOS Y SENOS

Al igual que ocurría con las series de Fourier:

- Si f es par

$$A(W) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t) \cos(Wt)\, dt$$

$$B(W) = 0$$

La integral de Fourier se reduce a la integral de los cosenos:

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \int_0^{\infty} A(W) \cdot \cos(Wx)\, dW$$

- Si f es impar

$$A(W) = 0$$

$$B(W) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} B(W) \operatorname{sen} W(x)\, dW$$

La integral de Fourier se reduce a la integral de los senos:

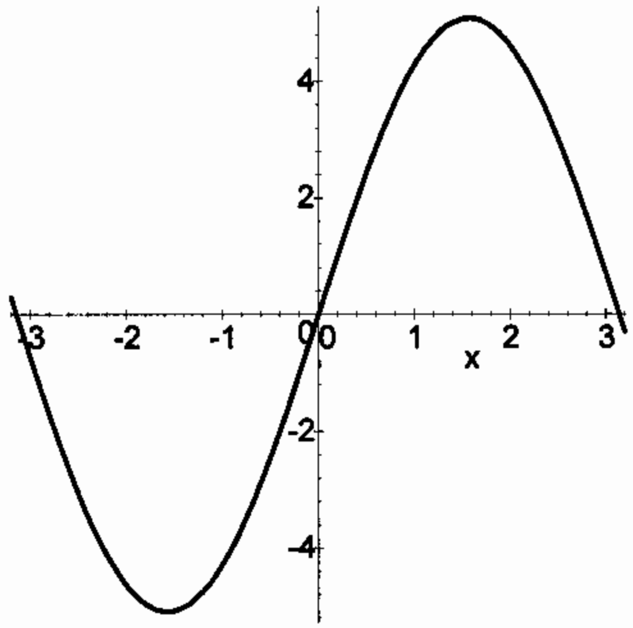
$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \int_0^{\infty} B(W) \cdot \operatorname{sen}(Wx)\, dW$$

Propósito: que la serie de Fourier converge a $f(x)$ de la que procede.

GRÁFICAS DE LOS EJERCICIOS DEL TEMA SERIES, INTEGRALES Y TRANSFORMADA DE FOURIER
Ampliación de Matemáticas
Ingeniero de Telecomunicación

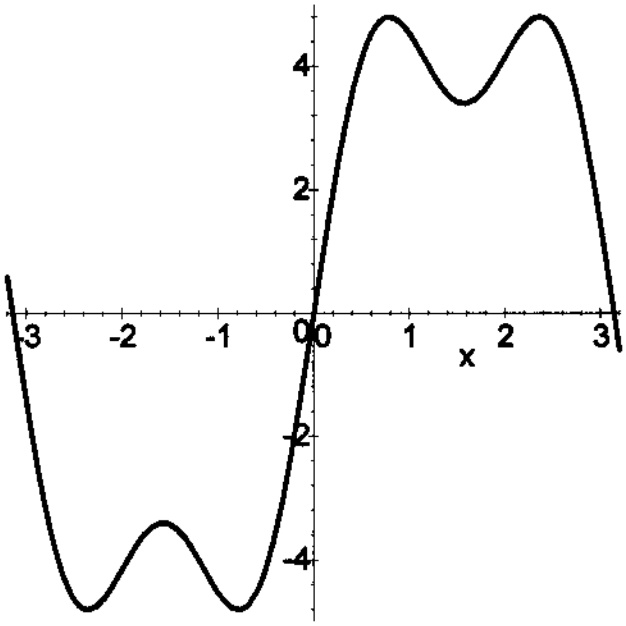
Domingo Alcaraz Candela
2005/2006

ONDA CUADRADA



$n=1$

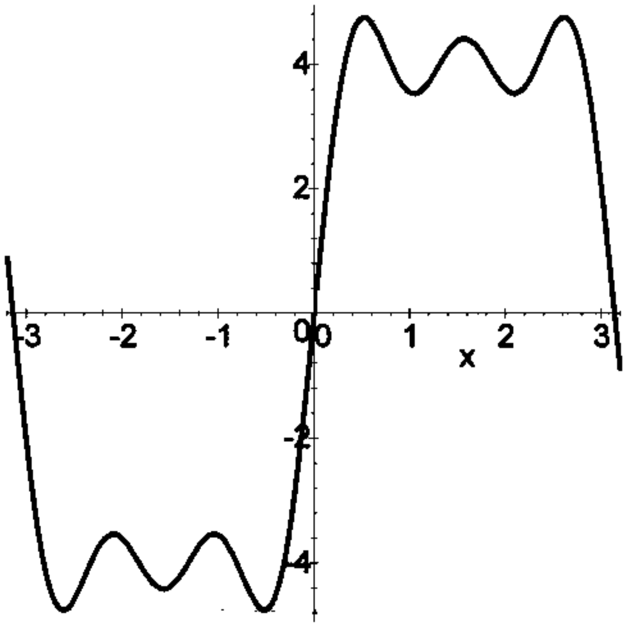
$$S_1 = \frac{4k}{\pi} \operatorname{sen} x$$



n=2

$\sum_{n=1}^{2}$

$$S_2 = \frac{16}{\pi}\left(\operatorname{sen} x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x\right)$$

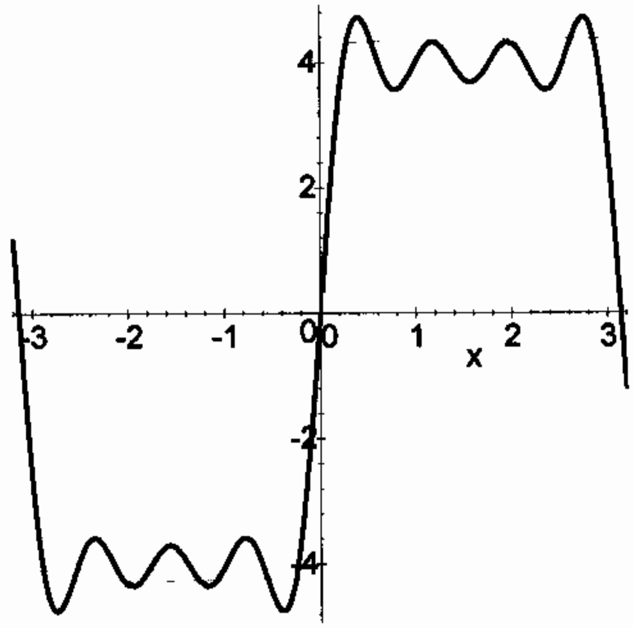


n=3

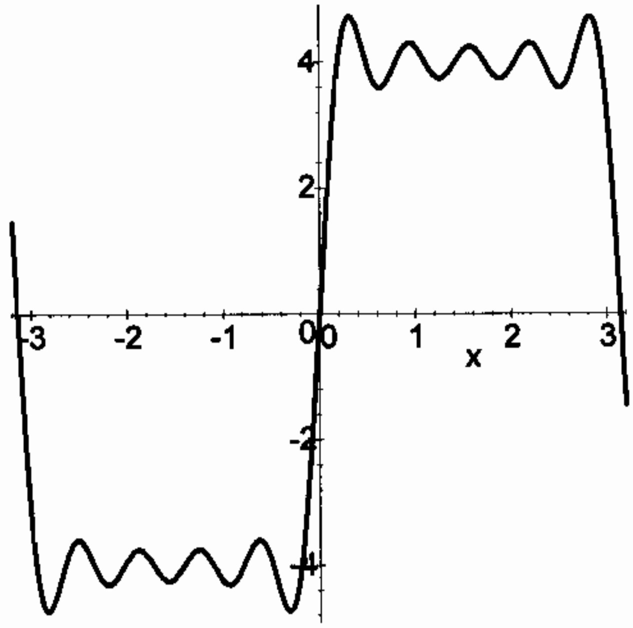
$\sum_{n=1}^{3}$

$$S_3 = \frac{16}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x\right)$$

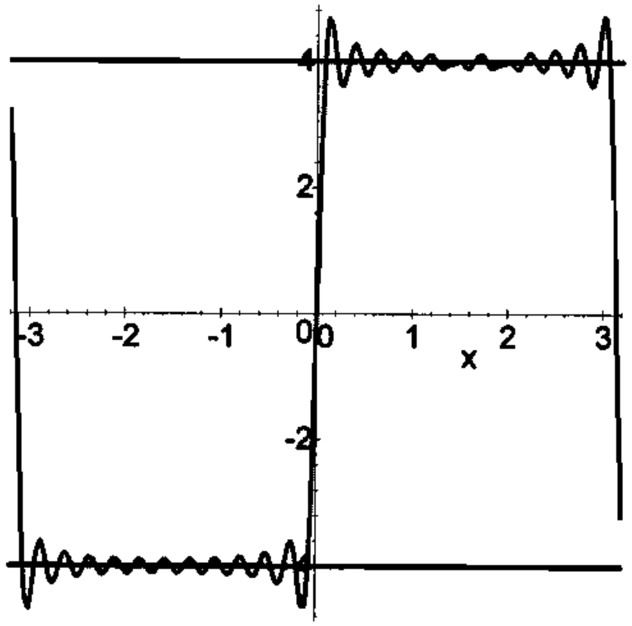
n=4



$$S_4 = \frac{16}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x\right)$$

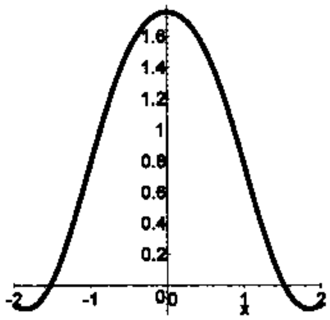


$$S_5 = \frac{16}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \frac{1}{7}\sin 7x + \frac{1}{9}\sin 9x\right)$$

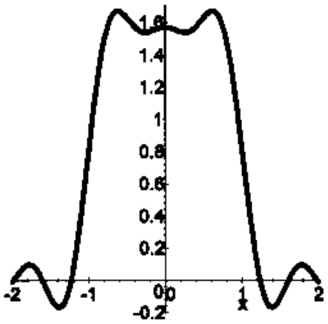


S_{12}

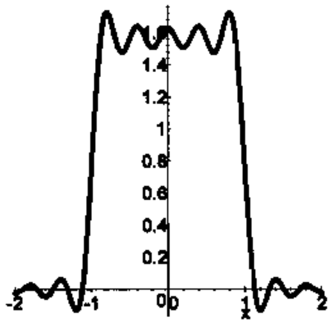
En los ptos en los que la func. es
continua la función converge a la



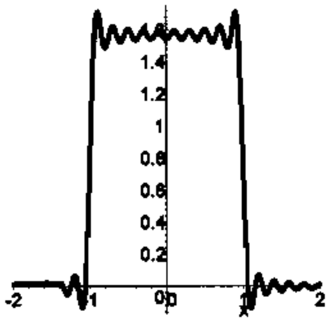
$\int_0^4 \frac{\cos wx \sin w}{w}\, dw$



$\int_0^8 \frac{\cos wx \sin w}{w}\, dw$



$\int_0^{16} \frac{\cos wx \sin w}{w}\, dw$



$\int_0^{32} \frac{\cos wx \sin w}{w}\, dw$

Si tenemos una función $f : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ no simétrica (es decir ni par ni impar):

a) Si extendemos f a una función par, definiendo la función:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } 0 \leq x \leq \infty \\ f(x) & \text{si } -\infty < x \leq 0 \end{cases}$$

Entonces la integral de Fourier de g es la integral de Fourier de coseno ya que g es par, es decir:

$$g(x) = \int_0^{+\infty} A(w) \cos(wx) \, dw \quad , \quad A(w) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos wt \, dt$$

como $g(x) = f(x) \quad \forall x \in [0, +\infty[$:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} A(w) \cdot \cos(wx) \, dw, \quad A(w) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos wt \, dt$$

b) Si extendemos f a una función impar definiendo la función:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } 0 \leq x < +\infty \\ -f(x) & \text{si } -\infty < x \leq 0 \end{cases}$$

entonces la integral de Fourier de g es la integral de Fourier de seno

$$g(x) = \int_0^{+\infty} A(W) \cdot \cos(Wx)\, dW \;, \quad A(W) = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos Wt \, dt$$

Como $g(x) = f(x) \quad \forall x \in [0, +\infty[$:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} A(W) \cdot \operatorname{sen}(WX)\, dx \;, \quad A(W) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \cos Wt \, dt$$

EVALUACION DE INTEGRALES

La representación en integrales de Fourier, integrales de Fourier de cosenos e integrales de Fourier de senos también pueden usarse para evaluar integrales. Ilustramos el método con un ejemplo.

Ejemplo: determinar las integrales de Fourier de coseno y de seno de la función $f(x) = e^{-Kx}$ con $K > 0$, $x > 0$.

Integral del coseno

$$e^{-Kx} = \int_0^{+\infty} A(W) \cdot \cos(Wx)\, dW$$

$$A(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-kt}\cdot \cos wt\, dt$$

$I = \int e^{-kt}\cdot \cos wt\, dt$. Integral por partes reiteradas

$$\left.\begin{aligned} u &= e^{-kt} \Rightarrow du = -k\cdot e^{-kt}dt \\ dv &= \cos wt\, dt \Rightarrow v = \frac{1}{w}\operatorname{sen} wt \end{aligned}\right\}$$

$$I = \frac{1}{w}\cdot e^{-kt}\cdot \operatorname{sen} wt + \frac{k}{w}\int e^{-kt}\operatorname{sen} wt\, dt$$

$$\left.\begin{aligned} u &= e^{-kt} \Rightarrow du = -k\cdot e^{-kt}dt \\ dv &= \operatorname{sen} wt\, dt \Rightarrow v = \frac{-1}{w}\cdot \cos wt \end{aligned}\right\}$$

$$I = \frac{1}{w}\cdot e^{-kt}\operatorname{sen} wt + \frac{k}{w}\left(-\frac{1}{w}\, e^{-kt}\cos wt - \frac{k}{w}\int e^{-kt}\cos wt\, dt\right.$$

$$I = \frac{1}{w}\, e^{-kt}\left(\operatorname{sen} wt - \frac{k}{w}\cos wt\right) + \frac{k^2}{w^2}\, I$$

$$I\left(1 - \frac{k^2}{w^2}\right) = \frac{1}{w}\left(\operatorname{sen} wt - \frac{k}{w}\cos wt\right)e^{-kt}$$

$$I = \frac{\frac{1}{\cancel{w}}\left(\operatorname{sen} wt - \frac{k}{w}\cos wt\right)e^{-kt}}{\frac{w^2-k^2}{w^{\cancel{2}}}} \Rightarrow I = \frac{w\operatorname{sen} wt - k\cos wt}{w^2-k^2}\, e^{-kt}$$

Luego:

$$\int e^{-kt}\cos wt\, dt = \frac{w\operatorname{sen} wt - k\cos wt}{w^2-k^2}\, e^{-kt}$$

Por tanto:

$$\int_0^{+\infty} e^{-kt}\cdot \cos(wt)\,dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-kt} \cos wt\,dt =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\frac{w \operatorname{sen} wt - k\cos wt}{w^2-k^2} e^{-kt} \right]_0^b = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{w \operatorname{sen} wb - k\cos wb}{w^2-k^2} e^{-kb} \right.$$

$$\left. + \frac{k}{w^2-k^2} \right] = \frac{k}{w^2-k^2}$$

Luego:

$$A(w) = \frac{k}{w^2-k^2}\cdot\frac{2}{\pi} \text{ Entonces:}$$

$$e^{-kx} = \int_0^{+\infty} A(w)\cdot \cos(wx)\cdot dw \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{2k}{\pi(w^2-k^2)}\cdot \cos(wx)\,dw = e^{-kx} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2k}{\pi} \int \frac{\cos(wx)}{w^2-k^2}\,dw = e^{-kx} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{\cos(wx)}{w^2-k^2}\,dw = \frac{\pi}{2k}\, e^{-kx}$$

Ahora vamos a evaluar la integral del seno de la función $f(x) = e^{-kx}$.

$$e^{-kx} = \int_0^{\infty} B(w) \cdot \operatorname{sen}(w \cdot) \, dw$$

$$B(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-kt} \cdot \operatorname{sen} wt \, dt$$

$I = \int e^{-kt} \cdot \operatorname{sen} wt \, dt$. Integral por partes reiteradas:

$$\left.\begin{aligned} u &= e^{-kt} \Rightarrow du = -k \cdot e^{-kt} dt \\ dv &= \operatorname{sen} wt \, dt \Rightarrow v = \frac{-1}{w} \cos wt \end{aligned}\right\}$$

$$I = -\frac{1}{w} e^{-kt} \cdot \cos wt - \frac{k}{w} \int e^{-kt} \cos wt \, dt$$

$$\left.\begin{aligned} u &= e^{-kt} \Rightarrow du = -k \cdot e^{-kt} dt \\ dv &= \cos wt \, dt \Rightarrow v = \frac{1}{w} \operatorname{sen} wt \end{aligned}\right\}$$

$$I = -\frac{1}{w} \cdot e^{-kt} \cos wt - \frac{k}{w} \left(\frac{1}{w} e^{-kt} \operatorname{sen} wt + \frac{k}{w} \int e^{-kt} \operatorname{sen} wt \, dt \right)$$

$$I = -\frac{1}{w} e^{-kt} \left(\cos wt + \frac{k}{w} \operatorname{sen} wt \right) - \frac{k^2}{w^2} I$$

$$I \left(1 + \frac{k^2}{w^2} \right) = -\frac{1}{w} e^{-kt} \left(\cos wt + \frac{k}{w} \operatorname{sen} wt \right)$$

$I(w^2 + k^2) = -e^{-kt} \cdot (w \cdot \cos wt + k \operatorname{sen} wt)$. Por tanto:

$$I = \int e^{-kt} \cdot \operatorname{sen} wt \, dt = -\frac{w \cos wt + k \operatorname{sen} wt}{w^2 + k^2} e^{-kt}$$

de este modo:

$$\int_0^{\infty} e^{-kt} \operatorname{sen} wt \, dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} e^{-kt} \operatorname{sen} wt \, dt =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[- \frac{w \cos wt + k \operatorname{sen} wt}{w^2+k^2} e^{-kt} \right]_0^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(- \frac{w \cos wb + k \operatorname{sen} wb}{w^2+k^2} e^{-kb} + \frac{w}{w^2+k^2} \right) = \frac{w}{w^2+k^2}$$

Luego:

$$B(w) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{w}{w^2+k^2}$$ Por tanto:

$$e^{-kx} = \int_0^{+\infty} B(w) \cdot \operatorname{sen} wt \, dt = \int_0^{+\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{w}{w^2+k^2} \cdot \operatorname{sen} wt \, dw = e^{-kx}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{w \operatorname{sen} wt}{w^2+k^2} \, dw = \frac{\pi}{2} e^{-kx}$$

TRANSFORMADA DE FOURIER.

Vamos a ver en primer lugar un preambulo, esto no es imprescindible saberlo aunque puede ayudar a entender lo que es una transformada de Fourier. Vamos a necesitar recordar la igualdad:

$$\cos(A-B) = \cos A \cdot \cos B + \operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} B.$$

La transformada de Fourier se obtiene de la expresión compleja de la integral de Fourier. Veamos la expresión compleja de la integral de Fourier:

La integral de Fourier (real) es:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} A(w) \cdot \cos(wx) + B(w) \cdot \operatorname{sen}(wx)\, dw \quad \text{donde}$$

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \cos wt\, dt \quad , \quad B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \operatorname{sen}(wt)\, dt$$

Si sustituimos estos valores obtenemos:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left(f(t) \cdot \cos wt \cdot \cos wx + f(t) \cdot \operatorname{sen} wt \cdot \operatorname{sen} wx\right) dt\right] dw$$

teniendo en cuenta que:

$f(t)\cdot \cos wt \cos wx + f(t) \operatorname{sen} wt \cdot \operatorname{sen} wx =$

$= f(t)[\cos wt \cos wx + \operatorname{sen} wt \operatorname{sen} wx] = f(t)\cdot \cos(wt - wx) =$

$= f(t)\cdot \cos w(t-x) = f(t)\cdot \cos w(x-t)$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot \cos w(x-t)\,dt\right)dw \quad (*)$$

Ahora consideramos la función de w:

$$H(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot \cos w(x-t)\,dt.$$

$H(w)$ es par respecto a w y por tanto:

$$\int_0^{+\infty} H(w)\,dw = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} H(w)\,dw$$

Del mismo modo consideramos la función

$G(w) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot \operatorname{sen} w(x-t)\,dt$. $G(w)$ es impar

respecto a w y consecuentemente $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} G(w) = 0$

de este modo

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(w)\,dw = \int_{-\infty}^{\infty} H(w)\,dw + i\cdot\int_{-\infty}^{\infty} G(w)\,dw =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot \cos w(x-t)\,dt\right)dw + i\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\operatorname{sen} w(x-t)\,dt\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left[\cos w(x-t) + i\,\operatorname{sen} w(x-t)\right]dt\right)dw =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{iw(x-t)}\,dt\right)dw. \text{ Como:}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(w)\,dw = 2\int_{0}^{\infty} H(w)\,dw \Rightarrow \text{sustituyendo en } (*)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{+iw(x-t)}\,dt\,dw$$ esta

es la expresión compleja de la integral de Fourier.

Bien, pues de la expresión compleja de la integral de Fourier podemos sacar que:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{-iwt}\,dt\right)\cdot e^{iwx}\,dx$$

DEFINICION DE TRANSFORMADA DE FOURIER

Llamaremos transformada de Fourier de $f(t)$ a la integral:

$$\mathcal{F}[f(t)](w) = F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{-iwt}\,dt$$

Llamaremos transformada inversa de Fourier a

$$\mathcal{F}^{-1}[F(w)](t) = f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)\cdot e^{iwt}\,dw$$

Ejemplo: calcular la transformada de Fourier (TF) de la función $f(t) = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

$$\mathcal{F}[1](w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{-iwt}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwt}\,dt =$$

$$= \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} e^{-iwt}\,dt = \lim_{a\to\infty}\left[\frac{e^{-iwt}}{-iw}\right]_{t=-a}^{t=a} =$$

$$= \lim_{a\to\infty}\left[\frac{e^{-iwa}}{-iw} - \frac{e^{+iwa}}{-iw}\right] = -\frac{2}{w}\lim_{a\to\infty}\frac{e^{iwa}-e^{-iwa}}{2i}$$

$$= -\frac{2}{w}\lim_{a\to\infty} \operatorname{sen}(wa)$$ y este límite no existe.

Luego $\nexists\ \mathcal{F}[1](w)$

Esto era de preveer ya que si $f(t)=1$

$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt$ no es convergente (no está acotada)

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}dt = \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a}dt = \lim_{a\to\infty} 2a = \infty$$

EXISTENCIA DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Es condición suficiente para que exista la transformada de Fourier de la función $f(t)$ que esta función sea absolutamente integrable, es decir que si

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt < +\infty \quad \text{entonces} \quad \exists\ \mathcal{F}[f(t)](w)$$

EXISTENCIA DE LA TRANSFORMADA INVERSA DE FOURIER

Sea $f(t)$ una función tal que:

(1) f es absolutamente integrable en $]-\infty,+\infty[$

(2) f es continua a trozos y tiene derivada por la derecha y por la izquierda en todo punto. Entonces:

$\mathcal{F}[f(t)](w) = F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{-iwt}\,dt$, además en todos los puntos de continuidad de $f(t)$ existe la transformada inversa y vale:

$$\mathcal{F}^{-1}[F(w)](t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)\cdot e^{iwt}\,dw$$

Ejemplo: calcular la T.F. de la función

$f(t) = e^{-at^2}$ donde $a>0$ $\forall t\in\mathbb{R}$.

$$\mathcal{F}[e^{-at^2}](w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2}\cdot e^{-iwt}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(at^2+iwt)}\,dt$$

Partimos de que es conocido el valor de la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-au^2}\,du = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Pretendemos expresar at^2+iwt como:

$at^2+iwt = (\sqrt{a}\,t+\alpha)^2-\alpha^2$. Vamos a calcular α:

$$\cancel{at^2}+iwt = \cancel{at^2}+2\sqrt{a}\,\alpha t+\cancel{\alpha^2}-\cancel{\alpha^2} \Rightarrow 2\sqrt{a}\,\alpha = iw \Rightarrow$$

$\Rightarrow \alpha = \dfrac{iw}{2\sqrt{a}}$. Entonces:

$$at^2+iwt = \left(\sqrt{a}\,t+\frac{iw}{2\sqrt{a}}\right)^2-\left(\frac{iw}{2\sqrt{a}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -(at^2+iwt) = -\left(\sqrt{a}\,t+\frac{iw}{2\sqrt{a}}\right)^2 - \frac{w^2}{4a}$$

Por tanto:

$$e^{-(at^2+iwt)} = e^{-\left(\sqrt{a}\,t+\frac{iw}{2\sqrt{a}}\right)^2} \cdot e^{-\frac{w^2}{4a}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}[f(t)](w) = e^{-\frac{w^2}{4a}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{a}\,t+\frac{iw}{2\sqrt{a}}\right)^2} dt$$

Si hacemos el cambio $u = \sqrt{a}\,t + \frac{iw}{2\sqrt{a}} \Rightarrow$

$\Rightarrow dt = \frac{1}{\sqrt{a}}\,du$ y por tanto:

$$\mathcal{F}[f(t)](w) = e^{-\frac{w^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}}\,du =$$

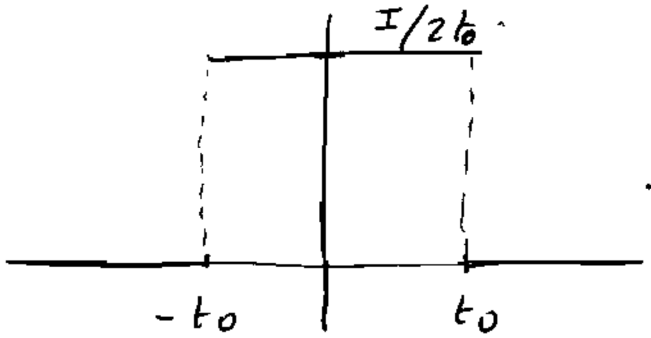
$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot e^{-\frac{w^2}{4a}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} \cdot e^{-\frac{w^2}{4a}}$$, esta es

la transformada de Fourier de $f(t) = e^{-at^2}$, $a > 0$.

LA FUNCION DELTA DE DIRAC

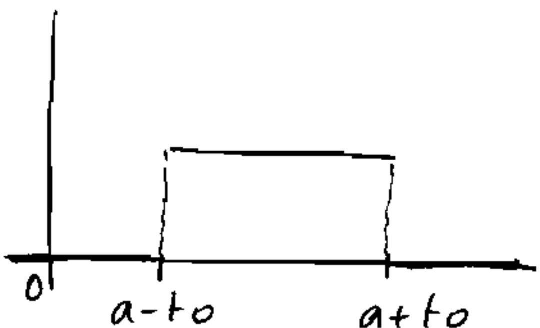
En diversos sistemas físicos es posible encontrar fuerzas de actuación muy intensa y de duración muy corta. Es el caso de un golpe seco con un martillo o el de una descarga eléctrica. Una manera de expresar mediante un modelo matemático este fenómeno puede ser por una función de valor cero excepto en un intervalo muy corto de tiempo, que es cuando actúa y que su integral en ese intervalo sea un valor I que corresponderá al valor de la fuerza. Las funciones de este tipo se llaman funciones de impulso siendo precisamente el valor I el que corresponde al impulso. En la siguiente figura se muestra una típica función de este tipo, donde el centro del impulso se ha centrado en el origen. Su ecuación es la siguiente:

$$\delta_{t_0}(t) = \begin{cases} \dfrac{I}{2t_0} & \text{si } |t| < t_0 \\ 0 & \text{si } |t| > t_0 \end{cases}$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_{t_0}(t)\, dt = I = \frac{I}{\cancel{2t_0}} \cdot \cancel{2t_0}$$

Si desplazamos a unidades a la derecha esta función



La función impulso vale:

$$\delta_{to}(t-a) = \begin{cases} \frac{I}{2to} & \text{si } |t-a| < to \\ 0 & \text{si } |t-a| > to \end{cases}$$

de nuevo $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_{to}(t-a) = I$.

Si el impulso $I = 1$ la función se llama de impulso unitario.

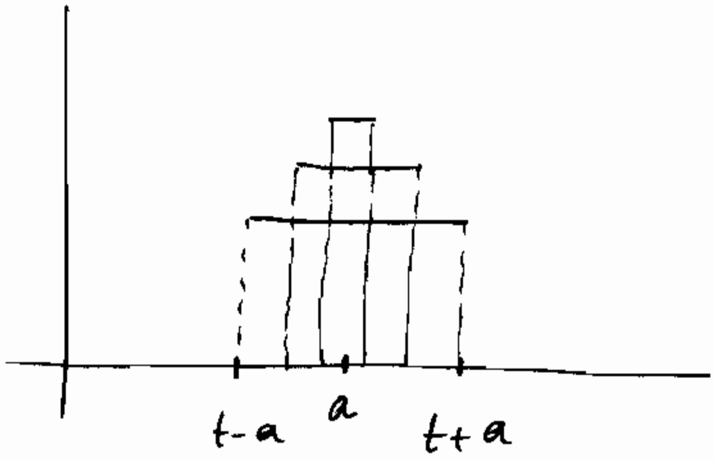
Consideremos ahora todas las funciones de impulso unitario centradas en a. Al límite de estas funciones de impulso unitario cuando to tiende a cero se le llama deltá de Dirac:

$$\delta(t-a) = \lim_{to \to 0} \delta_{to}(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 0 \\ \infty & \text{si } t = a \end{cases}$$

La función deltá de Dirac verifica:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)\, dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t-a)\, dt = f(a)$$



TRANSFORMADAS DE FOURIER GENERALIZADAS

Según hemos visto en las propiedades de la función delta de Dirac:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t-a)\, dt = f(a)$$

Por tanto:

$$\mathcal{F}_1 [\, \delta(t-a) \,](w) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a) \cdot e^{-iwt} dt = e^{-iwa}$$

Si tomamos $a = 0$:

$$\mathcal{F}_1 [\, \delta(t) \,](w) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-iwt} dt = e^{-iw \cdot 0} = 1.$$

La ley de la transformada generalizada de Fourier es:

$$\mathcal{F}_1 [K](w) = 2\pi K \delta(w)$$

Ejemplo: calcular la transformada de Fourier de:

$f(t) = H(t)\, e^{-at}$ con $a > 0$

$$\mathfrak{F}[f(t)](w) = \int_{-\infty}^{\infty} H(t) \cdot e^{-at} \cdot e^{-iwt} = \int_{0}^{\infty} e^{-(a+iw)t}\, dt =$$

$$= \lim_{\alpha \to \infty} \int_0^{\alpha} e^{-(a+iw)t}\, dt = \lim_{\alpha\to\infty} \left. \frac{e^{-(a+iw)t}}{-(a+iw)} \right|_{t=0}^{t=\alpha}$$

$$= -\frac{1}{a+iw} \lim_{\alpha\to\infty} \left[e^{-(a+iw)\alpha} - 1 \right] = \frac{1}{a+iw}$$

Previamente podríamos haber visto que $f(t) = H(t)\, e^{-at}$, $a>0$ admite transformada de Fourier, esto es así ya que la función $f(t) = H(t)\, e^{-at}$ es absolutamente integrable en $]-\infty, +\infty[$:

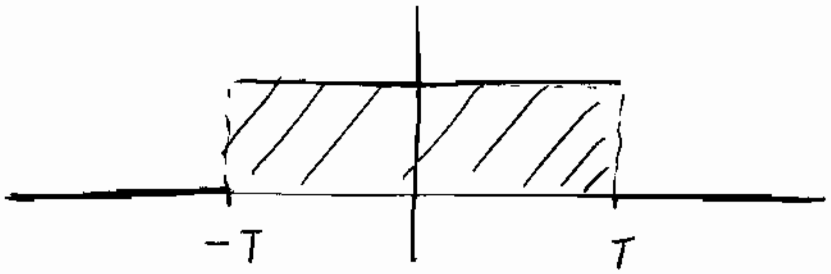
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |H(t) \cdot e^{-at}|\, dt = \int_0^{\infty} e^{-at}\, dt = \lim_{\alpha\to\infty} \left. -\frac{e^{-at}}{a} \right|_{t=0}^{t=\alpha}$$

$$= \lim_{\alpha\to\infty} -\frac{e^{-a\alpha}}{a} + \frac{1}{a} = \frac{1}{a} < +\infty$$

Si una función es absolutamente integrable tiene T.F.

Si una función no es absolutamente integrable, puede tener o no tener T.F. (es un caso dudoso)

Ejemplo: calcular la transformada de Fourier de la función $f(t) = \begin{cases} A & |t| \leq T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$



$$\mathcal{F}[f(t)](w) = \int_{-T}^{T} A \cdot e^{-iwt} dt = A \int_{-T}^{T} e^{-iwt} dt \cdot \begin{cases} \frac{e^{-iwt}}{iw} & \text{si } w \neq 0 \\ 2T & \text{si } w = 0 \end{cases}$$

luego:

$$\mathcal{F}[f(t)](w) = \begin{cases} \frac{2A}{w} \cdot \operatorname{sen}(wt) & \text{si } w \neq 0 \\ 2AT & \text{si } w = 0 \end{cases}$$

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Sean $f(t)$ y $g(t)$ dos funciones para las que existe la transformada de Fourier:

$F(w) = \mathcal{F}[f(t)](w)$ y $G(w) = \mathcal{F}[g(t)](w)$.

Entonces se verifican las siguientes propiedades:

1) Linealidad:

$$\mathcal{F}[\alpha f(t) + \beta g(t)](w) = \alpha \cdot \mathcal{F}[f(t)](w) + \beta\, \mathcal{F}[g(t)](w) =$$

$$= \alpha \cdot F(w) + \beta \cdot G(w) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

2) TRANSFORMADA DE FOURIER DE LA DERIVADA.

Sea $f(t)$ una función absolutamente integrable tal que su derivada $f'(t)$ es también absolutamente integrable. Entonces si $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to-\infty} f(t) = 0$ se verifica que:

$$\mathcal{F}_1[f'(t)](w) = iw\,\mathcal{F}_1[f(t)](w) = iwF(w)$$

Ejemplo: calcular $\mathcal{F}_1[t\cdot e^{-t^2}](w)$.

Se tiene que:

$$\mathcal{F}_1[t\cdot e^{-t^2}](w) = \mathcal{F}_1\left[\left(e^{-t^2}/_{-2}\right)'\right] = \mathcal{F}_1\left[-\frac{1}{2}\left(e^{-t^2}\right)'\right](w)$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathcal{F}_1\left[\left(e^{-t^2}\right)'\right](w) = -\frac{1}{2}iw\,\mathcal{F}_1\left[e^{-t^2}\right](w) = \frac{-1}{2}iw\sqrt{\pi}\cdot e^{-\frac{w^2}{4}}.$$

3) CAMBIO DE ESCALA

$\forall a \in \mathbb{R}$ se verifica que:

$$\mathcal{F}_1[f(at)](w) = \frac{1}{|a|}\cdot\mathcal{F}_1[f(t)]\left(\frac{w}{a}\right) = \frac{1}{|a|}\cdot F\left(\frac{w}{a}\right)$$

Demostración:

Por definición de transformada de Fourier tenemos que:

$$\mathcal{F}_1[f(t)](w) = F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{-iwt}\,dt.$$ Hacemos el cambio

de variable $u = at \Rightarrow du = a\,dt$. Se pueden dar dos casos:

(*) Que $a > 0$. Entonces:

$$\mathcal{F}[f(at)](w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(at)\cdot e^{-iwt}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cdot e^{-i\frac{w}{a}u}\cdot\frac{1}{a}\,du =$$

$$= \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cdot e^{-i\frac{w}{a}\cdot u}\,du = \frac{1}{a}\,\mathcal{F}[f(t)]\left(\frac{w}{a}\right) = F\left(\frac{w}{a}\right)$$

(**) Que $a < 0$. Entonces:

$$\mathcal{F}[f(at)](w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(at)\cdot e^{-iwt}\,dt = \int_{+\infty}^{-\infty} f(u)\cdot e^{-i\frac{w}{a}u}\cdot\frac{1}{a}\,du =$$

$$= \frac{1}{a}\int_{+\infty}^{-\infty} f(u)\cdot e^{-i\frac{w}{a}u}\,du = -\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cdot e^{-i\frac{w}{a}u}\,du =$$

$$= -\frac{1}{a}\,\mathcal{F}[f(t)]\left(\frac{w}{a}\right) = -\frac{1}{a}\,F(w)$$

Luego en general, $\forall a \in \mathbb{R}$, se tiene que:

$$\mathcal{F}[f(at)](w) = \frac{1}{|a|}\cdot\mathcal{F}[f(t)]\left(\frac{w}{a}\right) = \frac{1}{|a|}\cdot F(w)$$

4) TRASLACIÓN (DESPLAZAMIENTO EN EL TIEMPO)

$$\mathcal{F}[f(t-t_0)](w) = e^{-iwt_0}\,\mathcal{F}[f(t)](w) = e^{-iwt_0}F(w).$$

Demostración:

Por definición de transformada de Fourier:

$$\mathcal{F}[f(t)](w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot e^{-iwt}\,dt \Rightarrow$$

$\Rightarrow \mathcal{F}[f(t-t_0)](w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)\cdot e^{-iwt}\cdot dt$. Hacemos el cambio de variable $u = t-t_0 \Rightarrow du = dt$; $t = u+t_0$. Entonces:

$$\mathcal{F}[f(t-t_0)](w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cdot e^{-iw(u+t_0)}\cdot du = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cdot e^{-iwu}\cdot e^{-iwt_0}\,du =$$

$$= e^{-iwt_0}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cdot e^{-iwu}\,du = e^{-iwt_0}\cdot\mathcal{F}[f(t)](w) = e^{-iwt_0}\cdot F(w)$$

5) MULTIPLICACIÓN POR EXPONENCIALES

$$\mathcal{F}[e^{iw_0t}f(t)](w) = \mathcal{F}[f(t)](w-w_0) = F(w-w_0)$$

Demostración:

$$\mathcal{F}[e^{iw_0t}f(t)](w) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+iw_0t}\cdot f(t)\cdot e^{-iwt}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{-i(w-w_0)t}\,dt$$

Luego:

$$\mathcal{F}\left[e^{i w_0 t} \cdot f(t)\right](w) = \mathcal{F}\left[f(t)\right](w-w_0) = F(w-w_0).$$

6) INVERSIÓN (SIMETRIA O DUALIDAD)

Si $F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-iwt} dt$ es integrable entonces:

$$\mathcal{F}\left[F(t)\right](w) = 2\pi \cdot f(-w)$$

Demostración:

Al ser $F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-iwt} dt \Rightarrow F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cdot e^{-i t \cdot u} du$

Por tanto:

$$\mathcal{F}\left[F(t)\right](w) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \cdot e^{-iwt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cdot e^{-itu} du \right) e^{-iwt} dt$$

$= 2\pi \cdot f(-w)$ (esta es la integral de Fourier pero con $(-w)$ en vez de w)

7) CONVOLUCIÓN.

La convolución de dos funciones f y g se define como

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot g(t-x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x) \cdot g(x)\, dx$$

Se tiene que

$$\mathfrak{F}[f*g](w) = \mathfrak{F}[f(t)](w)\cdot\mathfrak{F}[g(t)](w) = F(w)\cdot G(w)$$

Demostración (no se demostró en clase).

TRANSFORMADA DE FOURIER DE SENOS Y COSENOS

Según la integral de Fourier:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[A(w)\cdot \cos(wt) + B(w)\cdot \operatorname{sen}(wt)\right]dw$$

Transformada de Fourier de cosenos

Si $f(t)$ es par entonces

$$A(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(t)\cos wt\, dt$$ y consecuentemente:

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f(t)\cos(wt)\,dt\right)\cos(wt)\,dw$$

Llamamos transformada de Fourier de cosenos a la integral

$$\mathfrak{F}_c[f(t)](w) = \int_0^{+\infty} f(t)\cos wt\,dt = F_c(w)$$

La transformada inversa de Fourier de cosenos es:

$$\mathcal{F}_1^{-1}\left[F_c(W)\right](t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} F_c(W)\cos(Wt)\,dW$$

<u>Transformada de Fourier de senos</u>

Si $f(t)$ es impar, se define la transformada de Fourier de senos de forma análoga a como se define la transformada de Fourier de cosenos, es decir:

$$\mathcal{F}_S\left[f(t)\right](W) = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{sen}(Wt)\,dt = F_S(W)$$ y la

transformada inversa vale:

$$\mathcal{F}_1^{-1}\left[F_S(W)\right](t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} F_S(W)\cdot\mathrm{sen}(Wt)\,dW$$

PROPIEDADES DE LAS TRANSFORMADAS DE COSENOS Y SENOS

Las transformadas de Fourier de senos y cosenos son operadores lineales es decir:

$$\mathcal{F}_c\left[\alpha f(t)+\beta g(t)\right](W) = \alpha\,\mathcal{F}_c\left[f(t)\right](W) + \beta\,\mathcal{F}_c\left[g(t)\right](W) \quad \forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

$$\mathcal{F}_S\left[\alpha f(t)+\beta g(t)\right](W) = \alpha\,\mathcal{F}_S\left[f(t)\right](W) + \beta\,\mathcal{F}_S\left[g(t)\right](W)$$

TRANSFORMADA DE FOURIER EN SENOS Y COSENOS DE LA DERIVADA

Sea $f(t)$ una función tal que tanto $f(t)$ como $f'(t)$ son absolutamente integrables y $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$. Entonces:

- $\mathcal{F}_c[f'(t)](w) = w\,\mathcal{F}_s[f(t)](w) - f(0)$
- $\mathcal{F}_s[f'(t)](w) = -w\,\mathcal{F}_c[f(t)](w)$

Demostración:

- $\mathcal{F}_c[f(t)](w) = \int_0^{+\infty} f(t)\cdot \cos(wt)\,dt = \lim_{a\to+\infty} \int_0^a f(t)\cos(wt)\,dt$

Por tanto:

$$\mathcal{F}_c[f'(t)](w) = \lim_{a\to+\infty} \int_0^a f'(t)\cdot\cos(wt)\,dt$$

$$\int f'(t)\cos(wt)\,dt \text{ (por partes) } \begin{cases} u = \cos wt \Rightarrow du = -w\,\mathrm{sen}(wt)\,dt \\ dv = f'(t)\,dt \Rightarrow v = f(t) \end{cases}$$

$= f(t)\cos wt + w\int f(t)\,\mathrm{sen}\,w(t)\,dt$. Luego:

$$\int_0^a f'(t)\cos(wt)\,dt = f(t)\cos wt\Big|_0^a + w\int_0^a f(t)\,\mathrm{sen}\,w(t)\,dt.$$

Tomando $\lim_{a\to\infty}$:

$$\lim_{a\to\infty}[f(a)\cos(wa) - f(0)] + w\cdot\mathcal{F}_s[f(t)](w) = \mathcal{F}_c[f'(t)](w)$$

Al ser $\cos aw$ acotada y $\lim_{a\to\infty} f(a) = 0$:

$$\mathcal{F}_c\,[f'(t)](w) = w\,\mathcal{F}_s\,[f(t)](w) - f(0)$$

• $\mathcal{F}_s\,[f'(t)](w) = \int_0^{+\infty} f'(t)\cdot \operatorname{sen}(wt)\,dt = \lim_{a\to\infty} \int_0^a f'(t)\operatorname{sen}(wt)\,dt$

$$\int f'(t)\cdot \operatorname{sen}(wt)\,dt \quad \left\{\begin{array}{l} u = \operatorname{sen}(wt) \Rightarrow du = w\cos(wt)\,dt \\ dv = f'(t)\,dt \Rightarrow v = f(t) \end{array}\right\} =$$

$= f(t)\cdot \operatorname{sen}(wt) - w\int f(t)\cos(wt)\,dt$. Luego:

$$\int_0^a f'(t)\operatorname{sen}(wt)\,dt = f(t)\operatorname{sen} wt\Big|_0^a - w\cdot \int_0^a f(t)\cos(wt)\,dt$$

Tomando $\lim_{a\to\infty}$:

$$\mathcal{F}_s\,[f'(t)] = \lim_{a\to\infty} \int_0^a f'(t)\operatorname{sen}(wt)\,dt = \lim_{a\to\infty} [f(a)\operatorname{sen}(wa)] - w\cdot \mathcal{F}_c[f(t)](w)$$

Como $\operatorname{sen}(wa)$ está acotada y $\lim_{a\to\infty} f(a) = 0$:

$$\mathcal{F}_s\,[f'(t)](w) = -\,w\,\mathcal{F}_c\,[f(t)](w)$$

Ejemplo: calcular la transformada de Fourier de coseno de la función $f(t) = e^{-at}$ con $a>0$.

Se tiene que $f'(t) = -a\cdot e^{-at} \Rightarrow f''(t) = +a^2 e^{-at} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{a^2} f''(t)$.

Luego:

$$\mathcal{F}_c\left[f(t)\right](w)=\mathcal{F}_c\left[\frac{1}{a^2}f''(t)\right](w)=\frac{1}{a^2}\,\mathcal{F}_c\left[(f'(t))'\right](w)=$$

$$=\frac{1}{a^2}\left[w\,\mathcal{F}_s[f'(t)](w)-f'(0)\right].$$ Como $f'(0)=-a\cdot e^0=-a$

$$\mathcal{F}_c[f(t)](w)=\frac{1}{a^2}\Big[w\big[-w\,\mathcal{F}_c[f(t)](w)\quad+a\Big].$$ Entonces:

$$\mathcal{F}_c[f(t)](w)=-\frac{w^2}{a^2}\,\mathcal{F}_c[f(t)](w)+\frac{1}{a}$$

$$\left[1+\frac{w^2}{a^2}\right]\mathcal{F}_c[f(t)](w)=\frac{1}{a}\Rightarrow\mathcal{F}_c[f(t)](w)=\frac{\frac{1}{a}}{1+\frac{w^2}{a^2}}$$

es decir:

$$\mathcal{F}_c[f(t)](w)=\frac{a}{a^2+w^2}$$