TEMA 6

LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Introducción

La transformada de Laplace es un método potente y directo de resolución de ecuaciones diferenciales y de sistemas de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes. Este método permite transformar una ecuación diferencial, bajo ciertas condiciones, en una ecuación algebraica. Es algo parecido a lo que hacemos con el cálculo logarítmico, reducimos el problema de efectuar un producto a hacer una suma. Habrá que realizar una transformación, operar y posteriormente invertir la transformación

Una transformación integral de la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es una expresión en la forma:

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} N(t,z) \cdot f(t)\, dt.$$

A $N(t,z)$ se le llama núcleo, $N: \mathbb{R} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

La transformada de Fourier es una transformada integral con núcleo

$N(t,z) = e^{-itz}$ y por tanto la función transformada integral de Fourier será:

$$\mathcal{F}[f(t)](z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itz} f(t)\,dt$$

La transformada de Laplace es una transformada integral con núcleo:

$N(t,z) = e^{-zt}$ y por tanto la función transformada integral de Laplace de $f(t)$ será:

$$\mathcal{L}[f(t)](z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tz} f(t)\,dt$$

<u>Definición de transformada de Laplace.</u>

Sea $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ una función compleja de variable real. Llamaremos transformada de Laplace de $f(t)$ para la variable $z \in \mathbb{C}$, a la función compleja de variable compleja:

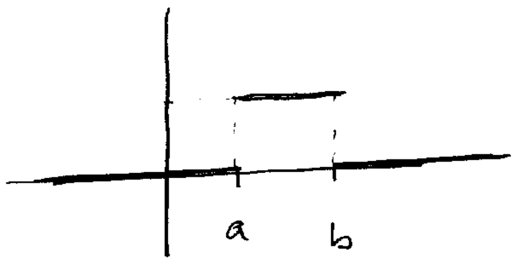
$$\mathcal{L}[f(t)] : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{definida por:}$$
$$z \longmapsto \mathcal{L}[f(t)](z)$$

$$\mathcal{L}[f(t)](z) = \int_0^{+\infty} e^{-tz}\cdot f(t)\,dt \qquad \text{con } z \in D.$$

D es el dominio de definición de la transformada de Laplace, es decir, D es el conjunto de puntos del plano (o lo que es lo mismo de $\mathbb{C}$) en donde la integral impropia existe (existe quiere decir que es un número real).

Ejemplo: Calcular la transformada de Laplace de la función característica:

a) $$\chi_{[a,b]}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [a,b] \\ 0 & \text{si } t \notin [a,b] \end{cases} \qquad \text{con } 0 < a < b$$



Por definición tenemos que:

$$\mathcal{L}\left[\chi_{[a,b]}(t)\right](z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt}\cdot \chi_{[a,b]}(t)\,dt = \int_0^{a} e^{-zt}\cdot \overset{=0}{\cancel{\chi_{[a,b]}(t)}}\,dt +$$

$$+ \int_a^{b} e^{-zt}\cdot \overset{=1}{\cancel{\chi_{[a,b]}(t)}}\,dt + \int_b^{+\infty} e^{-zt}\cdot \overset{=0}{\cancel{\chi_{[a,b]}(t)}}\,dt$$

Luego:

$$\mathcal{L}\left[\chi_{[a,b]}(t)\right](z)=\int_a^b e^{-tz}\,dt \overset{(*)}{=} \left[-\frac{e^{-tz}}{z}\right]_a^b=$$

$$=-\frac{e^{-bz}}{z}+\frac{e^{-az}}{z}=\frac{1}{z}\left(e^{-az}-e^{-bz}\right) \text{ con } z\neq 0.$$

$(*)$ $\int e^{-tz}\,dz$ (cambio de variable $\left\{\begin{array}{l} u=-tz \\ du=-z\,dt \\ dt=-\frac{1}{z}\,du \end{array}\right\}$) $=$

$$=\int e^{u}\cdot -\frac{1}{z}\,du=-\frac{1}{z}\int e^{u}\,du=-\frac{1}{z}\cdot e^{u}=-\frac{e^{-tz}}{z}$$

b) $\chi_{[a,+\infty[}(t)=\begin{cases} 1 & \text{si } t\in[a,+\infty[\\ 0 & \text{si } t\notin[a,+\infty[\end{cases}$

Procediendo de igual forma que anteriormente

$$\mathcal{L}\left[\chi_{[a,+\infty[}(t)\right](z)=\int_a^{+\infty}\chi_{[a,+\infty[}(t)\cdot e^{-zt}\,dt=\int_a^{+\infty}e^{-zt}\cdot\cancelto{1}{\chi_{[a,+\infty[}(t)}\,dt=$$

$$=\int_a^{+\infty}e^{-zt}\,dt=\lim_{R\to\infty}\int_a^R e^{-zt}\,dt=\lim_{R\to\infty}-\frac{e^{-zt}}{z}\Big|_a^R=$$

$$=\lim_{R\to\infty}\left(-\frac{e^{-zR}}{z}+\frac{e^{-za}}{z}\right)=\frac{1}{z}\left(e^{-az}-\lim_{R\to+\infty}e^{-zR}\right)$$

Vamos a analizar el valor de $\lim_{R\to\infty} e^{-zR}$

$$\lim_{R\to+\infty} e^{-zR} = \lim_{R\to\infty} e^{-R(\mathrm{Re}\, z + i\cdot \mathrm{Im}\, z)} =$$

$$= \lim_{R\to\infty} e^{-R\cdot(\mathrm{Re}\, z)} \cdot e^{-R\, \mathrm{Im}\, z\, i} = \lim_{R\to\infty} \left[\cos(-R\, \mathrm{Im}\, z) + i \,\mathrm{sen}\,(-R\, \mathrm{Im}\, z)\right]$$

$$= \begin{cases} \infty & \text{si } \mathrm{Re}\, z < 0 \\ 0 & \text{si } \mathrm{Re}\, z > 0 \\ \nexists \lim & \text{si } \mathrm{Re}\, z = 0 \text{ ya que :} \end{cases}$$

$$\lim_{R\to\infty} \left[\cos(-R\, \mathrm{Im}\, z) + i\, \mathrm{sen}\,(-R\, \mathrm{Im}\, z)\right] = \lim_{R\to\infty} \cos(-R\, \mathrm{Im}\, z) +$$

$$+ i \lim_{R\to\infty} \mathrm{sen}\,(-R\, \mathrm{Im}\, z) = \cos(\infty) + i\, \mathrm{sen}\,(\infty)$$ y no

existen ni $\cos\infty$ ni $\mathrm{sen}\,\infty$

En el caso de que sea $\mathrm{Re}\, z > 0$:

$$\mathcal{L}\left[\chi_{[a,+\infty)}(t)\right](z) = \frac{1}{z} \cdot e^{-az} \quad \text{con } z \neq 0 .$$

Ejemplo: Determinar la transformada de Laplace de la función $f(t) = wt$ con $w \in \mathbb{C}$.

Tenemos que

$$\mathcal{L}[wt](z) = \int_0^{+\infty} wt \cdot e^{-tz} dt = w \lim_{b \to +\infty} \int_0^b t \cdot e^{-tz} dt =$$

$$\stackrel{(*)}{=} w \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{t}{z} e^{-tz} - \frac{1}{z^2} \cdot e^{-tz} \right) \Big|_0^b = w \lim_{b \to \infty} \left[\left(\frac{-b}{z} \cdot e^{-bz} - \frac{1}{z^2} e^{-bz} \right) \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{z^2} \right) \right] \stackrel{(**)}{=} \frac{w}{z^2} \quad \text{si } z \in D \stackrel{(***)}{=} \{ z \in \mathbb{C} \ / \ \operatorname{Re} z > 0 \}$$

(*) Integración por partes

$$\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du$$

$$\int t \cdot e^{-tz} dt \quad \left\{ \begin{array}{l} u = t \Rightarrow du = dt \\ dv = e^{-tz} dt \Rightarrow v = \int e^{-tz} dt \stackrel{\text{por cambio de variable}}{=} -\dfrac{e^{-tz}}{z} \end{array} \right\} =$$

$$= -t \cdot \frac{e^{-tz}}{z} + \frac{1}{z} \int e^{-tz} dt = -\frac{t}{z} \cdot e^{-tz} - \frac{1}{z^2} \cdot e^{-tz}$$

$$(**) \quad \lim_{b \to \infty} -\frac{b}{z} \cdot e^{-bz} = \lim_{b \to \infty} -\frac{b}{z\,e^{bz}} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{\text{L'Hopital}}{=}$$

$$= \lim_{b \to \infty} -\frac{1}{z \cdot b \cdot e^{bz}} = -\frac{1}{\infty} = 0.$$

(***) vamos a explicar el porqué hemos puesto el dominio de convergencia como:

$$D = \{ z \in \mathbb{C} \;/\; Re(z) > 0 \}$$

Han de existir los límites $\lim_{b \to +\infty} e^{-bz}$. Sea $z = x + iy$

Entonces $e^{-bz} = e^{-bx - biy} = e^{-bx} \cdot e^{-byi} = e^{-bx}(\cos by - i \operatorname{sen} by)$

Como la función $\cos by - i \operatorname{sen} by$ está acotada, es decir su módulo se mantiene menor que 1:

$$|\cos by - i \operatorname{sen} by| < 1 \quad \text{si } Re(z) = x > 0 \Rightarrow \lim_{b \to \infty} e^{-bx} = 0$$

por tanto existirá
$$\lim_{b \to \infty} e^{-bx} = \begin{cases} 0 & \text{si } Re(z) = x > 0 \\ \infty & \text{si } Re(z) = x < 0 \\ \nexists \lim_{b \to \infty} & \text{si } Re(z) = x = 0. \end{cases}$$

Ejemplo: Determinar la transformada de Laplace de la función $f(t) = t^n$, siendo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$.

Procedemos por inducción sobre n, pero antes vamos a recordar en qué consiste el principio de inducción.

$\mapsto$ Sea P una propiedad que depende del nº natural n, es decir:
$P = P(n)$.

1º Si comprobamos que P es cierta para $n=0$, para $n=1$.

2º Suponemos que P es cierta para $n=k$

3º Demostramos que P es cierta para $n=k+1$.

Entonces P es cierta $\forall n \in \mathbb{N}$.

$\longrightarrow$

Volvemos al problema anterior, hallar

$\mathcal{L}[t^n](z) \qquad n \geq 0, \; n \in \mathbb{N}$.

Comenzamos a aplicar el principio de inducción:

<u>para $n=0$</u> $\Rightarrow t^n = 1$

$$\mathcal{L}[1](z) = \int_0^{+\infty} e^{-tz} \cdot 1 \cdot dt = \int_0^{+\infty} e^{-tz} dz =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-tz} dz = \lim_{b\to+\infty} -\frac{e^{-tz}}{z}\Big]_0^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty} -\frac{e^{-bz}}{z} + \frac{1}{z} = \begin{cases} \text{No existe si } \operatorname{Re} z = 0 \\ 0 + \frac{1}{z} \text{ si } \operatorname{Re}(z) > 0 \\ \infty \text{ si } \operatorname{Re}(z) < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[1](z) = \frac{1}{z} \text{ si } \operatorname{Re}(z) > 0.$$

Para $n=1$.

$$\mathcal{L}[t](z) = \int_0^{+\infty} t \cdot e^{-tz}\,dt \overset{\text{Hecha en página 3 vuelta}}{=} \lim_{b\to\infty} \left(\frac{-t}{z} e^{-tz} - \frac{1}{z^2} e^{-tz} \right)\Big|_0^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(\frac{-b}{z} e^{-bz} - \frac{1}{z^2} e^{-bz} + \frac{1}{z^2} \right) = \frac{1}{z^2} \quad \text{Si } Re(z) > 0.$$

Para $n=2$

$$\mathcal{L}[t^2](z) = \int_0^{+\infty} t^2 \cdot e^{-tz}\,dt \overset{(*)}{=} \lim_{b\to+\infty} \int_0^b t^2 e^{-tz}\,dt =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left[e^{-tz} \left(\frac{t^2}{z} - \frac{2t}{z^2} - \frac{1}{z^3} \right)\Big|_0^b \right] =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left[e^{-bz} \left(\frac{b^2}{z} - \frac{2b}{z^2} - \frac{1}{z^3} \right) + \frac{1}{z^3} \right] = \frac{1}{z^3} \quad \text{Si } Re(z) > 0$$

Sospechamos (para ello habría que seguir probando más valores de n) que:

$$\mathcal{L}[t^{k-1}](z) = \frac{(k-1)!}{z^k} \quad \forall z \in D = \{ z \in \mathbb{C} \;/\; Re\, z > 0 \}$$

Vamos a probar que se verifica esta propiedad para $n=k$, es decir que:

$$\mathcal{L}[t^n](z) = \frac{n!}{z^{n+1}}$$

Por definición se tiene que:

$$\mathcal{L}[t^n](z) = \int_0^{+\infty} t^n \cdot e^{-tz} dt = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b t^n \cdot e^{-tz} dt$$

Vamos a calcular por partes la integral $\int t^n \cdot e^{-tz} dt$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = t^n \Rightarrow du = n \cdot t^{n-1} dt \\ dv = e^{-tz} dt \Rightarrow v = -\dfrac{e^{-tz}}{z} \end{array} \right\}. \text{ Entonces:}$$

$$\int t^n \cdot e^{-tz} dt = -\frac{t^n}{z} \cdot e^{-tz} + \frac{n}{z} \cdot \int t^{n-1} e^{-tz} dt$$. Por

tanto:

$$\int_0^b t^n \cdot e^{-tz} dt = -\frac{t^n}{z} \cdot e^{-tz} \Big|_0^b + \frac{n}{z} \cdot \mathcal{L}[t^{n-1}](z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{b \to +\infty} \int_0^b t^n \cdot e^{-tz} dt = \lim_{b \to \infty} \left(-\frac{b^n}{z} \cdot e^{-bz} \right) + \frac{n}{z} \cdot \frac{(n-1)!}{z^n}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} t^n \cdot e^{-tz} dt = \frac{n!}{z^{n+1}} \Rightarrow \mathcal{L}[t^n](z) = \frac{n!}{z^{n+1}}$$ y

queda establecida la propiedad. $\forall z \in D = \{ z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re} z > 0 \}$.

Ejemplo: determinar la transformada de Laplace de la expresión $f(t) = e^{wt}$ con $w \in \mathbb{C}$.

$$\mathcal{L}[e^{wt}](z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} \cdot e^{wt}\, dt = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{(w-z)t} dt =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left. \frac{e^{(w-z)t}}{w-z} \right|_0^b = \frac{1}{w-z} \lim_{b\to\infty} \left(e^{(w-z)b} - 1 \right) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{z-w} & \text{si } Re\,(w-z) < 0 \\ \infty & \text{si } Re\,(w-z) > 0 \\ \text{No existe} & \text{si } Re\,(w-z) = 0 . \end{cases}$$

Luego:

$$\mathcal{L}[e^{wt}](z) = \frac{1}{z-w} \quad \text{si} \quad z \in D = \{ z \in \mathbb{C} \,/\, Re\,(z) > Re\,(w) \}$$

Ejemplo: Determinar la transformada de Laplace de la función:

$$f(t) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 < t < 5 \\ 0 & \text{si } 5 < t < 10 \\ e^{4t} & \text{si } t > 10 \end{cases}$$

$f(t)$ es una función continua a trozos.

Por tanto la transformada de Laplace de f será:

$$\mathcal{L}[f(t)](z) = \int_0^{+\infty} e^{-tz} f(t)\,dt = \int_0^5 2e^{-tz}dt + \int_5^{10} 0\cdot e^{-tz}dt +$$

$$+ \int_{10}^{+\infty} e^{4t}\cdot e^{-tz}dt = 2\cdot \frac{-e^{-tz}}{z}\Big|_0^5 + \frac{e^{(4-z)t}}{4-z}\Big|_{10}^{+\infty} =$$

$$= -\frac{2}{z}e^{-5z} + \frac{2}{z} + \lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{(4-z)b}}{4-z} - \frac{e^{10(4-z)}}{4-z}\right] =$$

$$= -\frac{2}{z}\left(e^{-5z} - 1\right) - \frac{e^{10(4-z)}}{4-z} \quad \text{siendo } \operatorname{Re}(z) > 4$$

Luego:

$$\mathcal{L}[f(t)](z) = -\frac{2}{z}\left(e^{-5z} - 1\right) - \frac{e^{10(4-z)}}{4-z} \quad \forall z \in D = \{z \in \mathbb{C} \,/\, \operatorname{Re} z > 4\}$$

<u>Existencia de la transformada de Laplace</u>

Sea $c \in \mathbb{C}$ y consideremos la expresión $\int_0^{+\infty} e^{-ct}dt =$

$$= \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-ct}dt = \lim_{b\to\infty} -\frac{e^{-ct}}{c}\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty} -\frac{e^{-bt}}{c} + \frac{1}{c}$$

$$= \begin{cases} 0 + \frac{1}{c} = \frac{1}{c} & \text{si } \operatorname{Re} c > 0 \\ \infty & \text{si } \operatorname{Re} c < 0 \\ \text{No existe} & \text{si } \operatorname{Re} c = 0 \end{cases}$$

Si ahora tratamos de hallar la transformada de Laplace de la función $f(t)$:

$$\mathcal{L}[f(t)](z) = \int_0^{+\infty} e^{-tz} \cdot f(t)\,dt$$, si $f(t)$ fuese de la forma $f(t) = e^{\gamma t}$ entonces:

$$\mathcal{L}[f(t)](z) = \int_0^{+\infty} e^{-tz} \cdot e^{\gamma t} dt = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{(\gamma-z)t} dt =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} - \frac{e^{(\gamma-z)t}}{\gamma - z} \Big|_0^b$$ que es convergente si $Re(z) > Re(\gamma)$

Para calcular la transformada de Laplace es conveniente que la función $f(t)$ se parezca lo más posible a una exponencial. Vamos a dar ahora algunas definiciones.

Función de orden exponencial

Sea $f: [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$. Diremos que f es de orden exponencial de exponente γ. si $\exists\, M, \gamma \in \mathbb{R}$, $M>0$ tal que $|f(t)| \leq M \cdot e^{+\gamma t}$ $\forall t \in [0,+\infty[$

Ejemplo: Consideremos la función $f(t) = e^{5t} \cdot \operatorname{sen} at$ $\forall t \geq 0$. Entonces $f(t)$ es de orden exponencial de exponente $\gamma = 5$ ya que:

$$|f(t)| = |e^{5t} \cdot \operatorname{sen} at| = e^{5t} \cdot |\operatorname{sen} at| \leq e^{at} \quad \forall t \geq 0$$

en este caso $M = 1$ y $\gamma = 5$

Ejemplo: La función $f(t) = e^{t^2}$ no es de orden exponencial.

Por reducción al absurdo, si $f(t) = e^{t^2}$ fuera de orden exponencial existiría $M, \gamma \in \mathbb{R}$, $M > 0$ tal que

$$|e^{t^2}| \leq M e^{\gamma t} \iff \frac{e^{t^2}}{e^{\gamma t}} \leq M \iff$$

$$\iff e^{t^2 - \gamma t} \leq M$$

. Pero la función $f(t) = e^{t^2 - \gamma t}$ no puede estar acotada ya que:

$$\lim_{t \to \infty} e^{t^2 - \gamma t} = \lim_{t \to \infty} e^{t(t-\gamma)} = \infty \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

TEOREMA (EXISTENCIA DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE)

Sea $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua a trozos y de orden exponencial γ. Entonces existe la transformada de Laplace $\mathcal{L}[f(t)](z)$ $\forall z \in D_\gamma$ siendo $D_\gamma = \{ z \in \mathbb{C} \, / \, \operatorname{Re} z > \gamma \}$

Al conjunto de todas las funciones continuas a trozos $f : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ y de orden exponencial γ las denotaremos por $\mathcal{E}_\gamma$. Lo que nos dice el teorema es que:

$$f \in \mathcal{E}_\gamma \Rightarrow \exists \, \mathcal{L}[f(t)](z) \quad \forall z \in D_\gamma$$

Demostración:

Al ser f continua a trozos en $[0, +\infty[$ existen $t_1 < t_2 < \cdots < t_n \in \mathbb{R}$ tales que:

f es continua en $[0, t_1]$, en $[t_1, t_2]$ .... en $[t_n, +\infty[$.

Se define la transformada de Laplace de f como:

$$\mathcal{L}[f(t)](z) = \int_0^{+\infty} e^{-tz} f(t)\,dt$$ con lo que:

$$\mathcal{L}[f(t)](z) = \int_0^{t_1} e^{-tz} f(t)\,dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-tz} f(t)\,dt + \dots + \int_{t_n}^{\infty} e^{-tz} f(t)\,dt$$

Al ser f continua en $[0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, ... las integrales $\int_0^{t_1} e^{-tz} f(t)\,dt$, $\int_{t_1}^{t_2} e^{-tz} f(t)\,dt$, ... están acotadas al ser la función acotada (al ser continua) tan sólo nos queda por ver que $\int_{t_n}^{\infty} e^{-tz} f(t)\,dt$ es convergente y ello se debe a que está acotada:

Al ser f de orden exponencial de exponente γ:

$\exists\, M, \gamma \in \mathbb{R}$, $M \geq 0$ tal que:

$|f(t)| \leq M \cdot e^{\gamma t}$. Por tanto:

$$\left| \int_a^b e^{-tz} f(t)\,dt \right| \leq \int_a^b e^{-tz} \cdot |f(t)|\,dt \leq M \int_a^b e^{(\gamma - z)t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b e^{-tz} f(t)\,dt \right| \leq \frac{M}{(\gamma - z)} e^{(\gamma - z)t} \Big|_a^b$$ es decir:

$$\left| \int_a^b e^{-tz} f(t)\, dt \right| \leq \frac{M}{\gamma - z} \cdot e^{(\gamma - z) b} - \frac{M}{\gamma - z} \cdot e^{(\gamma - z) a}$$ con

lo que:

$$\left| \int_{t_n}^{\infty} e^{-tz} f(t)\, dt \right| = \lim_{b \to \infty} \left| \int_{t_n}^{b} e^{-tz} f(t)\, dt \right| =$$

$$= \lim_{b \to \infty} \frac{M}{\gamma - z} \left(e^{(\gamma - z) b} - e^{(\gamma - z) a} \right) = \frac{M}{z - \gamma} e^{(\gamma - z)(a)} \quad \text{si } \operatorname{Re}(z) > \gamma$$

con lo cual la integral es convergente y existe la transformada de Laplace.

Propiedades de la transformada de Laplace.

Sean f y g dos funciones tales que:

$\exists\, \mathcal{L}[f(t)](z) \quad \forall z \in D_{\gamma_1}$

$\exists\, \mathcal{L}[g(t)](z) \quad \forall z \in D_{\gamma_2}$. Entonces:

1º $\exists\, \mathcal{L}[(f+g)(t)](z) = \mathcal{L}[f(t)](z) + \mathcal{L}[g(t)](z) \quad \forall z \in D_{\gamma_1} \cap D_{\gamma_2}$

2º $\exists\, \mathcal{L}[c \cdot f(t)](z) = c \cdot \mathcal{L}[f(t)](z) \quad \forall z \in D_{\gamma_1}$; $\forall c \in \mathbb{R}$ constante.

Las dos propiedades anteriores pueden resumirse en una sola:

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ constantes $\exists \mathcal{L}[af(t)+bg(t)](z) =$

$= a\mathcal{L}[f(t)](z) + b\mathcal{L}[g(t)](z) \quad \forall z \in D_{\gamma_1} \cap D_{\gamma_2}$

Demostración:

Por definición:

$$\mathcal{L}[(f+g)(t)](z) = \int_0^{+\infty} (f+g)(t) \cdot e^{-tz} dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} (f(t)+g(t)) \cdot e^{-tz} dt = \int_0^{+\infty} e^{-tz} f(t) dt + \int_0^{+\infty} e^{-tz} g(t) dt =$$

$$= \mathcal{L}[f(t)](z) + \mathcal{L}[g(t)](z) \quad \forall z \in D_{\gamma_1} \cap D_{\gamma_2}$$

Si aplicamos la definición de transformada de Laplace a la función $cf(t)$ $c \in \mathbb{R}$ constante:

$$\mathcal{L}[c \cdot f(t)](z) = \int_0^{+\infty} e^{-tz} \cdot c \cdot f(t) dt = c \cdot \int_0^{+\infty} e^{-tz} \cdot f(t) dt =$$

$$= c \cdot \mathcal{L}[f(t)](z) \quad \forall z \in D_{\gamma_1}$$

Observación:

Se verifica que:

- $\mathcal{L}[e^{it}](z) = \dfrac{1}{z-i}$
- $\mathcal{L}[e^{-it}](z) = \dfrac{1}{z+i}$

$\forall z \in D = \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re} z > 0\}$

$$\mathcal{L}[e^{it}](z) = \int_0^{+\infty} e^{-tz} \cdot e^{it} dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{(i-z)t} dt =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left. \frac{e^{(i-z)t}}{(i-z)} \right|_0^b = \lim_{b\to\infty} \frac{e^{(i-z)b}}{i-z} - \frac{1}{i-z} =$$

$$= -\frac{1}{i-z} = \frac{1}{z-i} \quad \text{si } \operatorname{Re}(i-z) < 0 \Leftrightarrow \text{si } \operatorname{Re}(z) > 0$$

$$\mathcal{L}[e^{-it}](z) = \int_0^{+\infty} e^{-tz} \cdot e^{-it} dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-(i+z)t} dt =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left. -\frac{e^{-(i+z)t}}{i+z} \right|_0^b = \lim_{b\to\infty} -\frac{e^{-(i+z)b}}{i+z} + \frac{1}{i+z} = \frac{1}{i+z}$$

si $\operatorname{Re}(i+z) > 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) > 0$

Ejemplo: Calcular la transformada de Laplace de sen t y cos t.

- $\mathcal{L}[\cos t](z) = \mathcal{L}\left[\dfrac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right](z) = \mathcal{L}\left[\frac{1}{2}e^{it}+\frac{1}{2}e^{-it}\right](z)$

$= \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{it}](z) + \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{-it}](z) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{z-i}+\frac{1}{z+i}\right)$

si $\operatorname{Re}(z)>0$ $\quad = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{z+i+z-i}{(z-i)(z+i)} = \dfrac{1}{2}\dfrac{2z}{z^2+1} = \dfrac{z}{1+z^2}, \operatorname{Re}(z)>0$

- $\mathcal{L}[\operatorname{sen} t] = \mathcal{L}\left[\dfrac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right](z) = \dfrac{1}{2i}\mathcal{L}[e^{it}-e^{-it}](z) =$

$= \dfrac{1}{2i}\mathcal{L}[e^{it}](z) - \dfrac{1}{2i}\mathcal{L}[e^{-it}](z) = \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{1}{z-i} - \dfrac{1}{z+i}\right) =$

$= \dfrac{1}{2i}\cdot\dfrac{z+i-z+i}{(z-i)(z+i)} = \dfrac{1}{2i}\cdot\dfrac{2i}{1+z^2} = \dfrac{1}{1+z^2}$ si $\operatorname{Re}(z)>0$

Ejemplo: calcular las transformadas de Laplace de $\operatorname{Sh} t$ y $\operatorname{Ch} t$

Recordemos que $\operatorname{Sh} t = \dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$; $\operatorname{Ch} t = \dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$

Por tanto:

$\mathcal{L}[\operatorname{Sh} t](z) = \mathcal{L}\left[\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}\right](z) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}[e^t](z) - \mathcal{L}[e^{-t}](z)\right)$

Del mismo modo se tiene que:

$$\mathcal{L}[\operatorname{Ch} t](z) = \mathcal{L}\left[\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right](z) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}[e^t](z) + \mathcal{L}[e^{-t}](z)\right)$$

Veamos qué valen $\mathcal{L}[e^t](z)$ y $\mathcal{L}[e^{-t}](z)$

- $$\mathcal{L}[e^t](z) = \int_0^{+\infty} e^{-tz} \cdot e^t \, dt = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b e^{+(1-z)t} dt =$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left. \frac{e^{(1-z)t}}{1-z} \right|_0^b = \lim_{b \to +\infty} \left(\frac{e^{(1-z)b}}{1-z} - \frac{1}{1-z} \right) =$$

$$= -\frac{1}{1-z} \quad \left(\text{si } \operatorname{Re}(1-z) < 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{\operatorname{Re}(z) > 1}}\right) = \frac{1}{z-1}$$

- $$\mathcal{L}[e^{-t}](z) = \int_0^{+\infty} e^{-tz} \cdot e^{-t} \, dt = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b e^{-(1+z)t} dt =$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left. -\frac{e^{-(1+z)t}}{1+z} \right|_0^b = \lim_{b \to +\infty} -\frac{e^{-(1+z)b}}{1+z} + \frac{1}{1+z} =$$

$$= \frac{1}{1+z} \quad \left(\text{si } \operatorname{Re}(1+z) > 0 \Rightarrow \underline{\underline{\operatorname{Re} z > -1}}\right).$$ Entonces:

$$\mathcal{L}[\operatorname{Sh} t](z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right) = \frac{1}{2} \, \frac{\cancel{z}+1-\cancel{z}+1}{z^2-1} = \frac{1}{z^2-1}$$

$$\mathcal{L}[\operatorname{Ch} t](z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1}\right) = \frac{z}{z^2-1}$$

Ejemplo: Dado la función $f(t) = 8 + e^{4t} + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t$, hallar su transformada de Laplace.

$$\mathcal{L}[f(t)](z) = \mathcal{L}\left[8 + e^{4t} + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t\right](z) = \mathcal{L}[8](z) + \mathcal{L}[e^{4t}](z) +$$

$$+ \frac{1}{2}\mathcal{L}[\operatorname{sen} t](z) =$$

$$\mathcal{L}[8](z) = \int_0^{+\infty} e^{-tz} \cdot 8 \cdot dt = 8\int_0^{+\infty} e^{-tz} dt = 8 \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-tz} dt =$$

$$= 8 \lim_{b\to+\infty} -\frac{e^{-tz}}{z}\Big|_0^b = 8 \lim_{b\to+\infty} -\frac{e^{-zb}}{z} + \frac{1}{z} = \frac{8}{z} \text{ si } \operatorname{Re} z > 0$$

$$\mathcal{L}[e^{4t}](z) = \int_0^{+\infty} e^{(4-z)t} dt = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{(4-z)t} dt =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \frac{e^{(4-z)t}}{4-z}\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty} \frac{e^{(4-z)b}}{4-z} - \frac{1}{4-z} = -\frac{1}{4-z} =$$

$$= \frac{1}{z-4} \text{ si } \operatorname{Re}(4-z) < 0 \iff \operatorname{Re} z > 4$$

según hemos visto anteriormente

$$\mathcal{L}[\operatorname{sen} t](z) = \frac{1}{1+z^2} \quad \text{si } \operatorname{Re}(z) > 0.$$

Sean

$D_1 = \{ z \in \mathbb{C} \ / \ Re(z) > 0 \}$

$D_2 = \{ z \in \mathbb{C} \ / \ Re(z) > 4 \}$ y sea $D = D_1 \cap D_2 = D_2$

Entonces $\forall z \in D_2$:

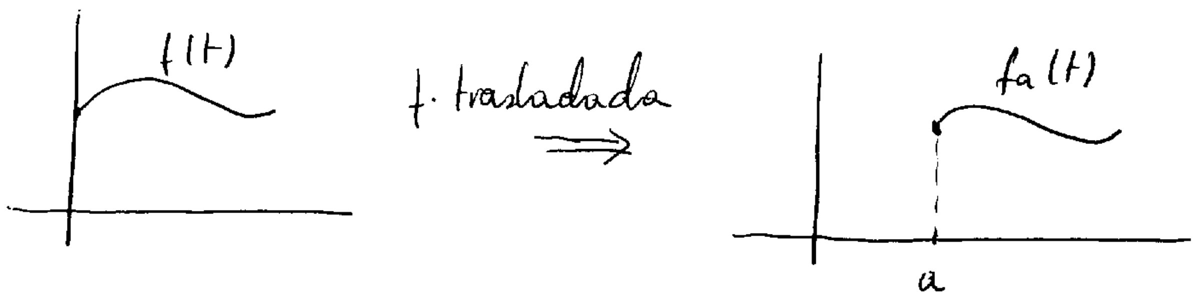
$$\mathcal{L}\left[8 + e^{4t} + \frac{1}{2} \operatorname{sen} t \right](z) = \frac{8}{z} + \frac{1}{z-4} + \frac{1}{2} \frac{1}{z^2+1}$$

No es conveniente usar la definición cada vez que queramos calcular la transformada de Laplace de una función. A continuación vamos a dar propiedades que nos permitirán ahorrar trabajo.

Función trasladada

Sea $f \in \mathcal{E}_\gamma$ y $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Definimos la función trasladada de f como:

$$f_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t \leq a \\ f(t-a) & \text{si } t \geq a \end{cases}$$



Teorema: Sea $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ y $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$

$f \in \mathcal{E}_\gamma$. Entonces:

$$\mathcal{L}[f_a(t)](z) = e^{-za} \cdot \mathcal{L}[f(t)](z) \quad \forall z \in D_\gamma$$

Demostración:

Se tiene que:

$$\mathcal{L}[f_a(t)](z) = \int_0^{+\infty} e^{-tz} \cdot f_a(t)\,dt = \overbrace{\cancel{\int_0^a e^{-tz} \cdot f_a(t)\,dt}}^{=0} + \int_a^{+\infty} e^{-tz} \cdot f_a(t)\,dt =$$

$$= \int_a^{+\infty} e^{-tz} \cdot f(t-a)\,dt$$

Si hacemos el cambio de variable $u = t - a$ al ser

$$a < t < +\infty \Rightarrow a - a < t - a < +\infty \Rightarrow 0 < u < +\infty,$$

además $t = u + a$ y $dt = du$:

$$\mathcal{L}[f_a(t)](z) = \int_a^{+\infty} e^{-tz} f(t-a)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-(a+u)z} \cdot f(u)\,du$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-az} \cdot e^{-uz} \cdot f(u)\,du = e^{-az} \int_0^{+\infty} e^{-uz} \cdot f(u)\,du =$$

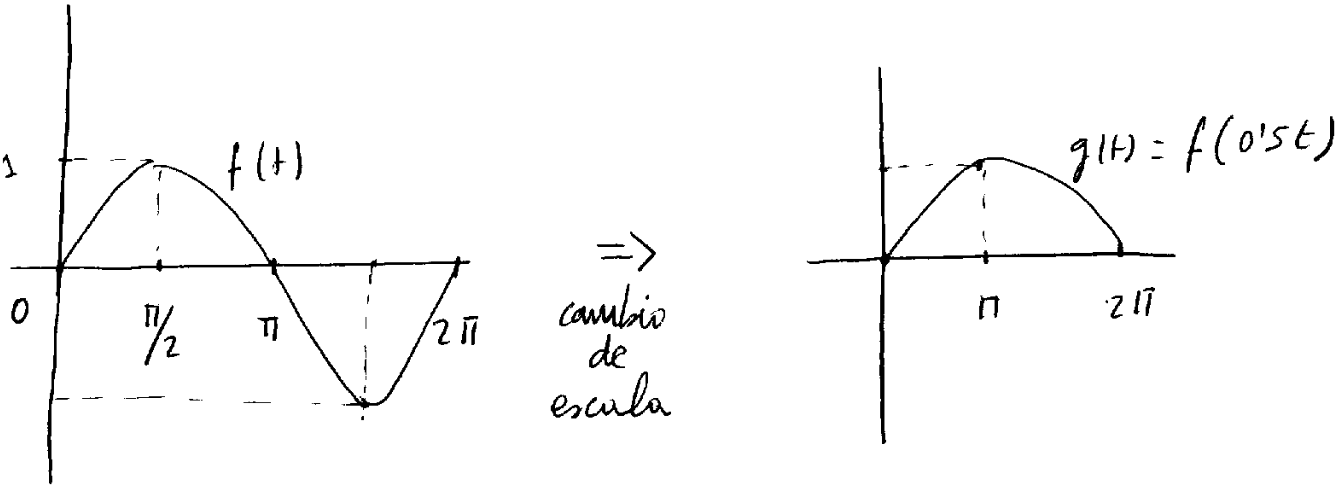
$$= e^{-az}\, \mathcal{L}[f(u)](z)$$

Cambio de escala

Sea la función $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$.

Consideramos la función $g(t) = f(\alpha t)$ $\forall t > 0$.

Decimos que g es un cambio de escala de f.



Si $0 < \alpha < 1$ la función que se obtiene es la original expandida y si $\alpha > 1$ obtenemos la original contraída.

Teorema (transformada de Laplace mediante cambio de escala)

Sea $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{E}_\gamma$ y $\alpha > 0$. Entonces:

$$\mathcal{L}[g(t)](z) = \alpha^{-1} \cdot \mathcal{L}[f(t)]\left(\frac{z}{\alpha}\right) \quad \forall \frac{z}{\alpha} \in D_\gamma$$

siendo $g(t) = f(\alpha t)$

Demostración:

Tenemos que $\mathcal{L}[g(t)](z) = \int_0^{+\infty} e^{-tz} \cdot g(t)\, dt =$

$= \int_0^{+\infty} e^{-tz} \cdot f(\alpha t)\, dt \overset{(*)}{=} \int_0^{+\infty} e^{-z \cdot \frac{1}{\alpha} u} \cdot f(u) \cdot \alpha^{-1} du =$

$= \alpha^{-1} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-\frac{z}{\alpha} u} \cdot f(u)\, du = \alpha^{-1} \cdot \mathcal{L}[f(t)](\frac{z}{\alpha})$ si se verifica que $\frac{z}{\alpha} \in D_f$

(*) Hacemos el cambio de variable $u = \alpha t \Rightarrow du = \alpha dt \Rightarrow$ $\Rightarrow dt = \alpha^{-1} du$. Además como $0 < t < +\infty \Rightarrow$ $\Rightarrow 0 < \alpha t < +\infty \Rightarrow 0 < u < +\infty$, $t = \frac{1}{\alpha} u$

Ejemplos:

Calcular la transformada de Laplace de $f(t) = \operatorname{sen} \alpha t$

$f(t)$ es un cambio de escala de $\operatorname{sen} t$ por tanto:

$\mathcal{L}[\operatorname{sen} \alpha t](z) = \alpha^{-1} \cdot \mathcal{L}[\operatorname{sen} t](\frac{z}{\alpha})$ siendo $\operatorname{Re} \frac{z}{\alpha} > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{Re}(z) > 0$.

Como $\mathcal{L}[\operatorname{sen} t](\frac{z}{\alpha}) = \dfrac{1}{(\frac{z}{\alpha})^2 + 1} = \dfrac{\alpha^2}{z^2+\alpha^2}$ tenemos que:

$\mathcal{L}[\operatorname{sen} \alpha t](z) = \alpha^{-1} \cdot \dfrac{\alpha^2}{z^2+\alpha^2} = \dfrac{\alpha}{z^2+\alpha^2}$.

Transformada de Laplace de la derivada

Para resolver determinados tipos de ecuaciones diferenciales necesitamos calcular expresiones como $\mathcal{L}[f'(t)](z)$ ó en general $\mathcal{L}[f^{(n)}(t)](z)$. Veremos como efectuaremos estos cálculos.

Teorema: Sea $f: [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ continua a trozos y de orden exponencial γ, de forma que $f': [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ sea continua a trozos en $[0,+\infty[$. Entonces existe $\mathcal{L}[f'(t)](z)$ $\forall z \in D_\gamma$ y vale:

$$\mathcal{L}[f'(t)](z) = z \cdot \mathcal{L}[f(t)](z) - f(0)$$

Demostración:

Por definición tenemos que:

$$\mathcal{L}[f'(t)](z) = \int_0^{+\infty} e^{-tz} \cdot f'(t)\, dt = \lim_{b \to \infty} \int_0^b e^{-tz} \cdot f'(t)\, dt$$

Vamos a aplicar el metodo de integración por partes $\left(\int u\, dv = u \cdot v - \int v\, du \right)$ a la integral $\int e^{-tz} f'(t)\, dt$

$$\int e^{-tz} \cdot f'(t)\,dt \left\{ \begin{array}{l} u = e^{-tz} \Rightarrow du = -z \cdot e^{-tz} dt \\ dv = f'(t)\,dt \Rightarrow v = f(t) \end{array} \right\} =$$

$$= e^{-tz} \cdot f(t) + z \cdot \int e^{-tz} \cdot f(t)\,dt \,.$$ Entonces:

$$\int_0^b e^{-tz} f'(t)\,dt = e^{-tz} \cdot f(t) \Big|_0^b + z \cdot \int_0^b e^{-tz} f(t)\,dt$$ y por tanto:

$$\lim_{b \to +\infty} \int_0^b e^{-tz} f'(t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-tz} \cdot f'(t)\,dt = \mathcal{L}[f'(t)](z) =$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left(e^{-bz} \cdot f(b) - f(0) \right) + z \cdot \mathcal{L}[f(t)](z) \quad \forall z \in D_\gamma$$

$$= \lim_{b \to +\infty} e^{-bz} \cdot f(b) + z \cdot \mathcal{L}[f(t)](z) - f(0) \quad \forall z \in D_\gamma$$

Ahora bien; al ser f de orden exponencial γ y $z \in D_\gamma \Rightarrow \operatorname{Re} z > \gamma$:

$$|e^{-bz} \cdot f(b)| \leq |e^{-bz}| \cdot |f(b)| \leq e^{-bz} \cdot M \cdot e^{\gamma z} =$$

$$= e^{(\gamma - z) b} \cdot M \Rightarrow \lim_{b \to +\infty} e^{(\gamma - z) b} \cdot M = 0 \Rightarrow \lim_{b \to +\infty} e^{-bz} \cdot f(b) = 0$$

Luego: $\mathcal{L}[f'(t)](z) = z \cdot \mathcal{L}[f(t)](z) - f(0). \quad \forall z \in D_\gamma$

Ejemplo: Sabiendo que $\mathcal{L}[\operatorname{sen} \alpha t](z) = \dfrac{\alpha}{z^2+\alpha^2}$ $\forall z \in D_0 = \{z \in \mathbb{C} \;/\; \operatorname{Re} z > 0\}$, determinar la transformada de Laplace de $f(t) = \cos \alpha t$

Si $f(t) = \cos \alpha t \Rightarrow f'(t) = -\alpha \operatorname{sen} \alpha t$. Según hemos probado anteriormente:

$\mathcal{L}[f'(t)](z) = z \cdot \mathcal{L}[f(t)](z) - f(0)$, es decir:

$$\mathcal{L}[-\alpha \operatorname{sen} \alpha t](z) = z \cdot \mathcal{L}[\cos \alpha t](z) - f(0)$$

$f(0) = \cos \alpha \cdot 0 = 1$. Es decir:

$$-\alpha \cdot \mathcal{L}[\operatorname{sen} \alpha t](z) = z \cdot \mathcal{L}[\cos \alpha t](z) - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z \cdot \mathcal{L}[\cos \alpha t](z) - 1 = -\alpha \cdot \frac{\alpha}{z^2+\alpha^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[\cos \alpha t](z) = \frac{1 - \dfrac{\alpha^2}{z^2+\alpha^2}}{z}$$

$$\mathcal{L}[\cos \alpha t](z) = \frac{z^2}{z(z^2+\alpha^2)} = \frac{z}{z^2+\alpha^2}$$

Teorema (Transformada de Laplace de la derivada n-ésima)

Sea $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ continua a trozos y de orden exponencial γ, de forma que $\forall k = 1, \dots n$ $f^{(k)} : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ sean continuas a trozos en $[0, +\infty)$. Entonces:

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)](z) = z^n \cdot \mathcal{L}[f(t)](z) - z^{n-1} \cdot f(0) - z^{n-2} \cdot f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

$\forall z \in D_\gamma$.

Demostración

Se hace por inducción sobre n.

Teorema (transformada de Laplace de la integral)

Sea $f \in \mathcal{E}_\gamma$. Entonces:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(s)\,ds\right](z) = \frac{\mathcal{L}[f(t)](z)}{z}$$ donde

$\operatorname{Re} z > \gamma$

Demostración: por definición tenemos que:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(s)\,ds\right](z) = \int_0^{+\infty} e^{-tz}\left(\int_0^t f(s)\,ds\right)dt$$

Vamos a aplicar el método de integración por partes

$$u = \int_0^t f(s)\,ds \Rightarrow du = f(t)\,dt$$

$$dv = e^{-tz}\,dt \Rightarrow v = -\frac{1}{z}\cdot e^{-tz}.$$ Entonces:

$$\int e^{-tz}\left(\int_0^t f(s)\,ds\right)dt = -\frac{1}{z}\cdot e^{-tz}\int_0^t f(s)\,ds + \frac{1}{z}\int e^{-tz}\cdot f(t)\,dt$$

con lo que:

$$\int_0^b e^{-tz}\left(\int_0^t f(s)\,ds\right)dt = -\frac{1}{z}\,e^{-tz}\left.\int_0^t f(s)\,ds\right]_0^b + \frac{1}{z}\int_0^b e^{-tz} f(t)\,dt$$

Como $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(s)\,ds\right](z) = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-tz}\left(\int_0^t f(s)\,ds\right)dt$:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(s)\,ds\right](z) = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{z}\,e^{-bz}\int_0^b f(s)\,dx + \frac{1}{z}\int_0^0 f(s)\,ds\right) +$$

$$+\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{z}\int_0^b e^{-tz} f(t)\,dt = 0 + \frac{1}{z}\lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-tz}\cdot f(t)\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left[\int_0^t f(s)\,ds\right](z) = \frac{\mathcal{L}[f(t)](z)}{z} \quad \forall z \in D_\gamma.$$

Sabemos que $\mathcal{L}[f(t)](z)$ es transformada de Laplace de la función $f(t)$ y nos preguntamos si $\frac{d}{dt}\mathcal{L}[f(t)](z)$ es la transformada de alguna función. El siguiente teorema da respuesta a la pregunta:

<u>Teorema</u>: Sea $f \in \mathcal{E}_\gamma$. Entonces:

$$\frac{d}{dz}\mathcal{L}[f(t)](z) = -\mathcal{L}[t f(t)](z) \quad \forall z \in D_\gamma$$ y en general se verifica que:

$$\frac{d^n}{dz^n}\mathcal{L}[f(t)](z) = (-1)^n \cdot \mathcal{L}[t^n f(t)](z) \quad \forall z \in D_\gamma$$

<u>Demostración</u>:

Se tiene que, por definición, $\mathcal{L}[f(t)](z) = \int_0^{+\infty} e^{-tz} \cdot f(t)\, dt$

Si hacemos la derivada parcial respecto a z:

$$\frac{d\, \mathcal{L}[f(t)](z)}{dz} = \int_0^{+\infty} \frac{\partial (e^{-tz} f(t))}{\partial z}\, dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d\, \mathcal{L}[f(t)](z)}{dz} = -\int_0^{+\infty} e^{-tz} \cdot t \cdot f(t)\, dt = -\mathcal{L}[t f(t)](z)$$

$\forall z \in D_\gamma$. Procediendo por inducción sobre n obtenemos $\frac{d^n}{dz^n}\mathcal{L}[f(t)](z) = (-1)^n \cdot \mathcal{L}[t^n f(t)](z) \quad \forall z \in D_\gamma$.

Ejemplo: Hallar la transformada de Laplace de la función $f(t) = t \operatorname{sen} \alpha t$.

Según hemos visto en el teorema anterior:

$$\frac{d\,\mathcal{L}[f(t)](z)}{dz} = -\,\mathcal{L}[t\,f(t)](z)$$

Si tomamos $f(t) = \operatorname{sen} \alpha t$:

$$-\mathcal{L}[t \operatorname{sen} \alpha t] = \frac{d\,\mathcal{L}[f(t)](z)}{dz} = \frac{d}{dz}\left[\frac{\alpha}{z^2+\alpha^2}\right] \text{ si } \operatorname{Re} z>0$$

Luego:

$$\mathcal{L}[t \operatorname{sen} \alpha t] = -\frac{d}{dt}\left[\frac{\alpha}{z^2+\alpha^2}\right] = \frac{2\alpha z}{(z^2+\alpha^2)^2} \quad \text{si } \operatorname{Re}(z)>0.$$

Transformada de Laplace de una convolución

Definición: Sean $f, g : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ dos funciones continuas a trozos. Se define la convolución de f y g, que se denota por $f*g$, como:

$$(f*g)(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ \displaystyle\int_0^t f(t-s)\,g(s)\,ds & \text{si } t>0 \end{cases}$$

Ejemplo: Sean las funciones $g, f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$

$f(t) = t$, $g(t) = t^2$. Calcular $f * g$ y $g * f$.

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(t-s)\cdot g(s)\, ds = \int_0^t (t-s)\cdot s^2 ds = \int_0^t (ts^2 - s^3) ds$$

$$= \left.\frac{ts^3}{3} - \frac{s^4}{4}\right]_0^t = \frac{t^4}{3} - \frac{t^4}{4} = \frac{t^4}{12}.$$

$$(g*f)(t) = \int_0^t g(t-s)\cdot f(s)\, ds = \int_0^t (t-s)^2 \cdot s\, ds = \int_0^t (t^2 - 2st + s^2) s\, ds =$$

$$= \int_0^t t^2 s - 2s^2 t + s^3 ds = \left.\frac{t^2 s^2}{2} - \frac{2ts^3}{3} + \frac{s^4}{4}\right]_0^t = \frac{t^4}{2} - \frac{2t^4}{3} + \frac{t^4}{4}$$

$$= \frac{6t^4 - 8t^4 + 3t^4}{12} = \frac{t^4}{12}$$

Vemos que en este caso $f * g = g * f$, la convolución de dos funciones es conmutativa.

<u>Propiedades de la convolución</u>

Sean $f, g, h : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ tres funciones continuas a trozos. Entonces:

1º $f * g = g * f$

2º $f * (g * h) = (f * g) * h$

3º $f * (g + h) = f * g + f * h$

4º $f * 0 = 0$

Demostración:

1º) antes de comenzar la demostración, recordemos dos propiedades de la integral definida

- $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

- Sea $\int_a^b f(x)\,dx$, hacemos el cambio $x = \varphi(t)$ con lo que $dx = \varphi'(t)\,dt$. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$$

Comenzamos la demostración. Por definición:

$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-s)\cdot g(s)\,ds$. Si hacemos el cambio de variable $v = t-s \Rightarrow dv = -ds \Rightarrow ds = -dv$ como $s = t-v \Rightarrow s = \varphi(v) \Rightarrow \varphi(v) = t-v$ con lo que $\varphi(0) = t$ $\varphi(t) = 0$ y por tanto:

$$(f * g)(t) = \int_t^0 f(v)\cdot g(t-v)\,dv = (g * f)(t)$$

La demostración de la 2ª propiedad (propiedad asociativa del producto de convolución) es farragosa y pesada.

3ª Propiedad distributiva

$$f*(g+h)(t) = \int_0^t f(t-s)\cdot(g+h)(s)\,ds =$$

$$= \int_0^t f(t-s)\left(g(s)+h(s)\right)ds = \int_0^t f(t-s)g(s) + f(t-s)h(s)\,ds$$

$$= \int_0^t f(t-s)\,g(s)\,ds + \int_0^t f(t-s)\,h(s)\,ds = (f*g + f*h)(t)$$

4ª Esta propiedad es obvia:

$$(f*0)(t) = \int_0^t f(t-s)\cdot \underset{0}{\underset{\shortparallel}{0(s)}}\,ds = \int_0^t f(t-s)\cdot 0\,ds = 0.$$

Teorema (transformada de Laplace de una convolución)

Sean $g, f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ tales que $f \in \mathcal{E}_\gamma$ y $g \in \mathcal{E}_\gamma$.

Entonces:

$$\mathcal{L}[f*g(t)](z) = \mathcal{L}[f(t)](z)\cdot\mathcal{L}[g(t)](z) \quad \forall z \in D_\gamma$$

La demostración del teorema anterior es difícil.

Ejemplo: calcular $\mathcal{L}\left[\int_0^t e^u \operatorname{sen}(t-u)\,du\right](z)$.

Tenemos que si $f(t)=\operatorname{sen} t$ y $g(t)=e^t$

$$(f*g)(t)=\int_0^t f(t-u)\cdot g(u)\,du=\int_0^t \operatorname{sen}(t-u)\cdot e^u\,du$$

Luego:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t e^u \operatorname{sen}(t-u)\,du\right]=\mathcal{L}\left[(f*g)(t)\right](z)=$$

$$=\mathcal{L}[f(t)](z)\cdot\mathcal{L}[g(t)](z)=\mathcal{L}[\operatorname{sen} t](z)\cdot\mathcal{L}[e^t](z)=$$

$$=\frac{1}{z^2+1}\cdot\frac{1}{z-1}=\frac{1}{(z^2+1)(z-1)}$$

<u>Primera propiedad de traslación</u>

Sea $w\in\mathbb{C}$ y $f\in\mathcal{E}_\gamma$. Entonces:

$\mathcal{L}[e^{wt}\cdot f(t)](z)=\mathcal{L}[f(t)](z-w)$ $\forall z$ tal que

$\operatorname{Re} z>\gamma+\operatorname{Re} w$

Demostración:

Se tiene que $\mathcal{L}[e^{wt}f(t)](z)=\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tz}\cdot e^{wt}f(t)\,dt$

con lo que:

$$\mathcal{L}[e^{wt}f(t)](z) = \int_0^{+\infty} e^{-(z-w)t} \cdot f(t)\,dt.$$ Si hacemos

el cambio $u = z-w$ tenemos que:

$$\mathcal{L}[e^{wt}f(t)](z) = \int_0^{+\infty} e^{-ut} f(t)\,dt = \mathcal{L}[f(t)](u) \ \forall u \in \mathbb{C}$$

tal que $Re(u) > \gamma \Rightarrow \mathcal{L}[e^{wt}f(t)](z) = \mathcal{L}[f(t)](z-w)$

$Re(z-w) > \gamma \Rightarrow Re\, z > \gamma + Re\, w$

Ejemplo:

- $\mathcal{L}[e^{wt} \operatorname{sen} \alpha t](z) = \mathcal{L}[\operatorname{sen} t](z-w)$ $Re(z) > 0 + Re\, w$

es decir que $\mathcal{L}[e^{wt}\operatorname{sen}\alpha t](z) = \dfrac{\alpha}{\alpha^2 + (z-w)^2}$ si $Re\, z > Re\, w$

De igual modo:

- $\mathcal{L}[e^{wt} \cosh\alpha t](z) = \underbrace{\mathcal{L}[\cosh \alpha t]}_{= \frac{1}{z^2-1}}(z-w)$ si $Re\, z > Re\, w$

$$= \frac{z-w}{(z-w)^2 - \alpha^2}$$

El siguiente resultado probará que hay funciones que no pueden ser transformada de ninguna función.

Teorema: Sea $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ continua a trozos en $[0,+\infty[$ y de orden exponencial de exponente γ.

Entonces:

$$\lim_{z\to\infty} L[f(t)](z) = 0 \qquad \forall z \in D_\gamma = \{z\in\mathbb{C} \,/\, \operatorname{Re} z > \gamma\}$$

Demostración:

Al ser f continua a trozos y de orden exponencial $\exists M>0$ tal que $|f(t)| \leq M\cdot e^{\gamma t}$. Tenemos que:

$$\mathcal{L}[f(t)](z) = \int_0^{+\infty} e^{-tz} f(t)\,dt \Rightarrow |\mathcal{L}[f(t)](z)| = \left|\int_0^{+\infty} e^{-tz} f(t)\,dt\right|$$

$$\Rightarrow |\mathcal{L}[f(t)](z)| \leq \int_0^{+\infty} |e^{-tz} f(t)|\,dt \Rightarrow |\mathcal{L}[f(t)](z)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-tz}|f(t)|\,dt$$

$$\Rightarrow |\mathcal{L}[f(t)](z)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-tz}\cdot M\cdot e^{\gamma t}\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\mathcal{L}[f(t)](z)| \leq M\int_0^{+\infty} e^{-(z-\gamma)t}\,dt$$ Si $z \in D_\gamma$ tenemos que:

$$\left| \mathcal{L}[f(t)](z) \right| \leq \lim_{b \to \infty} \left[-M \cdot \frac{e^{-(z-\gamma)t}}{z-\gamma} \right]_0^b = \frac{M}{z-\gamma}$$ si se

verifica que $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} \gamma$. Como:

$$\left| \mathcal{L}[f(t)](z) \right| \leq \frac{M}{z-\gamma}$$ si $\operatorname{Re} z > \gamma$ entonces:

$$\lim_{z \to \infty} \left| \mathcal{L}[f(t)](z) \right| \leq \lim_{z \to \infty} \frac{M}{z-\gamma} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{z \to \infty} \left| \mathcal{L}[f(t)](z) \right| = 0 \Rightarrow \lim_{z \to \infty} \mathcal{L}[f(t)](z) = 0.$$

Ejemplo: Probar que la función $F(z) = z^2$ no es transformada de Laplace de ninguna función.

Por reducción al absurdo, supongamos que $\exists f \in \mathcal{E}_\gamma$ tal que: $\mathcal{L}[f(t)](z) = F(z) = z^2$. Entonces por el teorema anterior debiera ser:

$$\lim_{z \to \infty} \mathcal{L}[f(t)](z) = 0 \Rightarrow \lim_{z \to \infty} z^2 = 0$$ lo cual

es falso. Luego $F(z) = z^2$ no puede ser transformada de Laplace de una función continua a trozos y de orden exponencial.

Transformada de Laplace del cociente de una función por t

Teorema: Sea $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ una función cuya transformada de Laplace es $\mathcal{L}[f(t)](z)$ y tal que $\lim_{t \to 0^+} \frac{f(t)}{t}$ existe. Entonces:

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t} \right](z) = \int_z^{+\infty} \mathcal{L}[f(t)](u)\, du$$

Demostración:

Definimos la función $g : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ de manera que $f(t) = t \cdot g(t)$. Según hemos visto en la derivada de la transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}[f(t)](z) = \mathcal{L}[t \cdot g(t)](z) = -\frac{d}{dz}\left[\mathcal{L}[g(t)](z) \right]$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dz}\left[\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t} \right](z) \right] = -\mathcal{L}[f(t)](z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t} \right](z) \Big|_{+\infty}^{z} = -\int_{+\infty}^{z} \mathcal{L}[f(t)](u)\, du \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t} \right](z) - \lim_{b \to \infty} \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t} \right](b) = \int_z^{+\infty} \mathcal{L}[f(t)](u)\, du$$

y como $\lim_{b \to \infty} \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right](b) = 0$ queda:

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right](z) = \int_z^{+\infty} \mathcal{L}[f(t)](u)\, du$$

Ejemplo:

Calcular

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt = \int_0^{+\infty} \mathcal{L}[\operatorname{sen} t](z)\, dz =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+z^2}\, dz = \operatorname{arctg} z \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

Transformada de una función periódica.

Definición de función periódica:

Sea $f: [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$. Se dice que f es periódica de periodo T, $T > 0$, si $f(t+T) = f(t)$ $\forall t \in [0, +\infty[$.

El siguiente teorema nos muestra que la transformada de una función periódica puede obtenerse integrando sobre un periodo.

Teorema: Sea $f:[0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$, $f\in \mathcal{E}_\gamma$ y periódica de periodo T. Entonces:

$$\mathcal{L}[f(t)](z)=\frac{1}{1-e^{zT}}\cdot\int_0^{T} e^{-tz}f(t)\,dt$$

Demostración:

Por definición tenemos que

$$\mathcal{L}[f(t)](z)=\int_0^{+\infty} e^{-tz}f(t)\,dt=\int_0^{T} e^{-tz}\cdot f(t)\,dt+\int_T^{+\infty} e^{-tz}f(t)\,dt$$

Consideremos $\int_T^{+\infty} e^{-tz}f(t)\,dt$ y hagamos el cambio de variable $u=t-T \Rightarrow du=dt$. Nos queda:

$$\int_0^{+\infty} e^{-(u+T)z}\cdot f(u+T)\,du=\int_T^{+\infty} e^{-tz}\cdot f(t)\,dt=$$

$$=\int_0^{+\infty} e^{-(u+T)z}\cdot f(u)\,du=e^{-T\cdot z}\cdot\int_0^{+\infty} e^{-uz}f(u)\,du.$$

Luego, podemos poner, que:

$$\int_0^{+\infty} e^{-tz}f(t)\,dt=\int_0^{T} e^{-tz}\cdot f(t)\,dt+e^{-Tz}\cdot\int_0^{+\infty} e^{-tz}f(t)\,dt$$

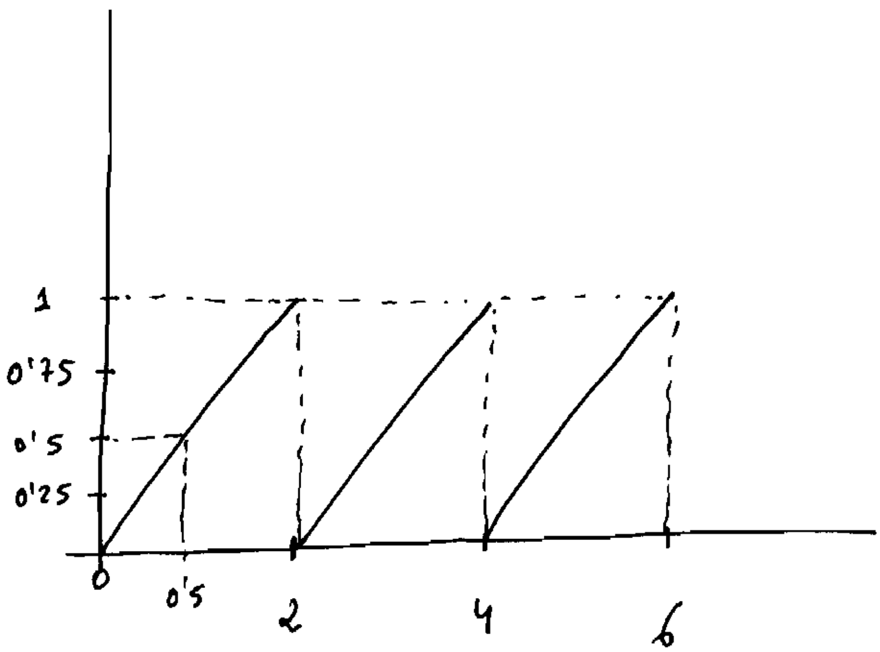
con lo que:

$$\int_0^{+\infty} e^{-tz} f(t)\,dt - e^{-Tz}\int_0^{+\infty} e^{-tz} f(t)\,dt = \int_0^{T'} e^{-tz} f(t)\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-tz} f(t)\,dt \left(1 - e^{-Tz}\right) = \int_0^{T'} e^{-tz} f(t)\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left[f(t)\right](z) = \int_0^{+\infty} e^{-tz} f(t)\,dt = \frac{1}{1-e^{-Tz}} \int_0^{T'} e^{-tz} f(t)\,dt$$

Ejemplo: hallar la transformada de la función cuya gráfica es:



Esta función es periódica de periodo 2 ya que:

$f(x+2) = f(x) \quad \forall x \in [0, +\infty[$. Por tanto:

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right](z) = \frac{1}{1-e^{2z}} \cdot \int_0^{2} e^{-tz} \cdot t\,dt = \frac{1-(z+1)\cdot e^{-z}}{z^2\left(1-e^{-2z}\right)}$$

La transformada de Laplace inversa

La utilización práctica de la transformada de Laplace no sólo requiere el cálculo de la misma a partir de una función dada sino también el problema inverso, es decir, encontrar la función f conocida su transformada de Laplace. Nos surgen tres preguntas:

1) Dada una función F, ¿existe siempre otra función f de modo que $\mathcal{L}[f(t)](z) = F(z)$?

2) Suponiendo que para una función $F(z)$ existe $f(t)$ tal que $F(z) = \mathcal{L}[f(t)](z)$, ¿esta f es única?

3) ¿Cómo se halla esa f?

- En relación a la primera pregunta la respuesta es negativa, hemos visto anteriormente que $F(z) = z^2$ no es transformada de Laplace de ninguna función.
- La respuesta a la segunda pregunta también es NO, ya que las transformadas de Laplace de dos funciones que tan sólo difieran en un punto son iguales. Veamos esto:

Consideremos las funciones:

$$f(t) = t \qquad g(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \neq 1 \\ 0 & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

$f(t) = g(t) \quad \forall t \neq 1 \qquad f(1) = 1 \neq 0 = g(1)$, es decir que las funciones $f(t)$ y $g(t)$ difieren tan sólo en un punto. Se tiene que:

$\mathcal{L}[f(t)](z) = \mathcal{L}[g(t)](z) = \dfrac{1}{z^2}$, ambas tienen la misma transformada de Laplace. Hay pues infinitas funciones f cuya transformada de Laplace $\mathcal{L}[f(t)](z)$ coincide con una función dada $F(z)$, pero lo interesante es que de todas estas funciones una y solo una de ellas es continua. Es decir que:

Si f y g son dos funciones continuas y se verifica:

$$\mathcal{L}[f(t)](z) = \mathcal{L}[g(t)](z) \quad \forall z \Rightarrow f(t) = g(t) \quad \forall t.$$

Esto nos da pie a la siguiente definicion

<u>Definición de transformada de Laplace inversa</u>

Se llama transformada inversa de la función F, denotándose $\mathcal{L}^{-1}[F(z)]$, a la única función continua $f: [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ que satisface:

$$\mathcal{L}[f(t)](z) = F(z).$$

<u>Propiedades de la transformada inversa</u>

1ª $\mathcal{L}^{-1}[\alpha \cdot F(z) + \beta \cdot G(z)](t) = \alpha \cdot \mathcal{L}^{-1}[F(z)](t) + \beta \cdot \mathcal{L}^{-1}[G(z)](t)$

siendo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ constantes, suponiendo que existen $\mathcal{L}^{-1}[F(z)]$ y $\mathcal{L}^{-1}[G(z)]$.

Demostración:

Sea $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(z)](t)$, $g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(z)](t)$. Entonces $F(z) = \mathcal{L}[f(t)](z)$, $G(z) = \mathcal{L}[g(t)](z)$. Por la linealidad de la transformada de Laplace:

$$\alpha F(z) + \beta G(z) = \alpha \cdot \mathcal{L}[f(t)](z) + \beta \cdot \mathcal{L}[g(t)](z) =$$

$$= \mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)](z) \Rightarrow \alpha f(t) + \beta g(t) = \mathcal{L}^{-1}[\alpha F(z) + \beta G(z)](t)$$

$$\Rightarrow \alpha \cdot \mathcal{L}^{-1}[F(z)](t) + \beta \cdot \mathcal{L}^{-1}[G(z)](t) = \mathcal{L}^{-1}[\alpha F(z) + \beta G(z)](t)$$

2ª $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{d^n}{dz^n} F(z)\right](t) = (-t)^n \cdot f(t)$ donde $\mathcal{L}^{-1}[F(z)](t) = f(t)$

Demostración:

Al ser $\mathcal{L}^{-1}[F(z)](t) = f(t) \Leftrightarrow \mathcal{L}[f(t)](z) = F(z)$

$$\Rightarrow \frac{d^m}{dz^m} \mathcal{L}[f(t)](z) = \frac{d^m}{dz^m} F(z).$$

Según hemos visto (página 16 vuelta):

$$\frac{d^m}{dz^m} \mathcal{L}[f(t)](z) = (-1)^m \mathcal{L}[t^m f(t)](z) = \frac{d^m}{dz^m} F(z)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{d^m}{dz^m} F(z)\right](t) = (-1)^m t^m f(t) = (-t)^m f(t)$$

Finalmente consideremos la tercera cuestión, ¿cómo podemos calcular la transformada inversa cuando existe?

<u>Observación</u>: Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ un polo de orden n de la función racional $F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$. Entonces z_0 es también polo de orden n de la función $G(z) = e^{\alpha z} \cdot F(z)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

<u>Demostración</u>:

Si z_0 es polo de orden n de $F(z)$:

$$\exists \lim_{z \to z_0} (z-z_0)^n F(z) \neq 0, \infty.$$

Pero también se verifica que:

$$\exists \lim_{z\to z_0} G(z)\cdot(z-z_0)^n = \lim_{z\to z_0} (z-z_0)^n \cdot e^{\alpha z}\cdot F(z) =$$

$$= \lim_{z\to z_0} e^{\alpha z} \cdot \lim_{z\to z_0} (z-z_0)^n \cdot F(z) = e^{\alpha z_0} \cdot \lim_{z\to z_0} (z-z_0)^n \cdot F(z) \neq 0, \infty$$

Fórmula de inversión compleja

Sean p y q dos funciones polinómicas de forma que:

1º $p(z)$ y $q(z)$ son primos entre sí

2º grado $q \geq 1+$ grado p

3º Sean $z_1, z_2, \dots z_n$ los polos de $F(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ (también podríamos decir que $z_1, z_2, \dots z_n$ son las raíces de $q(z)$) de forma que $F \in H(\mathbb{C} - \{z_1, z_2, \dots z_n\})$.

Entonces

$\mathcal{L}[f(t)](z) = F(z) \quad \forall z \in D_\gamma$, para cierto $\gamma \in \mathbb{R}$, donde

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} \text{Res}\,(e^{zt} F(z), z_i)$$

Ejemplo:

Calcular la transformada inversa de Laplace de la función

$$F(z) = \frac{1}{z^2(z+2)^2}$$

Los polos de $F(z) = \dfrac{1}{z^2(z+2)^2}$ son $z=0$ (doble) y

$z=-2$ (doble)

Según el teorema anterior:

$\mathcal{L}^{-1}[f(t)](z) = F(z)$ donde:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} \text{Res}\left(e^{tz} \cdot F(z), z_i\right) = \text{Res}\left(e^{tz} \cdot \frac{1}{z^2(z+2)^2}, 0\right) +$$

$$+ \text{Res}\left(e^{tz} \cdot \frac{1}{z^2(z+2)^2}, -2\right)$$. Calculemos los residuos:

Recordemos que si z_0 es un polo de orden m de una función $\phi(z)$ entonces:

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \cdot \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((z-z_0)^m \cdot \phi(z)\right)$$

En nuestro caso:

$$\text{Res}\left(e^{tz} \frac{1}{z^2(z+2)^2}, 0\right) = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left(e^{tz} \cdot \frac{1}{(z+2)^2}\right) =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left(t \cdot e^{tz} \cdot \frac{1}{(z+2)^2} - e^{tz} \cdot \frac{2}{(z+2)^3}\right) = \frac{1}{4}t + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(t+1)$$

$$\operatorname{Res}\left(e^{tz}\cdot\frac{1}{z^2(z+2)^2},-2\right)=\lim_{z\to-2}\frac{d}{dz}\left(e^{tz}\cdot\frac{1}{z^2}\right)=$$

$$=\lim_{z\to-2}\left(t\cdot e^{tz}\cdot\frac{1}{z^2}-e^{tz}\cdot\frac{2}{z^3}\right)=t\cdot e^{-2t}\cdot\frac{1}{4}+e^{-2t}\cdot\frac{1}{4}$$

$$=\frac{1}{4}e^{-2t}(1+t)$$

Luego $F(z)=\mathcal{L}[f(t)](z)$ donde

$$f(t)=\frac{1}{4}(t+1)+\frac{1}{4}e^{-2t}(t+1)=\frac{1}{4}(t+1)(1+e^{-2t})$$

Ejemplo: calcular $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z^2+9z+2}{(z-1)^2(z+3)}\right](t)$

Los polos de $F(z)=\frac{z^2+9z+2}{(z-1)^2(z+3)}$ son $z=1$ doble y $z=-3$ simple. Si descomponemos la fracción racional propia en fracciones simples:

$$\frac{z^2+9z+2}{(z-1)^2(z+3)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{(z-1)^2}+\frac{C}{z+3}$$

$$\frac{z^2+9z+2}{(z-1)^2(z+3)}=\frac{A(z-1)(z+3)+B(z+3)+C(z-1)^2}{(z-1)^2(z+3)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(z^2+2z-3)+B(z+3)+C(z^2-2z+1)=z^2+9z+2$$

$$(A+C)z^2+(2A+B-2C)z+(-3A+3B+C)=z^2+9z+2\Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} A+C&=1\\ 2A+B-2C&=9\\ -3A+3B+C&=2\end{aligned}\right\} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -2 & 9\\ -3 & 3 & 1 & 2\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -4 & 7\\ 0 & 3 & 4 & 5\end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -4 & 7\\ 0 & 0 & 16 & 26\end{array}\right) \qquad \begin{aligned} A+C&=1\\ B-4C&=1\\ 16C&=26\end{aligned} \left\{\begin{aligned} A&=1-\frac{13}{8}=-\frac{5}{8}\\ B&=1+\frac{52}{8}=1+\frac{13}{2}=\frac{15}{2}\\ C&=\frac{13}{8}\end{aligned}\right.$$

Luego:

$$\frac{z^2+9z+2}{(z-1)^2(z+3)}=\frac{-\frac{5}{8}}{z-1}+\frac{\frac{15}{2}}{(z-1)^2}+\frac{\frac{13}{8}}{z+3}$$

. Por tanto, teniendo en cuenta las propiedades de la inversa de la transformada:

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(z)](t)=\mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{z-1}+\frac{15}{2}\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{13}{8}\cdot\frac{1}{z+3}\right](t)$$

$$=-\frac{5}{8}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z-1}\right](t)+\frac{15}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(z-1)^2}\right](t)+\frac{13}{8}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z+3}\right](t)$$

Si $f_1(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z-1}\right] \Rightarrow \mathcal{L}[f_1(t)](z)=\frac{1}{z-1}$ y si aplicamos el resultado del teorema anterior

$$f_1(t)=\operatorname{Res}\left[\frac{e^{zt}}{z-1},1\right]=\frac{p(1)}{q'(1)}=e^t$$

$p(z)=e^{zt} \Rightarrow p(1)=e^t$

$q(z)=z-1 \Rightarrow q'(z)=1 \Rightarrow q'(1)=1$

Si $f_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(z-1)^2}\right](t) \Rightarrow \mathcal{L}[f_2(t)](z) = \frac{1}{(z-1)^2}$

y de nuevo, por el teorema anterior:

$$f_2(t) = \lim_{z\to 1} \frac{1}{(2-1)!} \cdot \frac{d}{dt}\left[(z-1)^2 \frac{e^{zt}}{(z-1)^2}\right] = \lim_{z\to 1} \frac{d}{dt}\left(e^{zt}\right) =$$

$$f_2(t) = \lim_{z\to 1} \left(t \cdot e^{zt}\right) = t\cdot e^t$$

Si $f_3(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z+3}\right](t) \Rightarrow \mathcal{L}[f_3(t)](z) = \frac{1}{z+3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow f_3(t) = \text{Res}\left[\frac{e^{zt}}{z+3}, -3\right] = \frac{p(-3)}{q'(-3)} = e^{-3t}$$

$p(z) = e^{zt} \Rightarrow p(-3) = e^{-3t}$

$q(z) = z+3 \Rightarrow q'(z) = 1 \Rightarrow q'(-3) = 1$

Luego:

$$f(t) = -\frac{5}{8} e^t + \frac{15}{2} \cdot t e^t + \frac{13}{8} \cdot e^{-3t}$$

Ejemplo:

Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2z^2+10z}{(z^2+2z+5)(z+1)}\right](t)$

La función $F(z) = \frac{2z^2+10z}{(z^2+2z+5)(z+1)}$ tiene tres polos simples, a saber, $z_1 = -1+2i$, $z_2 = -1-2i$, $z_3 = -1$

La descomposición en fracciones simples de esta fracción racional propia es:

$$\frac{2z^2+10z}{(z^2+2z+5)(z+1)} = \frac{Mz+N}{z^2+2z+5} + \frac{A}{z+1} = \frac{(Mz+N)(z+1)+A(z^2+2z+5)}{(z^2+2z+5)(z+1)}$$

$$\Rightarrow (Mz+N)(z+1)+A(z^2+2z+5) = 2z^2+10z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Mz^2+Mz+Nz+N + Az^2+2Az+5A = 2z^2+10z$$

$$\left.\begin{array}{l} A+M=2 \\ M+N+2A=10 \\ N+5A=0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 10 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & -5 & 1 & -10 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -4 & -40 \end{array}\right) \begin{array}{l} \to M+A=2 \Rightarrow A=-2 \\ \to -M+10=6 \Rightarrow M=4 \\ N=10 \end{array}$$

Luego:

$$\frac{2z^2+10z}{(z^2+2z+5)(z+1)} = \frac{4z+10}{z^2+2z+5} - \frac{2}{z+1}$$ y por lo tanto:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2z^2+10z}{(z^2+2z+5)(z+1)}\right](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4z+10}{z^2+2z+5}\right](t) - 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z+1}\right](t)$$

Si $f_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4z+10}{z^2+2z+5}\right](t) \Rightarrow \mathcal{L}[f_1(t)](z) = \frac{4z+10}{z^2+2z+5} \Rightarrow$

$$\Rightarrow f_1(t) = \operatorname{Res}\left[\frac{4z+10}{z^2+2z+5}\cdot e^{zt}, -1+2i\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{4z+10}{z^2+2z+5}, -1-2i\right]$$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{(4z+10)e^{zt}}{z^2+2z+5}, -1+2i\right] = \frac{p(-1+2i)}{q'(-1+2i)} = \frac{6+8i}{4i}\, e^{(-1+2i)t} = \frac{3+4i}{2i} e^{(-1+2i)t}$$

$$p(z) = (4z+10)e^{zt} \Rightarrow p(-1+2i) = (-4+8i+10)\cdot e^{(-1+2i)t}$$

$$p(-1+2i) = (6+8i)\, e^{(-1+2i)t}$$

$$q(z) = z^2+2z+5 \Rightarrow q'(z) = 2z+2 \Rightarrow q'(-1+2i) = \cancel{-2}+4i\cancel{+2}$$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{(4z+10)e^{zt}}{z^2+2z+5}, -1-2i\right] = +\frac{6-8i}{-4i}\, e^{(-1-2i)t} = \frac{-3+4i}{2i}\, e^{(-1-2i)t}$$

Si $f_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z+1}\right] \Rightarrow \mathcal{L}[f_2(t)] = \frac{1}{z+1} \Rightarrow f_2(t) = e^{-t}$

$$f_2 = \operatorname{Res}\left[\frac{e^{zt}}{z+1}, -1\right] = \frac{e^{-t}}{1} = e^{-t}$$

Luego:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2z^2+10z}{(z^2+2z+5)(z+1)}\right](t) = \frac{3+4i}{2i}\, e^{(-1+2i)t} + \frac{-3+4i}{2i}\, e^{(-1-2i)t} - 2e^{-t}$$

Para calcular la transformada inversa de Laplace de funciones racionales se procederá descomponiendo la función en fracciones simples.

Ejemplo: calcular la T.I.L de la función

$$F(z) = \frac{1}{z^2(z+2)^2}$$

$$\frac{1}{z^2(z+2)^2} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z+2} + \frac{D}{(z+2)^2}$$

$$\frac{1}{z^2(z+2)^2} = \frac{Az(z+2)^2 + B(z+2)^2 + C(z+2)z^2 + Dz^2}{z^2(z+2)^2}$$

$$A(z^3+4z^2+4z) + B(z^2+4z+4) + C(z^3+2z^2) + Dz^2 = 1$$

$$\begin{aligned} A+C &= 0 \\ 4A+B+2C+D &= 0 \\ 4A+4B &= 0 \\ 4B &= 1 \end{aligned} \qquad \left\{ \begin{array}{l} C = \frac{1}{4} \\ -1+\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+D = 0 \Rightarrow D = \frac{1}{4} \\ A = -\frac{1}{4} \\ B = \frac{1}{4} \end{array} \right.$$

Luego:

$$\frac{1}{z^2(z+2)^2} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z^2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z+2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(z+2)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2(z+2)^2}\right](t) = -\frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z}\right](t) + \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2}\right](t) +$$

$$+\frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z+2}\right](t) + \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(z+2)^2}\right](t) =$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z}\right] = \operatorname{Res}\left(\frac{e^{zt}}{z}, 0\right) = \frac{P(0)}{q'(0)} = 1$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2}\right] = \operatorname{Res}\left[\frac{e^{zt}}{z^2}, 0\right] = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left[z^2\cdot\frac{e^{zt}}{z^2}\right] =$$

$$= \lim_{z\to 0} t\cdot e^{zt} = t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z+2}\right](t) = \operatorname{Res}\left[\frac{e^{zt}}{z+2}, -2\right] = \frac{p(-2)}{q'(-2)} = e^{-2t}$$

$$p(z) = e^{zt} \Rightarrow p(-2) = e^{-2t}$$

$$q(z) = z+2 \Rightarrow q'(-2) = 1$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(z+2)^2}\right](t) = \lim_{z\to -2} \frac{d}{dz}\left[\frac{e^{zt}}{(z+2)^2}\cdot (z+2)^2\right] =$$

$$= \lim_{z\to -2}\left[t\cdot e^{zt}\right] = t\cdot e^{-2t}$$

Luego:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2(z+2)^2}\right](t) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}t + \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{4}t\cdot e^{-2t}$$

Aplicación de la transformada de Laplace a la resolución de problemas.

Seguiremos el siguiente esquema a la hora de resolver problemas:

$$\begin{array}{ccc} \text{Problema original} & \xrightarrow{\quad\mathcal{L}\quad} & \text{Problema transformado} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Solución del problema} & \xleftarrow{\quad\mathcal{L}^{-1}\quad} & \text{Solución del problema} \end{array}$$

Observación: Ecuaciones diferenciales.

Una ecuación diferencial es una relación entre una variable independiente t, una función de la misma $y(t)$ y sus derivadas sucesivas $y'(t), y''(t), \dots$

Por ejemplo:

$y''(t) - 2t\,y'(t) + t^2 y(t) + 4t = 0$ es una ecuación diferencial. Se llama orden de la ecuación diferencial al grado de la mayor derivada, en este caso el orden es 2.

Las transformadas de Laplace se emplean para resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Estas ecuaciones diferenciales son de la forma:

$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(t)$ donde $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots a_2, a_1, a_0$ son constantes.

Un problema de Cauchy es una ecuacion diferencial con condiciones iniciales. Veamos con un ejemplo como resolver un problema de Cauchy

Resolver el problema de Cauchy:

$$\left.\begin{array}{l} y'' - 2y' + y = e^t + t \\ y'(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{array}\right\}$$

Vamos a aplicar una transformación de Laplace a la ecuación diferencial:

$y'' - 2y' + y = e^t + t \Rightarrow \mathcal{L}(y'' - 2y' + y) = \mathcal{L}(e^t + t)$. En virtud de la linealidad de la transformada de Laplace:

$\mathcal{L}(y'') - 2\mathcal{L}(y') + \mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(e^t) + \mathcal{L}(t)$ (*). Tenemos que:

$\mathcal{L}(y'') = z^2 \cdot \mathcal{L}(y) - z \cdot y(0) - y'(0) = z^2 \mathcal{L}(y) - z$ (transformada de la derivada n-sima, página 15 vuelta)

$\mathcal{L}(y') = z \cdot \mathcal{L}(y) - y(0) = z\mathcal{L}(y) - 1$ (transformada de la derivada primera, página 14)

$[\mathcal{L}(e^t)](z) = \dfrac{1}{z-1}$ (transformada de e^{wt}, página 6)

$[\mathcal{L}(t)](z) = \dfrac{1}{z^2}$ (transformada de t^n, 4 y 5)

Si sustituimos estos valores en (*) y llamamos $Y = \mathcal{L}[y(t)](z)$

nos queda:

$$z^2 Y - z - 2(zY - 1) + Y = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z^2}$$

$$z^2 Y - z - 2zY + 2 + Y = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z^2}$$

$$Y(z^2 - 2z + 1) - z + 2 = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z^2}$$

$$Y(z^2 - 2z + 1) = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z^2} + z - 2$$

$$Y(z-1)^2 = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z^2} + z - 2$$

$Y = \dfrac{1}{(z-1)^3} + \dfrac{1}{z^2(z-1)^2} + \dfrac{z-2}{(z-1)^2}$. Si aplicamos ahora la transformada inversa, teniendo en cuenta que $y = y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(z)](t)$:

$$\mathcal{L}^{-1}[Y] = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(z-1)^3}\right)(t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2(z-1)^2}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z-2}{(z-1)^2}\right](t) \quad (**)$$

Como:

- $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(z-1)^3}\right](t) = \operatorname{Res}\left[\dfrac{e^{tz}}{(z-1)^3}, 1\right] = \lim\limits_{z\to 1} \dfrac{1}{2!} \dfrac{d^2}{dz^2}\left[(z-1)^3 \cdot \dfrac{e^{tz}}{(z-1)^3}\right] =$

$= \dfrac{1}{2} \lim\limits_{z\to 1} t^2 e^{tz} = \dfrac{1}{2} t^2 e^t$ (hay que aplicar la fórmula de inversión compleja, página 25, y tener en cuenta que $z=1$ es un polo triple)

$$\bullet\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2(z-1)^2}\right](t) = \operatorname{Res}\left[\frac{e^{tz}}{z^2(z-1)^2}, 0\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{e^{tz}}{z^2(z-1)^2}, 1\right] =$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{tz}}{(z-1)^2}\right) + \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{tz}}{z^2}\right) =$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{t e^{tz}(z-1)^2 - 2(z-1)e^{tz}}{(z-1)^4} + \lim_{z\to 1} \frac{t\cdot e^{tz} z^2 - 2z\cdot e^{tz}}{z^4} =$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{t\cdot e^{tz}(z-1) - 2\cdot e^{tz}}{(z-1)^3} + \lim_{z\to 1} \frac{tz\cdot e^{tz} - 2e^{tz}}{z^3} =$$

$$= \frac{-t-2}{-1} + te^t - 2e^t = t+2+te^t - 2e^t$$

$$\bullet\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z-2}{(z-1)^2}\right](t) = \operatorname{Res}\left[\frac{(z-2)\cdot e^{tz}}{(z-1)^2}, 1\right] =$$

$$= \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}\left[(z-1)^2 \cdot \frac{(z-2)e^{tz}}{(z-1)^2}\right] = \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}\left[(z-2)\cdot e^{tz}\right] =$$

$$= \lim_{z\to 1}\left(e^{tz} + t(z-2)e^{tz}\right) = e^t - t\cdot e^t$$

Sustituyendo en (**) obtenemos:

$$y(t) = \frac{1}{2}t^2e^t + t + 2 + te^t - 2e^t + e^t - te^t, \text{ es decir}$$

que la solución del problema de Cauchy es:

$$y(t) = \frac{1}{2}t^2e^t - e^t + t + 2$$

Antes de proseguir con otro ejemplo vamos a ver la función de Heaviside o escalón unidad que nos será de gran ayuda.

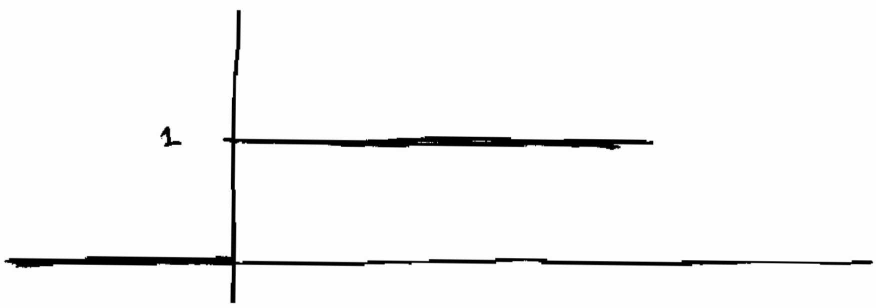
FUNCIÓN DE HEAVISIDE O ESCALÓN UNIDAD

Esta función es útil para expresar funciones con discontinuidad de salto finito como combinación lineal de funciones de Heaviside

Se define la función de Heaviside como:

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Su gráfica sería:



Por traslación, la función puede mover su escalón a otra función. Así $H(x-a)$, denotada también como $H_a(x)$, traslada el escalón a la función $x = a$:

$$H_a(x) = H(x-a) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1 & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

La altura del escalón puede cambiarse al multiplicar por k la función:

$$kH_a(x) = kH(x-a) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ k & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

¿Cómo podemos expresar como combinación lineal de funciones de Heaviside la función $f(t)$?

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 < t < \pi \\ \cos 2t & \text{si } t \geq \pi \end{cases}$$

Se puede expresar $f(t)$ como:

$$f(t) = t\left[H(t) - H(t-\pi)\right] + \cos 2t \cdot H(t-\pi)$$

Ahora vamos a ver propiedades referentes a la transformada de Laplace de la función de Heaviside.

Teorema:

a) $\mathcal{L}\left[H(t-a)\right](z) = \dfrac{e^{-az}}{z}$, $\operatorname{Re} z > 0$

b) $\mathcal{L}\left[f(t-a) \cdot H(t-a)\right](z) = e^{-az} \cdot \mathcal{L}\left[f(t)\right](z)$ siendo $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ una función.

Demostración:

a) Por definición

$$\mathcal{L}[H(t-a)](z) = \int_0^{+\infty} e^{-tz} H_a(t)\,dt = \int_a^{+\infty} e^{-tz}\,dt =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \int_a^b e^{-tz}\,dt = \lim_{b\to+\infty} \left.\frac{e^{-tz}}{-z}\right|_a^b =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \frac{e^{-bz}}{-z} + \frac{e^{-az}}{z} = \frac{e^{-az}}{z} \quad \text{si } \operatorname{Re} z > 0$$

b) De nuevo, por definición:

$$\mathcal{L}[f(t-a)\cdot H(t-a)](z) = \int_0^{+\infty} e^{-tz}\cdot H_a(t)\cdot f(t-a)\,dt =$$

$$= \int_a^{+\infty} e^{-tz}\cdot f(t-a)\,dt.$$ Si hacemos el cambio $u = t-a$

al ser $a < t < +\infty$ y $t = u+a \Rightarrow a < u+a < +\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 < u < +\infty$; $dt = du$. Por tanto la integral anterior se expresa como:

$$\mathcal{L}[f(t-a)H(t-a)](z) = \int_0^{+\infty} e^{-(u+a)z}\cdot f(u)\,du = e^{-az}\int_0^{+\infty} e^{-uz} f(u)\,du$$

$$= e^{-az}\cdot \mathcal{L}[f(t)](z)$$

Ejemplo: Resolver el siguiente problema de Cauchy:

$$\left.\begin{array}{l} y'' + y = f(t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{array}\right\}$$

Siendo $f(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 < t < \pi \\ \cos 2t & \text{si } t \geq \pi \end{cases}$

En primer lugar, según hemos visto:

$$f(t) = t\left[H(t) - H(t-\pi)\right] + \cos 2t \cdot H(t-\pi)$$

Si aplicamos la transformada de Laplace a la ecuación diferencial $y'' + y = f(t)$ nos queda que:

$\mathcal{L}[y''+y](z) = \mathcal{L}[f(t)](z)$. Por la linealidad de $\mathcal{L}$:

$\mathcal{L}[y''](z) + \mathcal{L}[y](z) = \mathcal{L}[f(t)](z)$. Como:

$\mathcal{L}[y''] = z^2 \cdot \mathcal{L}[y](z) - z \cdot y(0) - y'(0) = z^2 \mathcal{L}[y](z) - 1$,

si hacemos $Y(z) = \mathcal{L}[y](z)$ nos queda:

$z^2 Y(z) - 1 + Y(z) = \mathcal{L}[f(t)](z)$, es decir:

$$Y(z)\left[z^2+1\right] = 1 + \mathcal{L}[f(t)](z) \quad (*)$$

Veamos el valor de $\mathcal{L}[f(t)](z)$

$$\mathcal{L}[f(t)](z) = \mathcal{L}\left[t H(t) - t H(t-\pi) + \cos 2t \cdot H(t-\pi)\right](z) =$$

$$= \mathcal{L}[t H(t)](z) - \mathcal{L}[t H(t-\pi)](z) + \mathcal{L}[\cos 2t \, H(t-\pi)](z) (**)$$

Se tiene que:

- $\mathcal{L}[t H(t)](z) = e^{-0z} \cdot \mathcal{L}[t](z) = \dfrac{1}{z^2}$

- $\mathcal{L}[t H(t-\pi)](z) = \mathcal{L}\left[[(t-\pi)+\pi] H(t-\pi)\right](z) =$

$$= \mathcal{L}[(t-\pi) H(t-\pi)](z) + \pi \cdot \mathcal{L}[H(t-\pi)](z) =$$

$$= e^{-\pi z} \cdot \mathcal{L}[t](z) + \pi \cdot \frac{e^{-\pi \cdot z}}{z} = e^{-\pi z} \cdot \frac{1}{z^2} + \pi \cdot e^{-\pi z} \cdot \frac{1}{z}$$

Teniendo en cuenta que $\cos 2(t-\pi) = \cos 2t$:

- $\mathcal{L}[\cos 2t \cdot H(t-\pi)] = \mathcal{L}[\cos 2(t-\pi) H(t-\pi)] =$

$$= e^{-\pi z} \cdot \mathcal{L}[\cos 2t](z) = e^{-\pi z} \cdot \frac{z}{z^2+4}.$$

Sustituyendo estos valores en (*) obtenemos:

$$Y(z) \cdot (z^2+1) = 1 + \frac{1}{z^2} - e^{-\pi z}\left(\frac{1}{z^2} + \frac{\pi}{z} - \frac{z}{z^2+4}\right)$$

$$Y(z)(z^2+1) = \frac{1+z^2}{z^2} - (1+z^2) \cdot e^{-\pi z}\left(\frac{1}{z^2(z^2+1)} + \frac{\pi}{z(z^2+1)} - \frac{z}{(z^2+4)(z^2+1)}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(z) = \frac{1}{z^2} - e^{-\pi z}\left[\frac{1}{z^2(z^2+1)} + \frac{\pi}{z(z^2+1)} - \frac{z}{(z^2+4)(z^2+1)}\right]$$

Para obtener la solución tenemos que aplicar la transformada inversa de Laplace:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(z)](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2}\right](t) - \mathcal{L}^{-1}\left[e^{-\pi z}\cdot\frac{1}{z^2(z^2+1)}\right](t)$$

$$-\pi\cdot\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-\pi z}\frac{1}{z\cdot(z^2+1)}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z\cdot e^{-\pi z}}{(z^2+4)(z^2+1)}\right](t)$$

Se tiene que:

- $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2}\right](t) = \text{Res}\left[\frac{e^{tz}}{z^2}, 0\right] = \lim_{z\to 0}\frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left[z^2\cdot\frac{e^{tz}}{z^2}\right]$

$$= \lim_{t\to 0} t\cdot e^{tz} = t$$

- $\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-\pi z}\cdot\frac{1}{z^2(z^2+1)}\right](t) = H(t-\pi)\cdot\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z^2(z^2+1)}\right](t-\pi) =$

$= H(t-\pi)\cdot(t-\pi)\cdot\text{sen}(t-\pi)$, para ello tan sólo debemos tener en cuenta que

$$\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-az}F(z)\right](t) = H(t-a)\cdot f(t-a)$$

- $\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-\pi z}\cdot\frac{1}{z(z^2+1)}\right] = H(t-\pi)\cdot\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z(z^2+1)}\right](t-\pi) =$

$= H(t-\pi)\cdot 0 = 0$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z(z^2+1)}\right] = \text{Res}\left[\frac{e^{tz}}{z(z^2+1)}, 0\right] + \text{Res}\left[\frac{e^{tz}}{z(z^2+1)}, i\right] + \text{Res}\left[\frac{e^{tz}}{z(z^2+1)}, -i\right]$$

$$= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\text{Res}\left[\frac{e^{tz}}{z(z^2+1)}, 0\right] = \frac{p(0)}{q'(0)} = 1$$

$$p(z) = e^{tz} \Rightarrow p(0) = 1 \Rightarrow p(i) = 1$$

$$q(z) = z^3+z \Rightarrow q'(z) = 3z^2+1 \Rightarrow q'(0) = 1 \Rightarrow q'(i) = -2$$

$$\text{Res}\left[\frac{e^{tz}}{z(z^2+1)}, i\right] = \frac{p(i)}{q'(i)} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Res}\left[\frac{e^{tz}}{z(z^2+1)}, -i\right] = \frac{p(-i)}{q'(-i)} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

- $$\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-\pi z} \cdot \frac{z}{(z^2+4)(z^2+1)}\right](t) = H(t-\pi) \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z}{(z^2+4)(z^2+1)}\right](t-\pi)$$

$$= \frac{e^{(t-\pi)i}}{6} + \frac{e^{-(t-\pi)i}}{6} + \frac{e^{2(t-\pi)i}}{26} + \frac{e^{-2(t-\pi)i}}{26}.$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z}{(z^2+4)(z^2+1)}\right](t) = \text{Res}\left(\frac{z \cdot e^{tz}}{(z^2+4)(z^2+1)}, i\right) + \text{Res}\left(\frac{z \cdot e^{tz}}{(z^2+4)(z^2+1)}, -i\right) +$$

$$+ \text{Res}\left(\frac{z \cdot e^{tz}}{(z^2+4)(z^2+1)}, 2i\right) + \text{Res}\left(\frac{z \cdot e^{tz}}{(z^2+4)(z^2+1)}, -2i\right) =$$

$$p(z) = z \cdot e^{tz};\quad p(i) = i \cdot e^{ti};\ p(-i) = -i e^{-ti};\ p(2i) = 2i \cdot e^{+2ti};\ p(-2i) = -2i e^{-2ti}$$

$$q(z) = (z^2+4)(z^2+1) = z^4+5z^2+4 \Rightarrow q'(z) = 4z^3+10z$$

$$q'(i) = 6i;\quad q'(-i) = -6i \qquad q'(2i) = 52i \qquad q'(-2i) = -52i$$

Luego:

$$\text{Res}\left(\frac{z \cdot e^{tz}}{(z^2+4)(z^2+1)}, i\right) = \frac{ie^{ti}}{6i} = \frac{e^{ti}}{6};\ \text{Res}\left(\frac{z \cdot e^{tz}}{(z^2+4)(z^2+1)}, -i\right) = \frac{-i \cdot e^{-ti}}{-6i} = \frac{e^{-ti}}{6}$$

$$\text{Res}\left(\frac{z \cdot e^{tz}}{(z^2+4)(z^2+1)}, 2i\right) = \frac{2ie^{2ti}}{52i} = \frac{e^{2ti}}{26};\ \text{Res}\left(\frac{z \cdot e^{tz}}{(z^2+4)(z^2+1)}, -2i\right) = \frac{e^{-2ti}}{26}$$

La solución del problema de Cauchy del ejemplo de la página 33 es pues:

$$y(t) = t - u(t-\pi)\cdot(t-\pi)\cdot \operatorname{sen}(t-\pi) + \frac{e^{(t-\pi)i} + e^{-(t-\pi)i}}{6} +$$

$$+ \frac{e^{2(t-\pi)i} + e^{-2(t-\pi)i}}{26}$$

SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Sea el sistema de dos ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes:

$$\left.\begin{aligned} y'(t) &= a_{11}\cdot y(t) + a_{12}\, z(t) + f_1(t) \\ z'(t) &= a_{21}\, y(t) + a_{22}\, z(t) + f_2(t) \end{aligned}\right\}$$

En forma matricial este sistema se puede escribir como:

$$\begin{bmatrix} y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$$

Si $\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$

Podemos poner que:

$\vec{y}\,'(t) = A\cdot\vec{y}(t) + f(t)$. Si a esta ecuación

Le aplicamos la transformada de Laplace:

$\mathcal{L}[\vec{y}'](z) = \mathcal{L}[A \cdot \vec{y} + f(t)](z)$. Por la linealidad de $\mathcal{L}$ tenemos que:

$\mathcal{L}[\vec{y}'](z) = A \cdot \mathcal{L}[y](z) + \mathcal{L}[f(t)](z)$. Como:

$\mathcal{L}[y'](z) = z \cdot \mathcal{L}(y) - y(0)$, si llamamos $Y(z) = \mathcal{L}[\vec{y}](z)$ tenemos que:

$z \cdot Y(z) - \vec{y}(0) = A \cdot Y(z) + F(z)$, siendo $F(z) = \mathcal{L}[f(t)](z)$, es decir que nos queda una expresión en la forma:

$z\, Y(z) - A\, Y(z) = \vec{y}(0) + F(z)$ o lo que es lo mismo:

$(z I_2 - A)\, Y(z) = \vec{y}(0) + F(z)$. Por tanto la solucion del problema transformado, suponiendo que existe la inversa de la matriz $zI_2 - A$, es:

$Y(z) = (zI_2 - A)^{-1} (\vec{y}(0) + F(z))$ y bastará con aplicar la transformada inversa para obtener la solución del problema inicial.

Hemos de aclarar dos cosas. Pondremos que:

$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, $f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$ estando f definida en cierto intervalo I. ¿Qué quiere decir $\mathcal{L}[\vec{y}(t)](z)$ y $\mathcal{L}[f(t)](z)$?

$$\mathcal{L}[\vec{y}(t)](z) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}[y(t)](z) \\ \mathcal{L}[z(t)](z) \end{pmatrix} = Y(z)$$

$$\mathcal{L}[f(t)](z) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}[f_1(t)](z) \\ \mathcal{L}[f_2(t)](z) \end{pmatrix} = F(z).$$

Ejemplo: ejercicio nº 36 de la relación de problemas.

Resolver el siguiente problema de Cauchy:

$$y'(t) = 2y - 3z + 1$$
$$z'(t) = 3y + 2z$$
$$y(0) = 2$$
$$z(0) = +1$$

Lo primero que hacemos es expresar en forma matricial el sistema:

$\vec{y} = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ $f(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ +1 \end{pmatrix}$

El sistema lo podemos escribir en forma matricial como:

$\vec{y}\,' = A\vec{y} + f(t)$. Aplicando la transformada de Laplace y teniendo en cuenta su linealidad:

$\mathcal{L}[\vec{y}\,'](z) = A \cdot \mathcal{L}[\vec{y}](z) + \mathcal{L}[f(t)](z)$, es decir:

$z \cdot \mathcal{L}[y](z) - \vec{y}(0) = A \cdot \mathcal{L}[\vec{y}](z) + \mathcal{L}[f(t)](z)$

Si llamamos $Y(z) = \mathcal{L}[\vec{y}](z)$:

$z \cdot Y(z) - A\,Y(z) = \vec{y}(0) + \mathcal{L}[f(t)](z)$

$(z I_2 - A)\,Y(z) = \vec{y}(0) + \mathcal{L}[f(t)](z)$

$$\mathcal{L}[f(t)](z) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}[1](z) \\ \mathcal{L}[0](z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{z} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}(0) + \mathcal{L}[f(t)](z) = \begin{pmatrix} 2 \\ +1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{z} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + \frac{1}{z} \\ +1 \end{pmatrix}$$

Luego la solución del problema transformado es:

$$Y(z) = (z I_2 - A)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 + \frac{1}{z} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calculemos $(z \cdot I_2 - A)^{-1}$ si es que existe

$$z I_2 - A = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ +3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z-2 & 3 \\ -3 & z-2 \end{pmatrix}$$

$$|z I_2 - A| = (z-2)^2 + 9 = z^2 - 4z + 4 + 9 = z^2 - 4z + 13$$

La inversa de una matriz M se calcula mediante la expresión

$$M^{-1} = \frac{\operatorname{Adj} M^t}{|M|}$$ y para ello $|M| \neq 0$.

Suponemos que $|z I_2 - A| = z^2 - 4z + 13 \neq 0$.

$$(z I_2 - A)^t = \begin{pmatrix} z-2 & -3 \\ 3 & z-2 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Adj}(z I_2 - A)^t = \begin{pmatrix} z-2 & -3 \\ 3 & z-2 \end{pmatrix}$$. Luego:

$$(z I_2 - A)^{-1} = \frac{1}{z^2 - 4z + 13} \cdot \begin{pmatrix} z-2 & -3 \\ 3 & z-2 \end{pmatrix}$$ y la solución

del problema transformado es:

$$Y(z) = \frac{1}{z^2 - 4z + 13} \begin{pmatrix} z-2 & -3 \\ 3 & z-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 + \frac{1}{z} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Y(z) = \frac{1}{z^2 - 4z + 13} \begin{pmatrix} 2z - \frac{2}{z} - 6 \\ z + \frac{3}{z} + 4 \end{pmatrix}$$

Es decir:

$$Y(z) = \begin{pmatrix} \dfrac{2z - \frac{2}{z} - 6}{z^2-4z+13} \\[2ex] \dfrac{z + \frac{3}{z} + 4}{z^2-4z+13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2z^2-6z-2}{z(z^2-4z+13)} \\[2ex] \dfrac{z^2+4z+3}{z(z^2-4z+13)} \end{pmatrix}$$

Veamos la solución del problema inicial:

$$\vec{y}(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(z)](t) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{2z^2-6z-2}{z(z^2-4z+13)}\right](t) \\[3ex] \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{z^2+4z+13}{z(z^2-4z+13)}\right](t) \end{pmatrix}$$

$$z(z^2-4z+13) = 0 \begin{cases} z = 0 \\ z = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-52}}{2} = \dfrac{4 \pm 6i}{2} \begin{cases} 2+3i \\ 2-3i \end{cases} \end{cases}$$

$$\frac{2z^2-6z-2}{z(z^2-4z+13)} = \frac{A}{z} + \frac{Mz+N}{z^2-4z+13} = \frac{A(z^2-4z+13)+z\cdot(Mz+N)}{z(z^2-4z+13)}$$

$$Az^2-4Az+13A+Mz^2+Nz = 2z^2-6z-2$$

$$\left.\begin{array}{r} A+M = 2 \\ -4A+N = -6 \\ 13A = -2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} M = 2+\frac{2}{13} = \frac{28}{13} \\ N = -6-\frac{8}{13} = -\frac{86}{13} \\ A = -\frac{2}{13} \end{array}$$

Luego:

$$\frac{2z^2-6z-2}{z(z^2-4z+13)} = -\frac{2}{13}\cdot\frac{1}{z} + \frac{\frac{28}{13}z - \frac{86}{13}}{z^2-4z+13}$$

Por tanto:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2z^2-6z-2}{z(z^2-4z+13)}\right](t) = -\frac{2}{13}\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{28}{13}z-\frac{86}{13}}{z^2-4z+13}\right](t)$$

$$= \boxed{-\frac{2}{13}\cdot 1 + \frac{(-30+84i)e^{(2+3i)t}+(30+84i)e^{(2-3i)t}}{78i}}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z}\right] = \operatorname{Res}\left[\frac{e^{tz}}{z}, 0\right] = \frac{p(0)}{q'(0)} = 1$$

$$p(z) = e^{tz} \Rightarrow p(0) = 1$$

$$q(z) = z \Rightarrow q'(z) = 1$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{28}{13}z-\frac{86}{13}}{z^2-4z+13}\right](t) = \operatorname{Res}\left[\frac{(\frac{28}{13}z-\frac{86}{13})e^{tz}}{z^2-4z+13}, 2+3i\right] +$$

$$+ \operatorname{Res}\left[\frac{(\frac{28}{13}z-\frac{86}{13})e^{tz}}{z^2-4z+13}, 2-3i\right] =$$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{(\frac{28}{13}z-\frac{86}{13})e^{tz}}{z^2-4z+13}, 2+3i\right] = \frac{p(2+3i)}{q'(2+3i)} = \frac{(-30+84i)e^{(2+3i)t}}{78i}$$

$$p(z) = \left(\frac{28}{13}z-\frac{86}{13}\right)e^{tz} \Rightarrow p(2+3i) = \left(-\frac{30}{13}+\frac{84}{13}i\right)e^{(2+3i)t}$$

$$q(z) = z^2-4z+13 \Rightarrow q'(z) = 2z-4 \Rightarrow q'(2+3i) = 6i$$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{(\frac{28}{13}z-\frac{86}{13}).e^{tz}}{z^2-4z+13}, 2-3i\right] = \frac{p(2-3i)}{q'(2-3i)} = \frac{(30+84i)\,e^{(2-3i)t}}{78i}$$

$$p(2-3i) = \left(-\frac{30}{13}-\frac{84}{13}i\right)e^{(2-3i)t}$$

$$q'(2-3i) = -6i$$

$$\frac{z^2+4z+3}{z(z^2-4z+13)} = \frac{A}{z} + \frac{Mz+N}{z^2-4z+13} = \frac{A(z^2-4z+13)+z(Mz+N)}{z(z^2-4z+13)}$$

$$Az^2-4Az+13A+Mz^2+Nz = z^2+4z+3$$

$$\left.\begin{array}{l} A+M=1 \\ -4A+N=4 \\ 13A=3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow M = 1-\frac{3}{13} = \frac{10}{13} \\ N = 4+\frac{12}{13} = \frac{64}{13} \\ A = \frac{3}{13} \end{array}$$

Luego: $\dfrac{z^2+4z+3}{z(z^2-4z+13)} = \dfrac{3}{13}\cdot\dfrac{1}{z} + \dfrac{\frac{10}{13}z+\frac{64}{13}}{z^2-4z+13}$. Por tanto:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z^2+4z+3}{z(z^2-4z+13)}\right] = \frac{3}{13}\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{10}{13}z+\frac{64}{13}}{z^2-4z+13}\right](t)$$

$$= \frac{3}{13}\cdot 1 + \frac{(42+15i)e^{(2+3i)t}+(42-15i)e^{(2-3i)t}}{39i}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z}\right](t) = 1.$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{10}{13}z+\frac{64}{13}}{z^2-4z+13}\right](t) = \mathrm{Res}\left[\frac{\frac{10}{13}z+\frac{64}{13}}{z^2-4z+13}\cdot e^{tz}, 2+3i\right] +$$

$$+\,\mathrm{Res}\left[\frac{\frac{10}{13}z+\frac{64}{13}}{z^2-4z+13}\,e^{tz}, 2-3i\right] = \frac{(42+15i)e^{(2+3i)t}+(42-15i)e^{(2-3i)t}}{39i}$$

$$\mathrm{Res}\left[\frac{\frac{10}{13}z+\frac{64}{13}}{z^2-4z+13}\,e^{tz}, 2+3i\right] = \frac{P(2+3i)}{q'(2+3i)} = \frac{42+15i}{39i}\,e^{(2+3i)t}$$

$$P(z) = \left(\frac{10}{13}z+\frac{64}{13}\right)e^{tz} \Rightarrow P(2+3i) = \left(\frac{84}{13}+\frac{30}{13}i\right)\cdot e^{(2+3i)t}$$

$$q(z) = z^2-4z+13 \Rightarrow q'(z) = 2z-4 \Rightarrow q'(2+3i) = 6i$$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{\frac{10}{13}z+\frac{64}{13}}{z^2-4z+13},\ 2-3i\right]=\frac{P(2-3i)}{q'(2-3i)}=\frac{42-15i}{39i}\,e^{(2-3i)t}$$

$$P(2-3i)=\frac{84}{13}-\frac{30}{13}i$$

$$q'(2-3i)=-6i$$

Luego la solución del sistema de ecuaciones diferenciales es:

$$\vec{y}(t)=\begin{pmatrix} -\frac{2}{13}+\dfrac{(-15+42i)e^{(2+3i)t}+(15+42i)e^{(2-3i)t}}{39i} \\[2ex] \frac{3}{13}+\dfrac{(42+15i)e^{(2+3i)t}+(42-15i)e^{(2-3i)t}}{39i} \end{pmatrix}$$ o

lo que es lo mismo:

$$y(t)=-\frac{2}{13}+\frac{(-15+42i)e^{(2+3i)t}+(15+42i)e^{(2-3i)t}}{39i}$$

$$z(t)=\frac{3}{13}+\frac{(42+15i)e^{(2+3i)t}+(42-15i)e^{(2-3i)t}}{39i}$$

6.7.3 Circuitos

Kirchhoff

1ª Ley

La suma algebraica de todas las corrientes que entran en un nodo es 0

2ª Ley

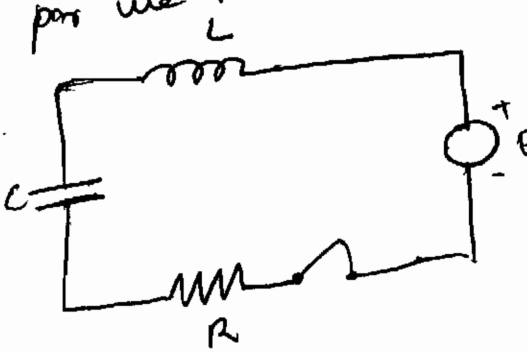
La suma algebraica de la caída de potencial en cada malla del circuito es 0

Elemento	Fórmula
Resistencia	~~Resistencia~~ $R_i = R\frac{dq}{dt} = V_R$
Inductor	$L\frac{di}{dt} = L\frac{d^2q}{dt^2}$
Condensador	$\frac{1}{C}Q = V_C$
Generador	$-E$

$i = \frac{dq}{dt}$

$di = \frac{d^2q}{dt^2}$

Ejemplo: El circuito RLC de la siguiente figura está formado por una resistencia R, un inductor L y un condensador C.



Antes de cerrar el interruptor, en el instante $t=0$, la corriente en la bobina y el condensador son 0.

Determinar la carga q en el condensador y la corriente sabiendo que $R = 160\,\Omega$, $L = 1H$, $C = 10^{-4}F$ y $E = 20V$

$q(0) = i(0) = 0$

Aplicando la 2ª ley de Kirchoff:

$$\frac{di}{dt} + 160 i + \frac{1}{10^{-4}} q = 20 \Rightarrow \frac{d^2q}{dt} + 160 \frac{dq}{dt} + 10^4 q = 20$$

$$\mathcal{L}[q(t)](z) = Q(z) \Rightarrow$$

$$z^2 \cdot Q(z) - z q(0) - q'(0) + 160(z Q(z) - q(0)) + 10^4 Q(z) = \frac{20}{z}$$

$$z^2 \cdot Q(z) + 160 z\, Q(z) + 10^4 Q(z) = \frac{20}{z}$$

$$(z^2 + 160 + 10^4)\, Q(z) = \frac{20}{z} \Rightarrow Q(z) = \frac{20}{\underbrace{z(z^2+160z+10^4)}_{\text{Raices conjugadas complejas}}}$$

$$\frac{20}{z(z^2+160z+10^4)} = \frac{A}{z} + \frac{Bz + C}{z^2+160z+10^4} \Rightarrow \frac{Bz+C}{z^2+160z+10^4} =$$

$$= \frac{20}{z(z^2+160z+10^4)} - \frac{A}{z} = \frac{20 - A(z^2+160z+10^4)}{z(z^2+160z+10^4)}$$

$$z(Bz + C) = 20 - A(z^2+160z+10^4)$$

$$Bz^2 + Cz = z^2(-A) + z(-160A) + 20 - 10^4 A$$

$$Bz^2 + Cz = z^2(-A) + z(-160A) + 20 - 10^4 A$$

$$20 - 10^4 A = 0 \Rightarrow 20 = 10^4 A \Rightarrow A = 20/10^4 = \frac{1}{500}$$

$$B = -A = -\frac{1}{500}$$

$$C = -160A = -\frac{160}{500}$$

$$Q(z) = \frac{1}{500} \cdot \frac{1}{z} - \frac{1}{500} \cdot \frac{z + 160}{z^2 + 160z + 10^4} = \frac{1}{500} \cdot \frac{1}{z} - \frac{1}{500} \frac{z+160}{(z+80)^2+60^2} =$$

$$= \frac{1}{500} \cdot \frac{1}{z} - \frac{1}{500}\left[\frac{z+80}{(z+80)^2+60^2} + \frac{4}{3}\frac{60}{(z+80)^2+60^2}\right]$$

$$q(t) = \frac{1}{500}\left[\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z+80}{(z+80)^2+60^2}\right] - \frac{4}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{60}{(z+80)^2+60^2}\right]\right] =$$

$$= \frac{1}{500}\left(1 - e^{-80t}\cos 60t - \frac{4}{3}e^{-80t}\,\mathrm{sen}\,60t\right)$$

$$i(t) = \frac{dq}{dt} \Rightarrow$$

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{1}{500}\left[-\left[-80e^{-80t}\cos 60t - e^{-80t}60\,\mathrm{sen}\,60t\right] - \frac{4}{3}\left[-80e^{-80t}\right.\right.$$

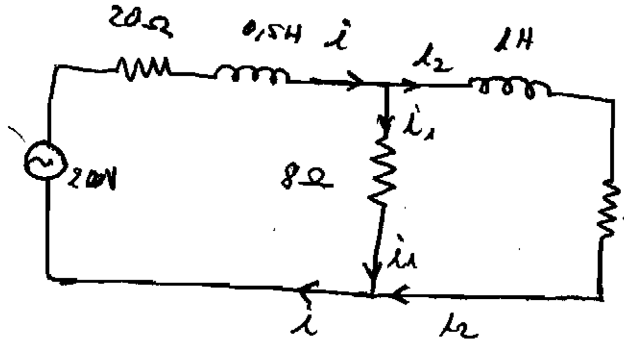
$$\left.\left.\cdot\,\mathrm{sen}\,60t + e^{-80t}60\cos 60t\right)\right] = \frac{1}{500}\left(80e^{-80t}\cos 60t + 60e^{-80t}\,\mathrm{sen}\,60t + \right.$$

$$\left. + \frac{320}{3}e^{-80t}\,\mathrm{sen}\,60t - 80e^{-80t}\cos 60t\right) = \frac{e^{-80t}}{500}\cdot\left(80\cos 60t + \right.$$

$$\left. + 60\,\mathrm{sen}\,60t + \frac{320}{3}\mathrm{sen}\,60t - 80\cos 60t\right) = \frac{e^{-80t}}{500}\cdot\mathrm{sen}\,60t\,\cdot$$

$$\cdot\left(60 + \frac{320}{3}\right) = \frac{e^{-80t}\,\mathrm{sen}\,60t}{3}$$

Ejemplo:



Hasta $t=0$ no circula corriente por el circuito, dibujar la corriente en cada malla a partir de $t=0$

$$\boxed{i - i_2 - i_1 = 0}$$

$$\left.\begin{aligned} &200 = 20\cdot i + L\frac{di(t)}{dt} + 8i_1 \Rightarrow 200 = 20(i_1+i_2) + L\left(\frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt}\right) + 8i_1 \\ &0 = \frac{di_2}{dt}\cdot L + 10i_2 - 8i_1; \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} &200 = 20(i_1+i_2) + 0{,}5\left(\frac{di_1(t)}{dt} + \frac{di_2(t)}{dt}\right) + 8i_1; \\ &0 = \frac{di_2}{dt}\cdot 0{,}5 + 10i_2 - 8i_1; \quad 0{,}5\frac{di_2}{dt} = \frac{8i_1 - 10i_2}{\cancel{0{,}5}} \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow 200 = 0{,}5\frac{di_1}{dt} + 0{,}5\frac{di_2}{dt} + 28i_1 + 20i_2 \Rightarrow 200 = 0{,}5\frac{di_1}{dt} + (8i_1 - 10i_2) +$$

$$+ 28i_1 - 10i_2 \Rightarrow 200 = 0{,}5\frac{di_1}{dt} + 32i_1 + 15i_2$$

$$0{,}5\frac{di_1}{dt} = 200 - 32i_1 - 15i_2; \quad \left[\frac{di_1}{dt} = 400 - 64i_1 - 30i_2;\right]$$

$$\left[\frac{di_2}{dt} = 8i_1 - 10i_2\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} i_1' \\ i_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -64 & -30 \\ 8 & -10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 400 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} &I_1(z) = \mathcal{L}[i_1(t)](z) \\ &I_2(z) = \mathcal{L}[i_2(t)](z) \end{aligned}\right| \rightarrow \begin{bmatrix} zI_1 - i_1(0) \\ zI_2 - i_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64 & -30 \\ 8 & -10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{400}{z} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$z\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 64 & -30 \\ 8 & -10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{400}{z} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(z I_2 - \begin{bmatrix} 64 & -30 \\ 8 & -10 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{400}{z} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{2\times 2}{\begin{bmatrix} z+64 & 30 \\ -8 & z+10 \end{bmatrix}} \underset{2\times 1}{\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} \frac{400}{z} \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z+64 & 30 \\ 8 & z+10 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{400}{z} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{(z+64)(z+10)+240} \begin{bmatrix} z+10 & -30 \\ 8 & z+64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{400}{z} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$I_1 = \frac{400(z+10)}{z(z^2+74z+880)}$$

$$I_2 = \frac{3200}{z(z^2+74z+880)}$$

$$\sqrt{5476-3520} = \sqrt{1956} = \sqrt{2^2 \cdot 489} = 2\sqrt{489}$$

$$\frac{-74 \pm \sqrt{489}}{2} = \underline{\underline{-37 \pm \sqrt{489}}}$$

$$I_2 = \frac{3200}{z(z^2+74z+880)} = \frac{3200}{z(z-(-37+\sqrt{489}))(z-(-37-\sqrt{489}))}$$

Método de los residuos

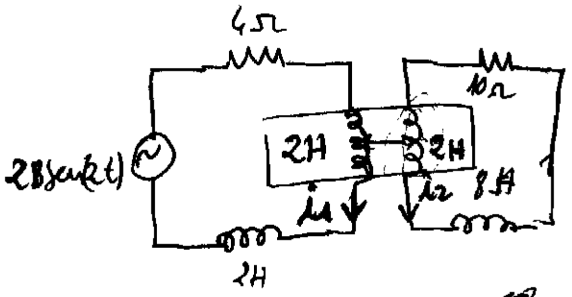
$$\mathrm{Res}\left(e^{iz} \cdot \frac{I_2}{3200}, 0\right) = \lim_{z\to 0} z\, e^{tz} \frac{I_2}{3200}$$

$$\lim_{z\to 0} e^{tz} \frac{-1}{(z(a+b))(z-(a-b))} = \frac{1}{(a+b)(a-b)} =$$

$$= \frac{1}{a^2-b^2} = \frac{1}{1369-489} = \frac{1}{880}$$

$$\mathrm{Res}\left(e^{tz} \frac{I_2}{3200}, a+b\right) = \lim_{z\to a+b} (z-(a+b))\, e^{tz} \frac{I}{3200}$$

$$\lim_{z\to(a+b)} e^{tz} \cdot \frac{1}{z(z-(a-b))}$$



$$20\,\text{sen}(2t) = 4i_1 + 2\frac{di_1}{dt} + 2\frac{di_1}{dt}$$

$$0 = 10\, i_2 + 8\frac{di_2}{dt} + 2\frac{di_1}{dt}$$

$$\mathcal{L}(\text{sen}(2t))(z) = \cancel{}$$

$$\frac{28\cdot 2}{z^2+4} = 4I_1 + 2(zI_2 - i_2(0)) + 2(zI_1 - i_1(0)) \rightarrow \frac{56}{z^2+4} = 4I_1 + 2zI_2 + 2zI_1$$

$$0 = 10I_2 + 8zI_2 + 2zI_1$$

$$0 = 10I_2 + 8(zI_2 - i_2(0)) + 2(zI_1 - i_1(0))$$

$$\rightarrow \frac{56}{z^2+4} = (4+2z)I_1 + 2zI_2$$

$$\rightarrow 0 = 2zI_1 + (10+8z)I_2$$

KRAMMER

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 4+2z & \frac{36}{z^2+4} \\ 2z & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4+2z & 2z \\ 2z & 10+8z \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{36\cdot 2z}{z^2+4}}{(4+2z)(10+8z)-4z^2} =$$

$$= -\frac{72z}{(40+38z+20z+16z^2-4z^2)(z^2+4)} = -\frac{72z}{40z^2+38z^3+20z^3+16z^4\ldots}$$

$$= \frac{-28}{(z^2+4)(+10+13z+3z^2)} = \frac{-28}{(z^2+4)(z+1)(3z+10)}$$

$$z = \frac{-13 \pm \sqrt{13^2-120}}{6} = \frac{-13 \pm \sqrt{49}}{6} = \begin{cases} \frac{-13+7}{6} = -1 \\ \frac{-13-7}{6} = -\frac{20}{6} \end{cases}$$

$$3(z+1)\left(z+\frac{10}{3}\right)$$