TEMA 5

INTEGRACIÓN POR EL MÉTODO DE LOS RESIDUOS

En primer lugar recordemos el teorema de Laurent:

Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ y $0 < r < R \leq +\infty$ $r, R \in \mathbb{R}$. Si la función $f \in H[A(z_0; r, R)]$ existen constantes a_n y $b_n \in \mathbb{C}$ tales que:

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n \geq 1} b_n \cdot \frac{1}{(z-z_0)^n} \quad \text{si } z \in A(z_0; r, R)$$

A esta serie se le llama serie de Laurent de f centrada en z_0. Además:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad \text{para } n \geq 0$$

$$b_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{-k+1}} dz \quad \text{para } k \geq 1$$

donde C es cualquier trayectoria de una curva de Jordan contenida en $A(z_0; r, R)$

Agazapada en este teorema hay una información muy importante. Si $k = 1$ tenemos que:

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz \Rightarrow \oint_C f(z) dz = 2\pi i \cdot b_1 .$$

Vemos que el coeficiente b_1 de la parte principal del desarrollo de Laurent es el "único vestigio" que deja la función al ser integrada sobre la curva C, el residuo de la función.

Si nuestro propósito es calcular $\oint_C f(z)\,dz$ donde C es una curva de Jordan orientada positivamente nos pueden ocurrir dos cosas:

- Que f sea holomorfa en C y dentro de C (interior de C), entonces, por el teorema de Cauchy, $\oint_C f(z)dz = 0$
- Que f presente una singularidad aislada en $z_0 \in \operatorname{Int} C$ entonces $f \in H[D^*(z_0, \delta)]$ para cierto $\delta > 0$. Por el teorema de Laurent $\forall z \in D^*(z_0, \delta) = A(z_0; 0, \delta)$ se verifica:

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n \geq 1} b_n \cdot \frac{1}{(z-z_0)^n}$$ donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \qquad n \geq 0$$

$$b_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{-k+1}} dz \qquad k \geq 1$$

y por tanto se verifica que:

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i\, b_1$$

Esta será la forma de proceder para calcular la integral. Vamos a definir lo que se entiende por residuo de una función.

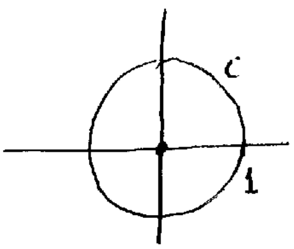
<u>Definición</u> (residuo de una función)

Llamaremos residuo de una función f en una singularidad (aislada) $z_0 \in \mathbb{C}$ al coeficiente b_1 de la serie de Laurent centrado en z_0. Lo representaremos como $b_1 = \text{Res}(f, z_0)$ y consecuentemente $\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i\,\text{Res}(f, z_0)$

Ejemplo:

Calcular $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\operatorname{sen} z}{z^4}\,dz$

La curva $|z| = 1$ es la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 1:



$f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z^4}$ tiene una singularidad aislada

en $z_0 = 0$

Por tanto:

$$\oint_{|z|=1} \frac{\operatorname{sen} z}{z^4} = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 0) = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{\operatorname{sen} z}{z^4}, 0\right)$$

Como $f(z) \in H(\mathbb{C}\setminus\{0\}) = H[A(0; 0, +\infty)]$ existe en este anillo el desarrollo en serie de Laurent de f.

Vamos a hallar este desarrollo:

Recordemos que el desarrollo de Mc-Laurin de $\operatorname{sen} z$ es:

$$\operatorname{sen} z = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall z \in \mathbb{C} \text{ (en}$$

particular $\forall z \in \mathbb{C} - \{0\}$). Entonces $\forall z \in A(0, 0, +\infty)$

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z^4} = \frac{1}{z^4} \cdot \operatorname{sen} z = \frac{1}{z^4} \cdot \sum_{n\geq 0} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{sen} z}{z^4} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n-3}}{(2n+1)!} = \underset{\substack{\downarrow \\ n=0}}{\frac{1}{z^3}} - \frac{1}{3!\, z} + \sum_{n\geq 2} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n-3}}{(2n+1)!}$$

Es decir

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z^4} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{6z} + \sum_{n\geq 2}^{} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n+1}}{(2n+5)!} \Rightarrow b_1 = -\frac{1}{6}$$

Luego

$$\oint_{|z|=1} \frac{\operatorname{sen} z}{z^4} = 2\pi i\left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{\pi}{3} i$$

Ejemplo: Calcular la integral $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z^3 - z^4} dz$

Tenemos que $\frac{1}{z^3-z^4} = \frac{1}{z^3(1-z)} = \frac{1}{z^3} \sum_{n\geq 0}^{} z^n$ y esto es así porque si $|z| = \frac{1}{2} \Rightarrow |z| < 1$ y la serie geométrica es convergente. Luego:

$$\frac{1}{z^3-z^4} = \frac{1}{z^3} \cdot \sum_{n\geq 0}^{} z^n = \sum_{n\geq 0}^{} z^{n-3} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \sum_{n\geq 3}^{} z^{n-3}$$

Luego $b_1 = \operatorname{Res}(f,0) = 1 \Rightarrow \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z^3-z^4} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f,0) = 2\pi i$

El teorema de los residuos es un arma de doble filo. Si se pueden calcular los residuos de una función se pueden calcular ciertas funciones y viceversa. La mayor parte de las veces se utiliza este teorema para calcular integrales y para ello necesitamos un método para calcular el residuo de una función.

Cálculo de residuos.

- Si $f(z)$ tiene un polo simple en z_0 entonces

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \cdot f(z)$$

Demostración:

Si f tiene un polo simple en z_0, sea:

$$f(z) = \frac{b_1}{z - z_0} + \sum_{n \geq 0} a_n \cdot (z - z_0)^n$$ su desarrollo de Laurent.

Entonces:

$$(z - z_0) \cdot f(z) = b_1 + \sum_{n \geq 0} a_n \cdot (z - z_0)^{n+1}$$. Por tanto:

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = b_1 = \operatorname{Res}(f, z_0)$$

Ejemplo determinar el residuo de la función

$$f(z) = \frac{9z + i}{z(z^2 + 1)}$$ para $z = i$

Se tiene que:

$$\lim_{z\to i} f(z) = \lim_{z\to i} \frac{9z+i}{z(z^2+1)} = \frac{10i}{0} = \infty \Rightarrow z=i \text{ es}$$

un polo de $f(z)$.

$$\lim_{z\to i} (z-i)^m \cdot \frac{9z+i}{z(z+i)(z-i)} = \lim_{z\to i} (z-i)^{m-1} \cdot \frac{9z+i}{z(z+i)} =$$

$$= \begin{cases} \frac{10i}{-2} = -5i & \text{si } m=1 \\ 0 & \text{si } m > 1 \end{cases} \Rightarrow z=i \text{ es un polo de}$$

orden 1.

Luego $b_1 = \lim_{z\to z_0} (z-i) \cdot \frac{9z+i}{z(z+i)} = -5i$ y por tanto:

$$\text{Res}\left(\frac{9z+i}{z(z^2+1)}, i\right) = -5i.$$

<u>Teorema</u>:

Sea $f(z) = \frac{P(z)}{q(z)}$ siendo P y q dos funciones holomorfas en $z_0 \in \mathbb{C}$, $P(z_0) \neq 0$ y z_0 un cero simple de $q(z)$ es decir $q(z_0)=0$ y $q'(z_0) \neq 0$. Entonces se verifica que:

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{P(z_0)}{q'(z_0)}$$

Demostración:

Con las hipótesis del teorema sabemos que z_0 es un polo simple de $f(z)$. Por lo tanto:

$Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) \cdot f(z)$. Al ser $q(z)$ analítica en z_0, sea $q(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{q^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$, como

$q(z_0) = 0 \Rightarrow q(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{q^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \Rightarrow$

$\Rightarrow q(z) = (z-z_0)\left[q'(z_0) + \sum_{n \geq 2} \frac{q^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^{n-1}\right]$.

Luego

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z) = \lim_{z \to z_0} \cancel{(z-z_0)} \cdot \frac{p(z)}{\cancel{(z-z_0)}\left[q'(z_0) + \sum_{n \geq 2} \frac{q^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^{n-1}\right]}$$

$$= \lim_{z \to z_0} \frac{p(z)}{q'(z_0) + \sum_{n \geq 2} \frac{q^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^{n-1}} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

Ejemplo: Hallar $Res\left(\frac{9z+i}{z(z^2+1)}, i\right)$. Si aplicamos el teorema anterior $p(z) = 9z+i$, $q(z) = z(z^2+1)$, $z_0 = i$

$p(z_0) = 10i \neq 0$ $\quad q(z_0) = i \cdot 0 = 0$ $\quad q'(z) = 3z^2+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow q'(i) = -2 \neq 0 \Rightarrow z_0 = i$ es cero simple de q

Entonces $\operatorname{Res}\left(\frac{9z+i}{z(z^2+1)}, i\right) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)} = \frac{10i}{3i^2+1} = \frac{10i}{-2} = -5i$

Vamos a enunciar otro teorema que nos permitirá calcular el residuo de una función con una singularidad aislada de orden m.

Teorema:

Sea $f(z)$ una función holomorfa en $A(z_0; r, R)$ siendo $z_0 \in \mathbb{C}$ un polo de orden m de f. Entonces:

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \cdot \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]$$

Demostración:

Sea el desarrollo de Laurent de f en z_0:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{m} b_k \cdot \frac{1}{(z-z_0)^k} + \sum_{n \geq 0} a_n (z-z_0)^n .$$ Entonces:

$$(z-z_0)^m f(z) = \sum_{k=1}^{m} b_k \cdot (z-z_0)^{m-k} + \sum_{n \geq 0} a_n (z-z_0)^{n+m} .$$ Evidentemente

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = b_1 = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right].$$

Ejemplo: Hallar el residuo en $z=1$ de la función

$$f(z) = \frac{50z}{(z+4)(z-1)^2}$$

$z_0 = 1$ es un polo de orden 2 de $f(z)$. Aplicando el teorema anterior:

$$\text{Res}(f,1) = \lim_{z\to} \frac{1}{(2-1)!} \frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}} \left[\cancel{(z-1)^2} \cdot \frac{50z}{(z+4)\cancel{(z-1)^2}} \right]$$

$$\text{Res}(f,1) = \lim_{z\to 1} \left[\frac{50(z+4) - 50z}{(z+4)^2} \right] = \lim_{z\to 1} \frac{200}{(z+4)^2} = \frac{200}{25} = 8$$

Ejemplo: calcular $\displaystyle\oint_{|z-1|=1} \frac{50z}{(z+4)(z-1)^2} dz$. Se verifica

que $\displaystyle\int_{|z-1|=1} \frac{50z}{(z+4)(z-1)^2} dz = \text{Res}(f,1) \cdot 2\pi i = 16\pi i$ ya

que $f(z) = \dfrac{50z}{(z+4)(z-1)^2} \in \mathcal{H}[\mathbb{C} \setminus \{1,-4\}]$

Teorema de los residuos.

Sea f una función con un número finito de singularidades aisladas de forma que todas ellas estén dentro de una curva C de Jordan positivamente orientada. Si f es holomorfa en $C \setminus \{z_1, z_2, \dots z_m\}$, siendo

$(z_i)_{1 \le i \le m}$ las singularidades. Entonces:

$$\oint_c f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Res}(f(z), z_j)$$

Ejemplo

Calcular a lo largo de la curva C de Jordan

$$\oint_C \frac{4-3z}{z^2-z}\,dz$$ en el caso de que.

a) $\{0,1\} \in \operatorname{Int} C$

b) $0 \in \operatorname{Int} C$, $1 \in \operatorname{Ext} C$

c) $0 \in \operatorname{Ext} C$, $1 \in \operatorname{Int} C$

d) $\{0,1\} \in \operatorname{Ext} C$

Solución

$z=0$, $z=1$ son polos simples de $f(z) = \dfrac{4-3z}{z^2-z}$

$$\lim_{z \to 0} (z-0)^m \cdot \frac{4-3z}{z(z-1)} = \begin{cases} -4 & \text{si } m=1 \\ 0 & \text{si } m>1 \end{cases}$$

$$\lim_{z\to 1} (z-1)^m \cdot \frac{4-3z}{z(z-1)} = \begin{cases} 1 & \text{si } m=1 \\ 0 & \text{si } m>1 \end{cases}$$

Aplicando el teorema de los residuos:

$$\oint_C \frac{4-3z}{z(z-1)}\,dz = \left[\operatorname{Res}(f(z),0) + \operatorname{Res}(f(z),1)\right] 2\pi i$$

$$\operatorname{Res}(f(z),0) = \frac{p(0)}{q'(0)}$$

$p = 4-3z \Rightarrow p(0) = 4$

$q(z) = z^2 - z \Rightarrow q'(z) = 2z-1$

$\Downarrow$

$q'(0) = -1$

Luego $\operatorname{Res}(f(z),0) = \frac{4}{-1} = -4$

$$\operatorname{Res}(f(z),1) = \frac{p(1)}{q'(1)} = \frac{1}{1} = 1.$$

$$\oint_C \frac{4-3z}{z(z-1)}\,dz = -6\pi i$$

b) El dominio en el que f está definida, a la hora de calcular la integral $\oint_C f(z)\,dz$, es

$D =$ Int C $\cup$ frontera C. Como $1 \in$ Ext $C \Rightarrow f$ tiene un único polo en D, por tanto:

$$\oint_C \frac{4-3z}{z(z-1)}\,dz = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}(f(z),0) = -8\pi i$$

c) Hacemos el mismo razonamiento que en b),

como $0 \in \text{Ext}\, C$:

$$\oint_C f(z)\, dz = 2\pi i \, \text{Res}\,(f(z), 1) = 2\pi i$$

d) f es holomorfa en todo el dominio $D = \text{Int}\, C \cup \text{frontera}\, C$

por tanto la integral no depende del camino sino del valor inicial y final, y como estos coinciden al ser la curva cerrada, la integral vale cero:

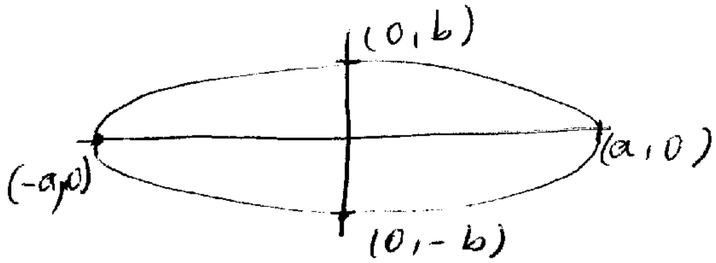
$$\oint_C f(z)\, dz = 0.$$

Antes de pasar al siguiente ejemplo, vamos a recordar la ecuación de la elipse.

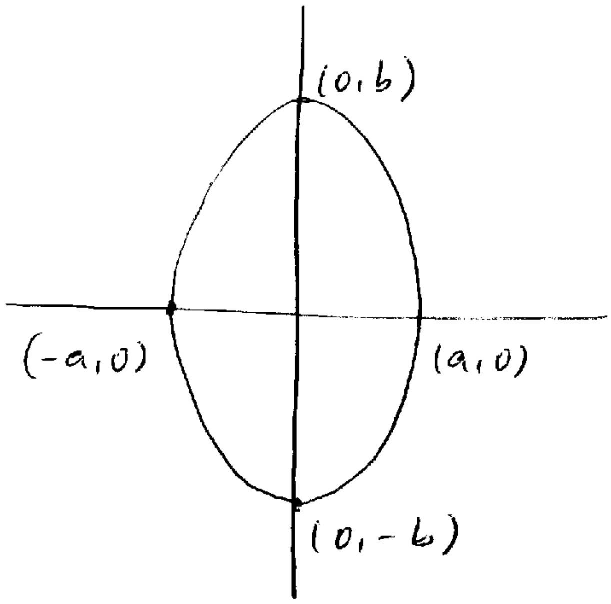
La ecuación de una elipse de semiejes a y b

es $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Si $a > b$ la elipse tendría

la forma:



Si $a < b$ la elipse tendría la forma:



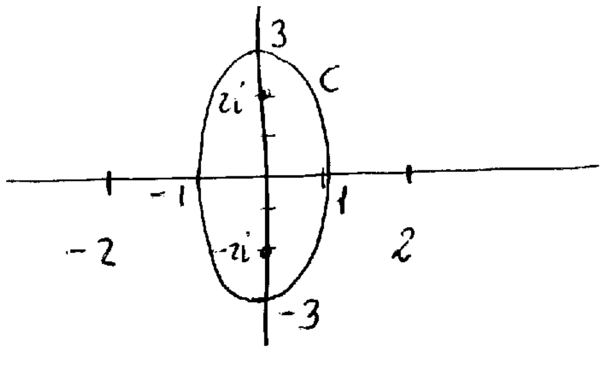
Ejemplo:

Calcular $\oint_C \frac{z \cdot e^{i\pi z}}{z^4 - 16}\, dz$ siendo C la elipse de ecuación $C \equiv 9x^2 + y^2 = 9$.

En primer lugar, transformemos la ecuación de la elipse para expresarla en la forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$$9x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow x^2 + \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

$a = 1 < b = 3$. La elipse tiene la forma:



$$f(z) = \frac{z \cdot e^{\pi z}}{z^4 - 16}$$

$$z^4 - 16 = 0 \Rightarrow z^4 = 16 \Rightarrow z = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{16_0} = 2_{\beta_K}$$

$$\beta_K = \frac{0 + 2K\pi}{4} = \frac{K\pi}{2}, \quad K = 0, 1, 2, 3$$

$$\beta_0 = 0 \,; \quad \beta_1 = \frac{\pi}{2} = 90° \,; \quad \beta_1 = \frac{2\pi}{2} = 180° \,, \quad \beta_3 = \frac{3\pi}{2} = 270°$$

Las raices del denominador son

$$z \begin{cases} z_1 = 2_{0°} = 2 \\ z_2 = 2_{90°} = 2i \\ z_3 = 2_{180°} = -2 \\ z_4 = 2_{270°} = -2i \end{cases} \Rightarrow z_2 = 2i \,, \; z_3 = -2i \text{ son polos simples}$$

Si aplicamos el teorema de los residuos:

$$\oint_C \frac{z \cdot e^{\pi z}}{z^4 - 16} dz = 2\pi i \left[\operatorname{Res}(f(z), 2i) + \operatorname{Res}(f(z), -2i) \right]$$

$$\operatorname{Res}(f(z), 2i) = \frac{p(2i)}{q'(2i)} \qquad p(z) = z e^{\pi z}$$

$$q(z) = z^4 - 16 \Rightarrow q'(z) = 4z^3$$

$$p(2i) = 2i e^{2\pi i} = 2 \cdot (\cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi) = 2i$$

$$q'(2i) = 4 \cdot (2i)^3 = -32i$$

Luego $\operatorname{Res}(f(z), 2i) = \dfrac{2i}{-32i} = -\dfrac{2}{32} = -\dfrac{1}{16}$

$$\text{Res}\,(f(z),-2i) = \frac{p(-2i)}{q'(-2i)} = \frac{-2i}{32i} = -\frac{1}{16}$$

$$p(-2i) = -2i\,e^{-2\pi i} = -2i\left[\cos(-2\pi) + i\,\text{sen}(-2\pi)\right] = -2i$$

$$q'(-2i) = 4\cdot(-2i)^3 = 32i$$

Luego:

$$\oint_c \frac{z\cdot e^{\pi z}}{z^4-16}\,dz = 2\pi i\left[-\frac{1}{16} - \frac{1}{16}\right] = -\frac{4}{16}\pi i = -\frac{\pi}{4}i$$

Ejemplo: Calcular $\oint_c z\cdot e^{\frac{\pi}{z}}\,dz$ siendo c la elipse anterior $C \equiv 9x^2 + y^2 = 9 \Leftrightarrow C \equiv \frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$

La singularidad, en este caso, de la función $f(z) = z\cdot e^{\frac{\pi}{z}}$ es $z=0$. ¿Qué tipo de singularidad es? Veamoslo, sabemos que el desarrollo de Taylor en $z_0 = 0$ (o desarrollo de Mc-Laurin) de e^z es:

$$e^z = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$$, así que en nuestro caso:

$$f(z) = z\cdot e^{\frac{\pi}{z}} = z\cdot\sum_{n\geq 0}\frac{\left(\frac{\pi}{z}\right)^n}{n!} = \sum_{n\geq 0}\frac{\pi^n}{n!}\cdot\frac{1}{z^{n-1}}$$

Por tanto

$$f(z) = \underset{n=0}{\underset{\downarrow}{z}} + \underset{n=1}{\underset{\downarrow}{\pi}} + \sum_{n \geq 2} \frac{\pi^n}{n!} \cdot \frac{1}{z^{n-1}}$$ este sería el desarrollo de Laurent de f y por tanto

$$\text{Res}\,(f(z), 0) = \frac{\pi^2}{2!}$$

Luego:

$$\oint_C z \cdot e^{\frac{\pi}{z}}\, dz = 2\pi i \cdot \text{Res}\,(f(z), 0) = 2\pi i \cdot \frac{\pi^2}{2!} = \pi^3 i$$

APLICACIONES DEL CALCULO DE RESIDUOS A INTEGRALES REALES.

El teorema de los residuos puede utilizarse para calcular integrales reales, sobre todo si se trata de integrales impropias. Básicamente hay cuatro tipos de integrales impropias:

a) $$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)\,dx$$

b) $$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^b f(x)\,dx$$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{b} f(x)\,dx$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx$

d) $\displaystyle\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ siendo f discontinua en $x = c \in (a,b)$

y en este caso:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx\right]$$

- <u>Cálculo de integrales racionales de Cos t y Sen t.</u>

Supongamos que queremos hallar $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} R(\cos t, \operatorname{sen} t)\,dt$ siendo R una función racional de dos variables continua en la circunferencia de centro $O(0,0)$ y radio 1, $C(0,1)$. La idea para calcular esta integral por el método de los residuos es convertirla en una integral sobre $C(0,1)$ de una función de variable compleja que también va a ser racional. Si $t \in \mathbb{C}$ se verifica:

$$\operatorname{sen} t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \quad ; \quad \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$$

$$\operatorname{sen} t = \frac{e^{it}(e^{it} - e^{-it})}{2i\, e^{it}} = \frac{(e^{it})^2 - 1}{2i\, e^{it}}$$. Si hacemos $z = e^{it}$

queda $\operatorname{sen} t = \dfrac{z^2 - 1}{2iz}$. De igual modo:

$$\cos t = \frac{e^{it}(e^{it} + e^{-it})}{2} = \frac{(e^{it})^2 + 1}{2\, e^{it}} = \frac{z^2 + 1}{2z}$$

Como $z = e^{it} \Rightarrow dz = e^{it} \cdot i\, dt \Rightarrow dz = iz\, dt \Rightarrow$

$\Rightarrow dt = \dfrac{1}{iz}\, dz$. Por tanto se verifica que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} R(\cos t, \operatorname{sen} t)\, dt = \int_{C(0,1)} R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right) \cdot \frac{1}{iz}\, dz$$

Tan sólo nos queda un pequeño detalle, ver que efectivamente el intervalo de integración es ahora la circunferencia de centro $O(0,0)$ y radio 1.

$\forall z \in \mathbb{C}$, si $z = e^{it} \Rightarrow z = \cos t + i \operatorname{sen} t$ y en forma de punto podemos poner que $z = (\cos t, \operatorname{sen} t)$. Si se verifica que $-\pi \leq t \leq \pi \Rightarrow z$ está en $C(0,1)$.

Sean $z_1, z_2, \ldots z_n$ los polos de la función racional

$$f(z) = R\left[\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)\cdot\frac{1}{iz}\right].$$ Si aplicamos

el teorema de los residuos nos queda que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} R(\cos t, \operatorname{sen} t)\, dt = 2\pi i \cdot \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}\left[R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)\cdot\frac{1}{iz}, z_j\right]$$

Ejemplo:

calcular $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{5+4\cos t}\, dt$

Si hacemos el cambio $z = e^{it} \Rightarrow dt = \frac{1}{iz}\, dz$

$\cos t = \frac{z^2+1}{2z}$. Por tanto la integral verifica:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{5+4\cos t}\, dt = \int_{C(0,1)} \frac{1}{5+4\,\frac{z^2+1}{2z}} \cdot \frac{1}{iz}\, dz =$$

$$= \frac{1}{i}\int_{C(0,1)} \frac{1}{2z^2+5z+2}\, dz.$$

Veamos los polos de $2z^2+5z+2$

$$2z^2+5z+2=0 \Rightarrow z=\frac{-5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{-5\pm 3}{4} \begin{cases} -2 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$z_0=-\frac{1}{2} \in C(0,1)$, $z_1=-2 \notin C(0,1)$.

Por tanto:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{5+4\cos t}\,dt = 2\pi i \cdot \frac{1}{i} \operatorname{Res}\left[\frac{1}{2z^2+5z+2}, -\frac{1}{2}\right] = \frac{2\pi}{3}$$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{2z^2+5z+2}, -\frac{1}{2}\right] = \frac{p(-\frac{1}{2})}{q'(-\frac{1}{2})} = \frac{1}{3}$$

$p(z)=1 \Rightarrow p(-\frac{1}{2})=+1$

$q(z)=2z^2+5z+2 \Rightarrow q'(z)=4z+5 \Rightarrow q'(-\frac{1}{2})=3$

<u>Proposición</u> 1: Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos funciones polinómicas sin factores comunes tales que:

1º grado $Q \geq$ grado $p+2$

2º $Q(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

3º Sean $z_1, z_2, \dots z_n$ los polos de $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ en el plano superior (aquellos con parte imaginaria positiva)

Entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = 2\pi i \cdot \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)}, z_j\right]$$

La idea de la demostración de esta proposición está en encontrar una poligonal $\Gamma(\alpha,\beta,\rho)$, dividirlo en tres segmentos γ_1, γ_2 y γ_3 y ver que en dos de estos segmentos la integral vale cero. Los polos de la función, en el plano superior, deben quedar dentro de $\Gamma(\alpha,\beta,\rho)$. Vemos esto con un ejemplo:

Calcular:

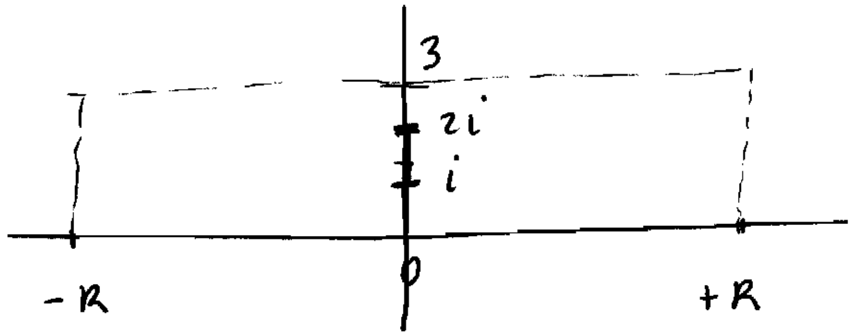
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+3}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx.$$ Podemos expresar esta integral

como:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+3}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x^2+3}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx$$

Los polos, en el plano superior, de $f(z) = \dfrac{z^2+3}{(z^2+1)(z^2+4)}$ son

$z = i$, $z = 2i$. Tomamos la poligonal:



Este rectángulo contiene a los polos de $f(z)$ en el plano superior.

Vamos a resolver el ejercicio sin usar los resultados de la proposición.

→

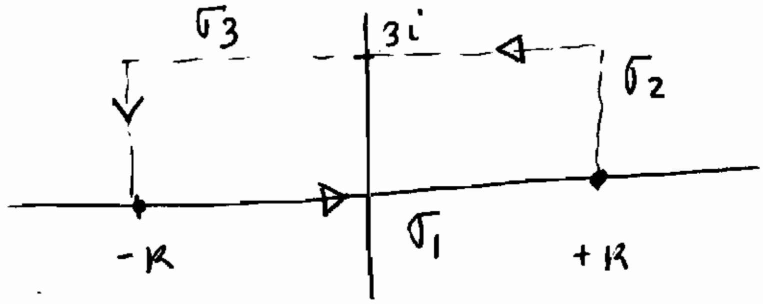
Observación :

Sean $A, B \in \mathbb{C}$. Se define el segmento de extremos A y B como :

$$\sigma(A,B) = \{ z \in \mathbb{C} \ / \ z = A + t(B-A), \ 0 \leq t \leq 1 \}$$

→

Vamos a dividir el recorrido del rectángulo en tres tramos :



Los segmento σ_1, σ_2, σ_3 son :

$\sigma_1 = \sigma(-R, R)$ $\quad$ $\sigma_2 = \sigma(R, 3i)$ $\quad$ $\sigma_3 = \sigma(3i, -R)$

Entonces $\sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \sigma_3 = \Gamma$ (la poligonal que encierra al rectángulo). Por tanto :

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_{\sigma_1} f(z)\,dz + \int_{\sigma_2} f(z)\,dz + \int_{\sigma_3} f(z)\,dz.$$

Se tiene que $\int_{\sigma_1} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(z)\,dz$

$\int_{\sigma_2} f(z)\,dz$ y $\int_{\sigma_3} f(z)\,dz$ verifican que

$\lim_{R\to\infty} \int_{\sigma_2} f(z)\,dz = \lim_{R\to\infty} \int_{\sigma_3} f(z)\,dz = 0$ ya que

$$|f(z)| = \left| \frac{z^2+3}{(z^2+1)(z^2+4)} \right|$$

Sobre σ_2: $\quad z = R + t\cdot(3i - R) \quad 0 \le t \le 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad |z| = |R + t(3i-R)| < R+3 \Rightarrow |z|^2 < (R+3)^2$$

$$|z| = |R + t(3i - R| > R \Rightarrow |z|^2 > R^2$$

Luego:

$$|f(z)| = \frac{|z^2+3|}{|(z^2+1)(z^2+4)|} \le \frac{|z|^2+3}{|z^2+1|\cdot|z^2+4|} < \frac{(R+3)^2+3}{R^2\cdot R^2}$$

$|f(z)| < \dfrac{(R+3)^2+3}{R^4}$. Como:

$$\left| \int_{\sigma_2} f(z)\,dz \right| \le \int_{\sigma_2} |f(z)|\,dz < \frac{(R+3)^2+3}{R^4} \int_{\sigma_2} dz \Rightarrow$$

$\lim_{R\to\infty} \int_{\sigma_2} f(z)\,dz = 0$. De modo análogo se puede ver que $\lim_{R\to\infty} \int_{\sigma_3} f(z)\,dz = 0$. Tenemos que:

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \sum_{j=1}^{n} \text{Res}\,(f(z), z_j)$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma} f(z)\,dz = \lim_{R\to\infty} \int_{\sigma_1} f(z)\,dz + \cancel{\lim_{R\to\infty} \int_{\sigma_2} f(z)\,dz}^{=0} + \cancel{\lim_{R\to\infty} \int_{\sigma_3} f(z)\,dz}^{=0}$$

Es decir:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{z^2+3}{(z^2+1)(z^2+4)}\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \text{Res}\left(\frac{z^2+3}{(z^2+1)(z^2+4)}, z_j\right)$$

como los polos son $z = i$ $\quad z = 2i$

$$\text{Res}\,(f(z), i) = \frac{p(i)}{q'(i)} = \frac{2}{6i} = \frac{1}{3i}\ ;\ \text{Res}\,(f(z), 2i) = \frac{-1}{-12i} = \frac{1}{12i}$$

$p(z) = z^2+3 \Rightarrow p(i) = i^2+3 = 2 \Rightarrow p(2i) = -1$

$q(z) = (z^2+1)(z^2+4) \Rightarrow q(z) = z^4+5z^2+4 \Rightarrow q'(z) = 4z^3+10z \Rightarrow$

$\Rightarrow q'(i) = -4i+10i = 6i\ ;\ q'(2i) = -32i+20i = -12i$

Por tanto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+3}{(x^2+1)(x^2+4)}\, dz = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{z^2+3}{(z^2+1)(z^2+4)}\, dz = 2\pi i \left[\frac{1}{3i} + \frac{1}{12i} \right] =$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{5}{12i} = \frac{5\pi}{6}$$

. Este resultado lo podríamos haber obtenido de manera más rápida aplicando el resultado de la proposición 1.

<u>Proposición 2</u>:

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos funciones polinómicas sin factores comunes y $\lambda > 0$. tales que:

1º grado $Q \geq$ grado $p + 1$

2º $Q(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

3º Sean $z_1, z_2, \dots z_n$ los ceros de Q que están en el semiplano superior $z_i \in \mathbb{C}$. Entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cdot e^{i\lambda x}\, dx = 2\pi i \cdot \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)} \cdot e^{i\lambda z},\ z_j \right]$$

De nuevo la demostración de esta proposición (muy complicada) se basa en escoger un rectángulo en el semiplano superior que contenga a los polos de la función

$f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)} \cdot e^{i\lambda z}$, dividirlo en los tres segmentos

anteriores siguiendo los mismos pasos. Veamos un

ejemplo:

Calcular $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \lambda x}{a^2+x^2}\,dx \quad a>0,\ \lambda>0.$

Como $e^{i\lambda x} = \cos \lambda x + i \operatorname{sen} \lambda x$ se tiene que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \lambda x}{a^2+x^2}\,dx = \operatorname{Re}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{a^2+x^2}\,dx\right].$$

Vamos a calcular la integral $H = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{a^2+x^2}\,dx$

$f(z) = \dfrac{1}{a^2+z^2} \cdot e^{i\lambda z}$ tan sólo tiene un polo en

el semiplano superior que es $z = ai$. Luego:

$$\operatorname{Res}(f(z), ai) = \frac{p(ai)}{q'(ai)} = \frac{e^{-\lambda a}}{2ai}$$

$p(z) = e^{i\lambda z} \Rightarrow p(ai) = e^{i\lambda ai} = e^{-\lambda a}$

$q(z) = a^2 + z^2 \Rightarrow q'(z) = 2z \Rightarrow q'(ai) = 2ai$

Según la proposición 2:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{a^2+x^2}\,dx = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}\left[\frac{e^{i\lambda z}}{a^2+z^2}, ai\right] = \cancel{2}\pi \cancel{i} \cdot \frac{e^{-\lambda a}}{\cancel{2}a\cancel{i}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{a^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{a}\cdot e^{-\lambda a}$$

Luego:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\lambda x}{a^2+x^2}\,dx = \operatorname{Re}\left(\frac{\pi}{a}\cdot e^{-\lambda a}\right) = \frac{\pi}{a}\cdot e^{-\lambda a}$$

<u>Integrales de Fourier</u>.

Son de la forma $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \cos ax\,dx$,

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cdot \operatorname{sen} ax\,dx$. Veamos como resolverlas.

<u>Proposición 3</u>:

Sean $p(x)$ y $q(x)$ dos funciones polinómicas primas entre si (es decir sin factores comunes) y $a>0$, tales que:

1º grado $q \geq$ grado $p+1$

2º $q(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

3º Sean $z_1, z_2, \ldots, z_n$ los ceros de $q(z)$ que están en el semiplano superior $z_i \in \mathbb{C}$.

Entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \cdot \cos ax = \operatorname{Re}\left[2\pi i \cdot \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)} \cdot e^{iaz}, z_j\right)\right]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \operatorname{sen} ax = \operatorname{Im}\left[2\pi i \cdot \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)} e^{iaz}, z_j\right)\right]$$

Demostración:

Según la proposición 2 tenemos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \cdot e^{iax} dx = 2\pi i \cdot \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)} e^{iaz}, z_j\right)$$

Como $e^{iax} = \cos ax + i \operatorname{sen} ax$ se tiene que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} e^{iax} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} (\cos ax + i \operatorname{sen} ax) dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \cos ax\, dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \operatorname{sen} ax\, dx = 2\pi i \cdot \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)} e^{iaz}, z_j\right)$$

y de aquí se obtienen las expresiones anteriores.

Ejemplos:

Calcular $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2}-\cos t}\,dt$

Como $\cos t = \dfrac{e^{it}+e^{-it}}{2}$ hacemos el cambio

$z = e^{it} \Rightarrow \cos t = \dfrac{z+\frac{1}{z}}{2} = \dfrac{z^2+1}{2z}$

además $dz = i e^{it} dt \Rightarrow dz = iz\,dt \Rightarrow dt = \dfrac{1}{iz}dz$

Si $0 \leq t \leq 1 \Rightarrow z = e^{it} \in \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| = 1\}$

Luego:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2}-\cos t}\,dt = \int_{|z|=1} \frac{1}{\sqrt{2}-\frac{z^2+1}{2z}} \cdot \frac{1}{iz}\,dz =$$

$$= \int_{|z|=1} \frac{2z}{2\sqrt{2}z - z^2 - 1} \cdot \frac{1}{iz}\,dz = \frac{-2}{i} \int_{|z|=1} \frac{1}{z^2-2\sqrt{2}z+1}\,dz$$

Veamos qué polos tiene $\dfrac{1}{z^2-2\sqrt{2}z+1}$:

$$z^2 - 2\sqrt{2}z + 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{8-4}}{2} \left\langle \begin{array}{l} \sqrt{2}+1 \notin |z| = 1 \\ \sqrt{2}-1 \in |z| = 1. \end{array} \right.$$

Luego $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 2\sqrt{2}\,z + 1}$ tiene un polo simple en $z = \sqrt{2} - 1$ en la circunferencia de radio 1 y centro $(0,0)$. $f \in H(\mathbb{C} \setminus \{\sqrt{2}-1\})$

Aplicando el teorema de los residuos:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2} - \cos t}\,dt = \frac{-2}{i}\,2\pi i \cdot \text{Res}\,(f(z), \sqrt{2} - 1) = -4\pi \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 2\pi$$

$$\text{Res}\,(f(z), \sqrt{2}-1) = \frac{p(\sqrt{2}-1)}{q'(\sqrt{2}-1)} = \frac{-1}{2}$$

$p(z) = 1 \Rightarrow p(\sqrt{2} - 1) = 1$

$q(z) = z^2 - 2\sqrt{2}\,z + 1 \Rightarrow q'(z) = 2z - 2\sqrt{2} \Rightarrow q'(\sqrt{2}-1) = -2$

Observación: <u>valor propio de una integral impropia</u>.

Dada la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$, llamamos valor propio de esta integral a:

$$vp \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx$$

Ejemplo:

Demostrar que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\,dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

Veamos si estamos en las condiciones de la proposición 1:

$p(x) = 1$

$q(x) = 1 + x^4$

1º $p(x)$ y $q(x)$ son primos entre sí (no tienen factores comunes)

2º $q(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

3º Los polos de $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ son:

$$1 + z^4 = 0 \Rightarrow z^4 = -1 \Rightarrow z = \sqrt[4]{-1}$$

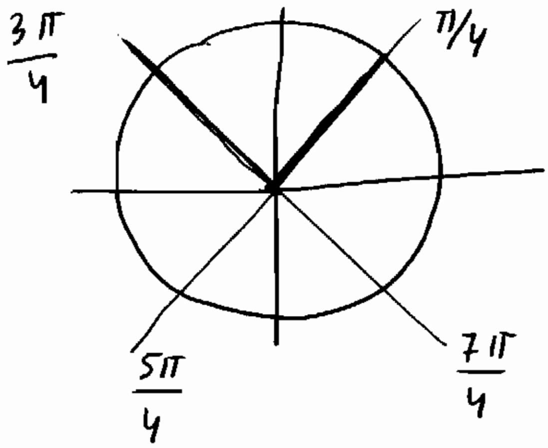
- $1_{\pi/4} = e^{\frac{\pi}{4}i} = z_0$
- $1_{\frac{3\pi}{4}} = e^{\frac{3\pi}{4}i} = z_1$
- $1_{\frac{5\pi}{4}} = e^{\frac{5\pi}{4}i} = z_2$
- $1_{\frac{7\pi}{4}} = e^{\frac{7\pi}{4}i} = z_3$

$$\beta_K = \frac{180 + 360K}{4} = \frac{\pi + 2K\pi}{4}$$

- $\frac{\pi}{4}$
- $\frac{3\pi}{4}$
- $\frac{5\pi}{4}$
- $\frac{7\pi}{4}$

Veamos cuales de los polos están en el plano superior

Como $e^{\alpha} = \cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha$ los polos en el plano superior verificarán que $\mathrm{sen}\,\alpha > 0 \iff 0 < \alpha < \pi$



Luego los polos en el plano superior son $z_0 = e^{\frac{\pi}{4}i}, z_1 = e^{\frac{3\pi}{4}i}$

Aplicando la proposición 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = 2\pi i \cdot \left[Res\left(\frac{1}{1+z^4}, e^{\frac{\pi}{4}i} \right) + Res\left(\frac{1}{1+z^4}, e^{\frac{3\pi}{4}i} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = 2\pi i \left[\frac{\sqrt{2}}{8}(1+i) + \frac{\sqrt{2}}{8}(1-i) \right] = 2\pi i \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi i =$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} i$$

$$Res\left(\frac{1}{1+z^4}, e^{\frac{\pi}{4}i} \right) = \frac{P(e^{\frac{\pi}{4}i})}{q'(e^{\frac{\pi}{4}i})} = \frac{1}{-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i} = \frac{\sqrt{2}}{8}(1+i)$$

$$P(z) = 1 \Rightarrow P(e^{\frac{\pi}{4}i}) = 1$$

$$q(z) = 1+z^4 \Rightarrow q'(z) = 4z^3 \Rightarrow q'(e^{\frac{\pi}{4}i}) = 4 \cdot e^{\frac{3\pi}{4}i} =$$

$$= 4 \cdot \left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} \right) = 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} i$$

$$q'\left(\frac{3\pi}{4} i\right) = 4 \cdot e^{\frac{9\pi}{4}i} = 4 \cdot e^{\frac{\pi}{4}i} = 4\frac{\sqrt{2}}{2} + 4\frac{\sqrt{2}}{2} i = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} i$$

Luego:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{1+z^4},\ e^{\frac{3\pi}{4}i}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i} = \frac{2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i}{16} = \frac{\sqrt{2}}{8}(1-i)$$

Ejemplo: Calcular $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$

Como $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\pi i\right] = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi i$$

Ejemplo:

Verificar que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-1}{x^4+5x^2+4}\,dx = \frac{\pi}{6}$

Veamos que estamos en las condiciones de la proposición 1.

$$p(x) = x^2-1 = (x+1)(x-1)$$

$$q(x) = x^4+5x^2+4 = (x^2+1)(x^2+4)$$

$$(x^2)^2+5x^2+4=0 \Rightarrow x^2 = \frac{-5\pm\sqrt{25-16}}{2} = \frac{-5\pm3}{2} \begin{cases} -1 \\ -4 \end{cases}$$

1º $p(x)$ y $q(x)$ son primos entre sí

2º grado $q \geq$ grado $p + 2$

3º $q(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Veamos cuales son los ceros en la región superior de $q(x)$

$$x^2+1=0 \Rightarrow \begin{cases} x = i \\ x = -i \rightarrow \text{no está en el plano superior} \end{cases}$$

$$x^2+4=0 \Rightarrow x^2=-4 \begin{cases} x = 2i \\ x = -2i \rightarrow \text{no está en el plano superior.} \end{cases}$$

Los ceros en la región superior de $q(z)=0$ son

$z_0 = i \qquad z_1 = 2i$

Si aplicamos la proposición 1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-1}{x^4+5x^2+4}\,dx = 2\pi i \cdot \left[\operatorname{Res}\left(\frac{x^2-1}{x^4+5x^2+4}, i\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{x^2-1}{x^4+5x^4+4}, 2i\right)\right]$$

=

$$\operatorname{Res}\left(\frac{x^2-1}{x^4+5x^2+4}, i\right) = \frac{p(i)}{q'(i)} = \frac{-2}{6i} = -\frac{1}{3i}$$

$p(z) = z^2-1 \Rightarrow p(i) = -2$

$q(z) = z^4+5z^2+4 \Rightarrow p'(z) = 4z^3+10z \Rightarrow p'(i) = -4i+10i = 6i$

$$\text{Res}\left(\frac{z^2-1}{z^4+5z^2+4}, 2i\right) = \frac{p(2i)}{q'(2i)} = \frac{5}{12i}$$

$p(z) = z^2 - 1 \Rightarrow p(2i) = -5$

$q(z) = z^4 + 5z^2 + 4 \Rightarrow q'(z) = 4z^3 + 10z \Rightarrow q'(2i) = -32i + 20i = -12i$

Luego:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-1}{x^4+5x^2+4}\, dx = 2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{3i} + \frac{5}{12i}\right) = 2\pi \cancel{i} \cdot \frac{1}{12\cancel{i}} = \frac{\pi}{6}$$

Ejemplo:

Comprobar que se verifica $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

$p(x) = 1$

$q(x) = 1 + x^4$

1º $p(x)$ y $q(x)$ son primos entre sí

2º grado $q \geq$ grado $p + 2$

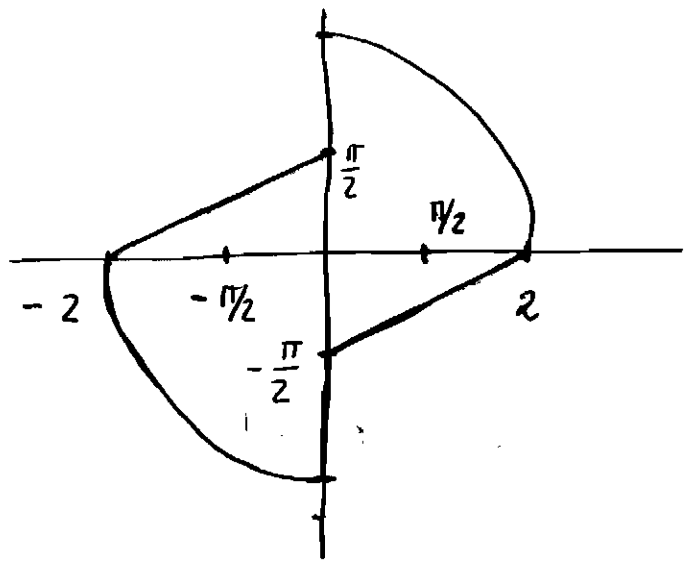
3º Los únicos ceros en el plano superior de $q(z) = 0$

son $z_0 = e^{\frac{\pi}{4}i}$, $z_1 = e^{\frac{3\pi}{4}i}$ (ejemplo página 16 vuelta).

¡¡ Este ejercicio ya está hecho !!

Ejemplo:

Calcular $\int_C \tan z \, dz$ siendo C la curva de Jordan negativamente orientada:



$\tan z = \dfrac{\operatorname{sen} z}{\cos z}$. Los puntos con singularidades aisladas son aquellos que verifican $\cos z = 0 \Rightarrow z = k \cdot \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_0 = \dfrac{\pi}{2} \\ z_1 = \dfrac{3\pi}{2} = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Como $f(z) \in H\left(\mathbb{C} - \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}\right)$ tenemos que:

$$\int_C \tan z \, dz = 2\pi i \cdot \left[\operatorname{Res}\left(\tan z, -\frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{Res}\left(\tan z, \frac{\pi}{2}\right) \right] =$$

$$\operatorname{Res}\left(\tan z, -\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{Res}\left(\frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}, -\frac{\pi}{2}\right) = \frac{p(-\frac{\pi}{2})}{q'(-\frac{\pi}{2})} = -1$$

$$p(z) = \operatorname{sen} z \Rightarrow p\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \Rightarrow p\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$q(z) = \cos z \Rightarrow q'(z) = -\operatorname{sen} z \Rightarrow q'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow q'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$\operatorname{Res}\left(\operatorname{tg} z, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{p(\frac{\pi}{2})}{q'(\frac{\pi}{2})} = \frac{1}{-1} = -1$$

Luego:

$$\int_c \tan z \, dz = 2\pi i\,(-1-1) = -4\pi i$$

observación: en los apuntes de clase tu profesor comprueba que $z = \frac{\pi}{2}$ es un polo de $\tan z$, el polo es de orden 1:

$$\lim_{z \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\lim_{z \to \frac{\pi}{2}} \left(z - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z} = \lim_{z \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} z}{\sum_{n \geq 0} (-1)^n \cdot \frac{(z-\frac{\pi}{2})^{2n+1}}{(2n+1)!}} =$$

$$= \lim_{z \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cancel{(z-\frac{\pi}{2})}\operatorname{sen} z}{\cancel{(z-\frac{\pi}{2})} \cdot \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n \cdot (z-\frac{\pi}{2})^{2n}}{(2n+1)!}} = \frac{1}{-1} = -1.$$

Ejemplo: Calcular $\int_c z \operatorname{sen} \frac{1}{z} \, dz$ siendo c la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 2.

$f(z) = z \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{z}$ tiene una singularidad en $z=0$.

$f(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$

$$\int_c z \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{z} \, dz = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}\left(z \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{z}, 0\right)$$

$$z \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{z} = z \cdot \sum_{n \geq 0} (-1)^n \cdot \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} = z \cdot \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{z^{2n+1}}$$

$$z \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{z} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{z^{2n}} = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{z^{2n}}$$

$$= 1 - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{120} \cdot \frac{1}{z^4} + \cdots \qquad b_1 = 0 \Rightarrow \operatorname{Res}\left(z \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{z}, 0\right) = 0$$

Luego:

$$\int_c z \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{z} \, dz = 2\pi i \cdot 0 = 0.$$

Como no sé exactamente qué has visto en clase (falta el día 16/11/05 por la mañana) te voy a incluir un par de teoremas mas por si acaso.

Proposición 4:

Sean $p(x)$ y $q(x)$ dos funciones polinómicas primas entre sí y tales que:

1º grado $q \geq$ grado $p + 2$

2º $q(x)$ tiene ceros simples en el eje real $x_1, x_2 \dots x_p$

$q(x)$ tiene a $z_1, z_2, \dots z_q$ como ceros en el plano superior. Entonces:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{q} \text{Res}\left(\frac{P(z)}{q(z)}, z_j\right) + \pi i \sum_{j=1}^{p} \text{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, x_j\right)$$

Proposición 5:

Sean $P(x)$ y $q(x)$ dos funciones polinómicas primas entre sí, $\lambda > 0$, tales que:

1º grado $q \geq$ grado $p + 1$

2º $q(x)$ tiene ceros simples $x_1, x_2, \dots x_p$ en el eje real y ceros $z_1, z_2, \dots z_q$ en el semiplano superior.

Entonces:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{q(x)} e^{i\lambda x}\, dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{q} \text{Res}\left(\frac{P(z)}{q(z)} e^{i\lambda z}, z_j\right) + \pi i \cdot \sum_{j=1}^{p} \text{Res}\left(\frac{P(z)}{q(z)} e^{i\lambda z}, x_j\right)$$

A partir de la proposición 5 podemos deducir que se verifica:

Proposición 6:

Sean $P(x)$ y $q(x)$ dos funciones polinomicas, primas entre sí y sea $\lambda > 0$, tal que:

1º grado $q \geq$ grado $p + 1$

2º $q(x)$ tiene raices reales simples $x_1, x_2, \dots x_p$ y $q(z)$ tiene ceros $z_1, z_2, \dots z_q$ en el semiplano superior. Entonces:

a) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{q(x)} \operatorname{sen} \lambda x \, dx = \operatorname{Im}\left[2\pi i \sum_{j=1}^{q} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{q(z)} \operatorname{sen} \lambda z, z_j\right) + \pi i \sum_{j=1}^{p} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{q(z)} \operatorname{sen} \lambda z, x_j\right)\right]$$

b) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{q(x)} \cos \lambda x \, dx = \operatorname{Re}\left[2\pi i \sum_{j=1}^{q} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{q(z)} \cos \lambda z, z_j\right) + \pi i \sum_{j=1}^{p} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{q(z)} \cos \lambda z, x_j\right)\right]$$