TEMA 4

SERIES DE POTENCIAS, SERIES DE TAYLOR Y SERIES DE LAURENT

SUCESIONES DE NÚMEROS COMPLEJOS

Una sucesión de números complejos $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ o bien $z_1, z_2, \dots z_n, \dots,$ es una aplicación en la forma:

$$Z : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$n \longmapsto Z(n) = z_n$$

$\mathbb{N}$ es el conjunto de los números naturales y $\mathbb{C}$ el conjunto de los números enteros.

Observación:

Algunas veces podemos leer la sucesión $z_0, z_1 \dots z_n, \dots$ debido a que se considera el cero en el conjunto de los números naturales. Incluso podemos toparnos con sucesiones que comienzan por un número entero, por ejemplo $z_3, z_4, \dots, z_n, \dots,$ dando por sentado en este caso que no se han declarado, aun existiendo, los valores z_1, z_2 .

Límite de una sucesión

Sea $(z_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ una sucesión. Se dice que el límite de esta sucesión es el número entero z_0 y se escribe:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \quad \text{o simplemente} \quad \lim z_n = z_0$$

si se verifica que:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ n \geq n_0 \Rightarrow z_n \in D(z_0, \varepsilon)$ siendo $D(z_0, \varepsilon)$ el disco de centro z y radio ε, es decir:

$$D(z_0, \varepsilon) = \{ z \in \mathbb{C} \ / \ |z - z_0| < \varepsilon \}$$

Si existe $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0 \neq \infty$ se dice que la sucesión es convergente, en caso contrario diremos que la sucesión es divergente.

Ejemplo:

- La sucesión $\left(\frac{i^n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ es convergente con límite cero

$$\left(\frac{i^n}{n}\right)_{n=1}^{\infty} = i, \frac{-1}{2}, \frac{-i}{3}, \frac{1}{4}, \frac{i}{5}, \frac{-1}{6}, \ldots$$

$\lim_{n\to\infty} \frac{i^n}{n} = 0$ y esto es así porque se verifica:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ n \geq n_0 \Rightarrow \left| \frac{i^n}{n} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{i^n}{n} \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n$$

Hay que tomar $n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon}$. Entonces si $n \geq n_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{i^n}{n} \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{i^n}{n} - 0 \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{i^n}{n} = 0.$$

<u>Teorema</u>: Sea $(z_n) \subset \mathbb{C}$ una sucesión de números complejos. Entonces el límite de esta sucesión si existe es único.

<u>Dem</u>:

Por reducción al absurdo, supongamos que la sucesión tuviera dos límites:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} z_n = z_1$$

Consideramos $\varepsilon = \dfrac{|z_1 - z_2|}{2}$ y $n_0 = \max\{n'_0, n''_0\}$

Al ser $\lim_{n\to\infty} z_n = z_1$:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n'_0 \in \mathbb{N} \ / \ n \geq n'_0 \Rightarrow |z_n - z_1| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

Al ser $\lim_{n\to\infty} z_n = z_2$:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n''_0 \in \mathbb{N} \ / \ n \geq n''_0 \Rightarrow |z_n - z_2| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

Entonces :

$|z_1 - z_2| = |(z_1 - z_n) + (z_n - z_2)| \leq |z_1 - z_n| + |z_n - z_2| =$

$= |z_n - z_1| + |z_n - z_2|$

Entonces si $n \geq n_0 \Rightarrow \begin{cases} n \geq n'_0 \\ n \geq n''_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} |z_n - z_1| < \dfrac{\varepsilon}{2} \\ |z_n - z_2| < \dfrac{\varepsilon}{2} \end{array} \Rightarrow$

$\Rightarrow |z_1 - z_2| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon = |z_1 - z_2|$ ¡Contradicción!

Luego el límite de una sucesión es único.

- Ejemplo: La sucesión $(i^n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ es divergente

$(i^n)_{n=0}^{\infty} = 1, i, -1, -i, 1, -i, -1, -i, \ldots$ (cada 4 valores de n se vuelve a repetir)

Podemos redefinir la sucesión y expresarla del siguiente modo:

$$i^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 4k \\ i & \text{si } n = 4k+1 \\ -1 & \text{si } n = 4k+2 \\ -i & \text{si } n = 4k+3 \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Por tanto:

$$\lim_{n\to\infty} i^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 4k \\ i & \text{si } n = 4k+1 \\ -1 & \text{si } n = 4k+2 \\ -i & \text{si } n = 4k+3 \end{cases}$$ como el límite

de la sucesión debe ser único $\Rightarrow \nexists \lim_{n\to\infty} i^n$.

Teorema de caracterización del límite de sucesiones.

Sea la sucesión $(z_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ tal que

$\forall n \in \mathbb{N} \quad z_n = x_n + i y_n \qquad (x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R} \qquad (y_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$.

Sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Entonces:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \iff \begin{cases} \lim_{n\to\infty} x_n = x \\ \lim_{n\to\infty} y_n = y \end{cases}$$

Demostración:

En primer lugar vamos a probar la condición necesaria

"$\Rightarrow$". Supongamos que:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (x_n + i y_n) = x + y \cdot i$$

Entonces se verifica que

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ n \geq n_0 \Rightarrow |(x_n + i y_n) - (x + i y)| < \varepsilon,$$

es decir:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ n \geq n_0 \Rightarrow |(x_n - x) + i(y_n - y)| < \varepsilon$$

Como:

$$|x_n - x| \leq |(x_n - x) + i \cdot (y_n - y)|$$

$|y_n - y| \leq |(x_n - x) + i \cdot (y_n - y)|$ se tiene que:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ n \geq n_0 \Rightarrow |y_n - y| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

Ahora vamos a probar la condición suficiente

"$\Leftarrow$" Supongamos que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y$.

Entonces:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0' \in \mathbb{N} \ / \ n \geq n_0' \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon/2 \quad (*)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0'' \in \mathbb{N} \ / \ n \geq n_0'' \Rightarrow |y_n - y| < \varepsilon/2 \quad (**)$$

Tomamos $n_0 = \max\{n'_0, n''_0\}$

Si $n \geq n_0 \Rightarrow \begin{cases} \text{se cumple } (*) \\ \text{se cumple } (**) \end{cases}$ y como:

$$|(x_n - x) + (y_n - y)i| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \;\exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, n \geq n_0 \Rightarrow |(x_n - x) + i\cdot(y_n - y)| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} z_n = z.$$

Ejemplo: calcular $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[\frac{3n}{4n-8} + \frac{5n^2+3}{n^2-10}\,i\right] =$

$$= \frac{3}{4} + 5i = \left(\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{4n-8}\right) + \left(\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+3}{n^2-10}\,i\right) = \frac{3}{4} + 5i$$

Series de números complejos

Una serie de números complejos es la suma de los infinitos términos de una sucesión compleja. Con más precisión, sea $(z_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ una sucesión. Entonces la serie asociada a la sucesión es:

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$. Se define la suma parcial n-sima de esta serie como $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} z_i = z_1 + z_2 + \dots + z_n$.

Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es convergente si $\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S$. Al valor S se le llama suma de la serie y se escribe $S = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$

En caso de que $S = \infty$ o no exista $S \in \mathbb{C}$ la serie se llama divergente.

Teorema: Sea la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ una serie de números complejos tal que $z_n = x_n + i \cdot y_n$, convergente con suma $S = x + iy$.

Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S \iff \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} x_n = x \\ \sum_{n=1}^{\infty} y_n = y \end{cases}$

La demostración de este teorema es una consecuencia inmediata del teorema homólogo para sucesiones.

<u>Teorema</u> (<u>Condición</u> <u>necesaria</u> de <u>convergencia</u>)

Sea la serie compleja $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ y supongamos que es convergente a S. Entonces $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$, es decir que el término general z_n de una serie

$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$. tiene límite cero si la serie es convergente

Demostración:

Sean las sumas parciales:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} z_i \qquad S_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} z_i$$

Entonces $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$

Luego $\lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

Lo más interesante es el teorema contrarecíproco, es decir:

<u>Teorema</u>: Sea la serie de números complejos $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ tal que $\lim_{n\to\infty} z_n \neq 0$. Entonces la serie es divergente.

<u>Series</u> <u>absolutamente</u> <u>convergentes</u>

Sea la serie de números complejos $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$;

se dice que esta serie es absolutamente convergente si la serie de los valores absolutos es convergente, es decir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n \text{ es absolutamente convergente} \iff \sum_{n=1}^{\infty} |z_n| \text{ es convergente.}$$

<u>Teorema</u>: Toda serie absolutamente convergentes es también convergente es decir que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| \text{ convergente} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} z_n \text{ convergente.}$$

<u>Demostración</u>:

Recordemos el criterio de comparación para series de números reales.

Sean $(a_n) \subset \mathbb{R}$ y $(b_n) \subset \mathbb{R}$ dos sucesiones de números reales tales que $0 \leq a_n \leq b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Entonces:

1º Si la serie mayorante $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente también es convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ la serie minorante.

Si la serie minorante $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente, también es divergente la serie mayorante $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Sea $z_n = x_n + i\, y_n$. Sabemos por un teorema anterior que $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es convergente $\iff \sum_{n=1}^{\infty} x_n, \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ son convergentes. Si $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ es convergente, como $|x_n| \leq |z_n|$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y $|y_n| \leq |z_n|$ $\forall n \in \mathbb{N}$, según el criterio de comparación para series de términos positivos en $\mathbb{R}$ $\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ son convergentes $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es convergente

La propiedad recíproca no es cierta, es decir, hay series convergentes que no son absolutamente convergentes. Vamos a ver un contraejemplo y para ello necesitamos tener en cuenta dos resultados de series en los reales:

- La serie armónica: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente
- Criterio de Leibnitz para series alternadas:

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$ una serie tal que:

* a_n es de términos positivos y decreciente
* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$ es convergente.

Consideremos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$. Esta serie, según el criterio de Leibnitz, es convergente. La serie de los valores absolutos es la serie armónica que es divergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Ahora vamos a ver criterios de convergencia de series. de números complejos.

<u>Criterio de Comparación</u>

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ una serie de números complejos y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de números reales. tal que $|z_n| \leq a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.
Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ es convergente ($\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es convergente)

Demostración:

dado la serie de números complejos $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ es una serie de términos reales y como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es mayorante si esta es convergente también lo será $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es convergente.

Criterio de la raíz de Cauchy

Sea la serie de números complejos $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ no nulos, tal que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = L \in \mathbb{R}$. Entonces:

i) Si $L < 1$ la serie es absolutamente convergente

ii) Si $L > 1$ la serie es absolutamente divergente

iii) Si $L = 1$ no se puede afirmar nada sobre su convergencia.

(Por lo que se ve hasta aquí no te han dado más criterios de convergencia de series pero los hay y es conveniente que los sepas)

Criterio del cociente (o de la razón de D'Alembert)

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ una serie de números complejos no nulos tales que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = L. \text{ Entonces:}$$

i) Si $L < 1$ la serie es absolutamente convergente

ii) Si $L > 1$ la serie es absolutamente divergente

iii) Si $L = 1$ nada podemos afirmar sobre la convergencia de la serie.

Criterio de Raabe

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ una serie de números complejos no nulos tal que $\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(1 - \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|}\right) = \ell$. Entonces:

i) Si $\ell > 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es absolutamente convergente

ii) Si $\ell < 1$ la serie es absolutamente divergente

iii) Si $\ell = 1$ nada podemos asegurar sobre la convergencia de la serie.

Criterio de Pringsheim

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ una serie de números complejos no nulos tales que $\lim_{n \to \infty} n^{\alpha} \cdot |z_n| \neq 0$. Entonces:

i) Si $\alpha > 1 \Rightarrow$ la serie es absolutamente convergente

ii) Si $\alpha \leq 1 \Rightarrow$ la serie es absolutamente divergente.

Criterio de la integral

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ una serie de números complejos no nulos. Supongamos que existe una función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

1º $f(n) = |z_n| \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2º $f(x)$ es decreciente $\forall x \geq 1$. Entonces:

$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ es convergente $\Longleftrightarrow \int_1^{\infty} f(x)$ es convergente

Ejemplo:

Determinar el carácter de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(100+75i)^n}{n!}$

Lo podemos hacer usando el criterio del cociente o el de la raíz.

Con el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(100+75i)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(100+75i)^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{100+75i}{n+1} = 0$$

y como $l = 0 < 1 \Rightarrow$ la serie es absolutamente convergente $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(100+75i)^n}{n!}$ es convergente

Con el criterio de la raíz:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(100+75i)^n}{n!}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{100+75i}{\sqrt[n]{n!}} = 0$$

y de nuevo como $l = 0 < 1$, la serie es absolutamente convergente $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(100+75i)^n}{n!}$ es convergente.

Antes de finalizar este apartado de series de números complejos, recordemos la serie geométrica.

<u>Serie geométrica</u>

La serie geométrica es de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ donde: $z_n = z_{n-1} \cdot r \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Al valor $r \in \mathbb{C}$, se le llama razón de la serie geométrica.

Si $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es una serie geométrica entonces

$z_n = z_{n-1} \cdot r$ Vamos a ver como se genera la serie a partir del primer término z_1

$$z_1$$
$$z_2 = z_1 \cdot r$$
$$z_3 = z_2 \cdot r = z_1 \cdot r^2$$
$$z_4 = z_3 \cdot r = z_1 \cdot r^3$$
$$\vdots$$

$\boxed{z_n = z_1 \cdot r^{n-1}}$ esta es la expresión del termino general de una serie geométrica. Podemos considerar entonces que la serie geométrica de razón r tiene la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_1 \cdot r^n = z_1 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} r^n$$

¿ Cuando será convergente la serie geométrica de razón r ? Si aplicamos el criterio del cociente:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|r^n|}{|r^{n-1}|} = \lim_{n \to \infty} |r| = |r|$$

- Si $|r| < 1$ la serie es convergente
- Si $|r| > 1$ la serie es divergente.

• Si $r = 1$ nada podemos afirmar, bueno sí podemos decir que la serie es divergente ya que todos los términos coincidirían con z_1. La serie parcial n-sima sería:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} z_1 = n \cdot z_1 \quad \text{y por tanto:}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} n \cdot z_1 = \infty .$$

¿Cuánto vale la suma de la serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, $z_n = z_1 \cdot r^{n-1}$ suponiendo que sea convergente?

Si $S_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$ es la suma parcial n-sima:

$$r S_n = \cancel{z_2} + \cancel{z_3} + \cdots + \cancel{z_n} + r \cdot z_n$$

$$-S_n = -z_1 - \cancel{z_2} - \cancel{z_3} - \cdots - \cancel{z_n}$$

$$r S_n - S_n = r z_n - z_1 \Rightarrow (r-1) S_n = z_1 r^n - z_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{z_1 (r^n - 1)}{r - 1} = \frac{z_1 (1 - r^n)}{1 - r}.$$

Si la serie es convergente $|r| < 1$ y por tanto $\lim_{n \to \infty} r^n = 0$ de modo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_1 \cdot r^{n-1} = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{z_1 (1 - r^n)}{1 - r} = \frac{z_1}{1 - r}$$

SERIES DE POTENCIAS

Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{C}$. Llamaremos serie de potencias centrada en z_0 de coeficientes complejos a_n a toda serie de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 +$$

$+ \cdots + a_n(z-z_0)^n + \cdots$, se trata de un polinomio de grado infinito. Toda serie de potencias se puede considerar como una serie compleja. Los términos de una serie de potencias son variables ya que z es variable. Si se fija un valor de z se pueden aplicar entonces todos los criterios de convergencia de series vistos anteriormente. Por ejemplo si tenemos una serie de potencias:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$ y queremos hallar su convergencia,

a) Si aplicamos el criterio del cociente a la serie absoluta $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}\,(z-z_0)^{n+1}}{a_n\,(z-z_0)^n} \right| =$$

$= \lim_{n\to\infty} |z-z_0| \cdot \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |z-z_0| \cdot \lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ y a partir de aquí aplicaríamos los criterios de convergencia vistos para series de números complejos.

b) Si aplicamos el criterio de la raíz a $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n (z-z_0)^n|} = |z-z_0| \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

y de nuevo reducimos el estudio de la convergencia de la serie de potencias a la convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

Las series de potencias, y las series complejas en general, se pueden sumar siempre para todo valor de $\mathbb{C}$, o tan sólo se pueden sumar en un disco o no se pueden sumar nunca.

Ejemplos: Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ y en caso de convergencia hallar su suma

$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots$ es una serie de potencias centrada en $z_0 = 0$ con coeficientes complejos $a_n = 1 = 1+0i$. Se trata de una serie geométrica. Si aplicamos el criterio de la raíz:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z^n|} = |z| :$$

a) Si $|z| < 1$ la serie es absolutamente convergente $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ es convergente

b) Si $|z| > 1$ la serie es divergente

c) Si $|z| = 1$ la serie también es divergente ya que

$S_n = \sum_{i=0}^{n} z^i = \sum_{i=0}^{n} 1^i = n$ (esta sería la suma parcial n-sima) $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty$

Si $|z| < 1$ la serie es convergente. Veamos cuanto valdría su suma:

$$S_n = 1 + z + z^2 + \dots + z^n$$

$$z S_n = \quad z + z^2 + \dots + z^n + z^{n+1}$$

Por tanto:

$$z S_n - S_n = z^{n+1} - 1 \Rightarrow S_n (z-1) = z^{n+1} - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{z^{n+1} - 1}{z-1}.$$ Si $n \to \infty$ al ser $|z| < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow z^{n+1} \longrightarrow 0$ por tanto:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \lim_{n \to \infty} \frac{z^{n+1} - 1}{z-1} = \frac{-1}{z-1} = \frac{1}{1-z}$$

Podemos concluir diciendo que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ es absolutamente convergente (por tanto convergente) $\forall z \in D(0,1)$ y que en este caso vale $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$

Ejemplo: estudiar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Podemos considerar que esta serie es de potencias con centro en $z_0 = 0$ y coeficientes complejos $a_n = \frac{1}{n!}$

Aplicando el criterio del cociente estudiamos la convergencia absoluta (y por tanto la convergencia) de la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots \overset{0!=1}{=} 1 + z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{z}{n+1} \right| = 0$$

Al ser $0 < 1 \Rightarrow$ la serie es convergente $\forall z \in \mathbb{C}$

Ejemplo: Estudiar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, z^n$$

De nuevo podemos considerar que se trata de una serie de potencias centrada en $z_0 = 0$ con coeficientes complejos $a_n = n!$. Vamos a estudiar su convergencia

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!\, z^{n+1}}{n!\, z^n} \right| = \lim_{n\to\infty} (n+1)|z| = \infty$$

por tanto la serie diverge $\forall z \in \mathbb{C}$

<u>Radio de convergencia de una serie de potencias</u>

Dada la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ converge siempre en $z = z_0$ obviamente. Nos preguntamos en dónde es convergente esta serie.

Se define el radio de convergencia de la serie como el mayor $R \in \mathbb{R}^+$ tal que la serie de potencias converge $\forall z \in D(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z-z_0| < R\}$

Si $R = +\infty$ se tiene que $D(z_0, +\infty) = \mathbb{C}$ obviamente.

De manera más precisa, enunciamos el siguiente teorema. Hay que tener en cuenta que cuando ponemos el disco cerrado de centro z_0 y radio R $\overline{D(z_0, R)}$ nos referimos a $\overline{D(z_0, R)} = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z - z_0| \leq R\}$

Teorema de Abel

Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ una serie de potencias centrada en $z_0 \in \mathbb{C}$. Entonces $\exists R \in \mathbb{R}^+$ tal que:

i) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ converge absolutamente $\forall z \in D(z_0, R)$

ii) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ diverge $\forall z \in \mathbb{C} - \overline{D(z_0, R)}$

iii) Si $\lim_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L$ se verifica:

- $L = +\infty \Rightarrow R = \frac{1}{L} = 0$, la serie $\{a_n\}$ sólo converge en z_0
- $L = 0 \Rightarrow R = \frac{1}{L} = +\infty$, la serie converge $\forall z \in \mathbb{C}$
- $L > 0 \Rightarrow R = \frac{1}{L}$ la serie converge $\forall z \in D(z_0, \frac{1}{L})$ y diverge $\forall z \in \mathbb{C} - \overline{D(z_0, \frac{1}{L})}$

Observación:

Recordemos que si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ es una serie de potencias entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \quad \text{por tanto:}$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad L = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

y de esta forma podemos calcular el radio de convergencia a partir de L.

Si $R \in \mathbb{R}^+$ es el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ entonces se define el disco de convergencia de la serie como $D(z_0, R)$.

Ejemplo: Hallar el radio de convergencia y el disco de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} (z-3)^n$

Si aplicamos el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{[2(n+1)]!}{[(n+1)!]^2}}{\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(2n+2)\cdot(2n+1)\cdot\cancel{(2n)!}}{[(n+1)\cdot\cancel{(n!)}]^2}}{\cancel{\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)\cdot(2n+1)}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+\cdots}{n^2+\cdots} = 4 = L$$

luego el radio de convergencia es $R = \frac{1}{L} = \frac{1}{4}$ y el disco de convergencia es $D(3, \frac{1}{4})$. Esto quiere decir que la serie de potencias se puede sumar $\forall z \in D(3, \frac{1}{4})$, la suma nos dará una función de z,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} (z-3)^n.$$

Esta función es holomorfa $\forall z \in D(3, \frac{1}{4})$. De manera más precisa:

Teorema (Holomorfía de las series de potencias en su disco de convergencia)

Sea la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ con radio de convergencia $R \in]0,+\infty[$ y consideremos la función

$f: D(z_0,R) \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n \cdot (z-z_0)^n$. Entonces:

$f \in \mathcal{H}[D(z_0,R)]$. Además:

$$\left.\begin{aligned} f'(z) &= \sum_{n\geq 0} n \cdot a_n \cdot (z-z_0)^{n-1} \quad \forall z \in D(z_0,R) \\ \int f(z)\,dz &= \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} (z-z_0)^{n+1} \end{aligned}\right\} \text{Estas series de potencias convergen } \forall z \in D(z_0,R)$$

Por tanto en el disco de convergencia podemos derivar, integrar, etc, la función suma de la serie de potencias.

Ejemplo: Sabemos que el disco de convergencia de la serie $\sum_{n\geq 0} z^n$ es $D(0,1)$. Además la función suma vale

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n\geq 0} z^n$$

Si consideramos $f: D(0,1) \longrightarrow \mathbb{C}$
$$z \longmapsto f(z) = \frac{1}{1-z}$$

podemos hallar la derivada, su integral, etc:

$$f'(z) = \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n\geq 1} n\, z^{n-1}$$

Series de Taylor

Las funciones polinómicas son las más sencillas de manejar. Con el desarrollo de Taylor pretendemos aproximar, cometiendo cierto error, una función holomorfa en cierto disco a una función polinómica.

Teorema de Taylor

Sea $f: D(z_0, R) \longrightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en $D(z_0, R)$ $R \in \mathbb{R}^+$, $R \neq 0$, $z_0 \in \mathbb{C}$. Entonces f admite un desarrollo en serie de potencias centrado en z_0 y con radio de convergencia R:

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n.$$ A esta serie se le llama serie de Taylor

Demostración:

Admitamos que f posee un desarrollo en serie de potencias centrado en z_0, es decir que $\forall z \in D(z_0, R)$ vale:

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + a_3(z-z_0)^3 + \dots$$

Vamos a ver qué valor tienen los coeficientes $(a_i)_{i\geq 0}$

Para $z = z_0 \Rightarrow \boxed{a_0 = f(z_0)}$

derivando f:

$$f'(z) = a_1 + 2a_2(z-z_0) + 3a_3(z-z_0)^2 + \dots + n a_n (z-z_0)^{n-1} + \dots$$

Para $z = z_0 \Rightarrow \boxed{a_1 = f'(z_0)}$

Hallamos ahora la derivada segunda de f:

$$f''(z) = 2a_2 + 3\cdot 2\cdot a_3(z-z_0) + \dots + n\cdot(n-1)\cdot a_n (z-z_0)^{n-2}$$

Si $z = z_0 \Rightarrow \boxed{a_2 = \dfrac{f''(z_0)}{2!}}$

Hallamos la derivada tercera

$$f'''(z) = 3\cdot 2\cdot a_3 + 4\cdot 3\cdot 2 a_4 (z - z_0) + \cdots + n\cdot(n-1)\cdot(n-2)(z-z_0)^{n-3}$$

Para $z = z_0 \Rightarrow a_3 = \dfrac{f'''(z_0)}{3!}$

En general podemos afirmar que:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Llamamos serie de Mc-Laurin a una serie de Taylor centrada en $z_0 = 0$. La serie de Mc-Laurin tendrá la expresión:

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

Vamos a ver algunas series de Mc-Laurin.

SERIE DE MC-LAURIN GEOMETRICA

Sea $f(z) = \sum_{n\geq 0} z^n$ una serie geométrica. Entonces sabemos que esta serie converge tan sólo en el caso de que $|z|<1$, y que en este caso la suma vale:

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} z^n = \frac{1}{1-z}$$

Se tiene que $f(z) = \frac{1}{1-z} \in \mathcal{H}(D(0,1))$, aún se podría decir mas, $f(z) = \frac{1}{1-z} \in \mathcal{H}(\mathbb{C} - \{1\})$

∴ El desarrollo de Mc-Laurin de $f(z) = \frac{1}{1-z}$ es:

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \quad (*)$$

$f(0) = 1$

$f'(z) = \frac{1}{(1-z)^2} \Rightarrow f'(0) = 1$

$f''(z) = \frac{2(1-z)}{(1-z)^4} = \frac{2!}{(1-z)^3} \Rightarrow f''(0) = 2!$

$f'''(z) = \frac{2\cdot 3\cdot (1-z)^2}{(1-z)^4} \Rightarrow f'''(0) = 3!$

En general $f^{(n)}(0) = n!$. Si sustituimos estos valores en $(*)$ obtenemos que el desarrollo de Mc-Laurin de la serie geométrica es:

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n\geq 0} z^n.$$

SERIE DE MC-LAURIN DE LA FUNCION EXPONENCIAL

Sea $f(z) = e^z \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) = \mathcal{H}(D(0,+\infty))$

La serie de Mc-Laurin es $f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$

$f(z) = e^z \Rightarrow f(0) = e^0 = 1$

$f'(z) = e^z \rightarrow f'(0) = e^0 = 1$

$f''(z) = e^z \Rightarrow f''(0) = e^0 = 1$

$\vdots$

$f^{(n)}(z) = e^z \Rightarrow f^{(n)}(0) = e^0 = 1$

Si sustituimos estos valores en la serie de Mc-Laurin obtenemos:

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} z^n = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$$

Luego $e^z = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$. Si tomamos $z = ix \Rightarrow$

$\Rightarrow e^z = e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$ y por lo tanto:

$$\cos x + i \operatorname{sen} x = \sum_{n\geq 0} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{k\geq 0} \frac{(ix)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k\geq 0} \frac{(ix)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos x + i \operatorname{sen} x = \sum_{k\geq 0} \frac{(i^2)^k \cdot x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k\geq 0} \frac{i \cdot (i^2)^k \cdot x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$ Entonces:

$$\cos x + i \operatorname{sen} x = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k \cdot x^{2k}}{(2k)!} + i \cdot \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k \cdot x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Luego: $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\cos x = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k \cdot x^{2k}}{(2k)!} \; ; \quad \operatorname{sen} x = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k \cdot x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Veamos como se desarrollan las funciones trigonométricas cuando el argumento $z \in \mathbb{C}$ según la definición vista en temas anteriores

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{n\geq 0} \frac{(iz)^n}{n!} + \sum_{n\geq 0} \frac{(-iz)^n}{n!}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{k\geq 0} \frac{(iz)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k\geq 0} \frac{(iz)^{2k+1}}{(2k+1)!} + \sum_{k\geq 0} \frac{(-iz)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k\geq 0} \frac{(-iz)^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)$$

Luego:

$$\cos z = \frac{1}{2}\left[\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k \cdot z^{2k}}{(2k)!} + i\cdot \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k \cdot z^{2k+1}}{(2k+1)!} + \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k \cdot z^{2k}}{(2k)!} - i \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k \cdot z^{2k+1}}{(2k+1)!}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2 \cdot \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k \cdot z^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k \cdot z^{2k}}{(2k)!}$$

De igual modo hallaríamos el desarrollo de $\operatorname{sen} z$, $z \in \mathbb{C}$

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{1}{2i}\left[\sum_{n\geq 0} \frac{(iz)^n}{n!} - \sum_{n\geq 0} \frac{(-iz)^n}{n!}\right] =$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\cancel{\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k \cdot z^{2k}}{(2k)!}} + i \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k \cdot z^{2k+1}}{(2k+1)!} - \cancel{\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k \cdot z^{2k}}{(2k)!}} + i \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k \cdot z^{2k+1}}{(2k+1)!}\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\cdot 2i \cdot \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k \cdot z^{2k+1}}{(2k+1)!} \Rightarrow \operatorname{sen} z = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k \cdot z^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Series hiperbólicas

Se tiene que $\cosh z = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{(2k)!} \cdot z^{2k}$

Demostración:

Por definición $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^z + e^{-z}\right) =$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{k\geq 0} \frac{z^n}{n!} + \sum_{k\geq 0} \frac{(-z)^n}{n!}\right)$$

Luego:

$$\cosh z = \frac{1}{2}\left[\sum_{k\geq 0} \frac{z^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k\geq 0} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} + \sum_{k\geq 0} \frac{(-z)^{2k}}{2k!} + \sum_{k\geq 0} \frac{(-z)^{2k+1}}{(2k+1)!}\right]$$

$$\Rightarrow \cosh(z) = \frac{1}{2}\left[\sum_{k\geq 0} \frac{z^{2k}}{(2k)!} + \cancel{\sum_{k\geq 0} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}} + \sum_{k\geq 0} \frac{z^{2k}}{(2k)!} - \cancel{\sum_{k\geq 0} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}}\right]$$

$$\Rightarrow \cosh(z) = \sum_{k\geq 0} \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

De igual modo se tiene que

$$\operatorname{senh} z = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k+1} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Demostración:

Por definición $\operatorname{senh} z = \dfrac{e^{z} - e^{-z}}{2} = \dfrac{1}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \operatorname{senh} z = \frac{1}{2}\left[\sum_{n\geq 0} \frac{z^{n}}{n!} - \sum_{n\geq 0} \frac{(-z)^{n}}{n!}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{senh} z = \frac{1}{2}\left[\sum_{k\geq 0} \frac{z^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k\geq 0} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} - \sum_{k\geq 0} \frac{(-z)^{2k}}{(2k)!} - \sum_{k\geq 0} \frac{(-z)^{2k+1}}{(2k+1)!}\right]$$

$$\Rightarrow \operatorname{senh} z = \frac{1}{2}\left[\cancel{\sum_{k\geq 0} \frac{z^{2k}}{(2k)!}} + \sum_{k\geq 0} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} - \cancel{\sum_{k\geq 0} \frac{z^{2k}}{(2k)!}} + \sum_{k\geq 0} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{senh} z = \sum_{k\geq 0} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Metodos prácticos

No importa el método usado para la obtención de una serie de Taylor, ya que una serie puede desarrollarse como serie de potencias de forma única.

Ejemplo: Desarrollo de la serie geométrica. Metodo de sustitución.

$f(z) = \frac{1}{1+z}$. Queremos hallar el desarrollo en serie de $f(z)$.

La serie geométrica es $\sum_{n\geq 0} z^n$ y es convergente cuando $|z|<1$, es decir que si $|z|<1 \Rightarrow \sum_{n\geq 0} z^n = \frac{1}{1-z}$

Luego:

$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n\geq 0} (-z)^n$ con $|-z| = |z| < 1$. Luego:

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \cdot z^n$$

Vamos a ver otro desarrollo por el método de sustitución.

Queremos desarrollar en serie de Mc-Laurin la función $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$

Según el ejemplo anterior se tiene que:

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1+(z^2)} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \cdot (z^2)^n \quad \text{con } |z^2| < 1$$

$$\Downarrow$$

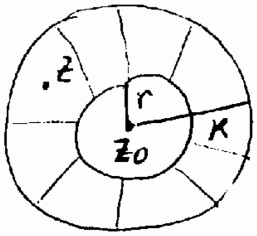
$$|z|^2 < 1$$

Luego:

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \cdot z^{2n} \quad \text{con } |z| < 1$$

Anillo o corona circular en $\mathbb{C}$

Sea $z_0 \in \mathbb{C}$, $r, R > 0$ números reales.



Se define el anillo de centro z_0 y radios r, R como:

$$A(z_0, r, R) = \{ z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R \}$$

SERIES DE LAURENT

Cuando una función $f: D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa en $z_0 \in \mathbb{C}$ el teorema de Taylor nos garantiza que podemos expresar f como una serie de potencias centrada en $z_0 \in \mathbb{C}$, es decir que:

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n \quad , \quad a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Si f no es holomorfa en z_0 no podemos aplicar el teorema de Taylor y aquí es donde intervienen las series de Laurent. Estas series constan de potencias de exponente positivo y negativo para $(z-z_0)$ y son convergentes en algún anillo $A(z_0,r,R)$ en donde f es holomorfa. De manera más precisa enunciamos el siguiente teorema:

Teorema (representación de una función por su serie de Laurent)

Sea $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función tal que $f \in H[A(z_0,r,R)]$. Entonces existen constantes a_n y b_n tales que:

$$\forall z \in A(z_0,r,R) \Rightarrow f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n\geq 0} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

A esta expresión se le llama serie de Laurent de f centrada en $z_0 \in \mathbb{C}$. Además las constantes a_n y b_n se obtienen mediante las expresiones:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\, dw \qquad \forall n \geq 0$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(w)}{(w-z_0)^{-n+1}}\, dw \qquad \forall n \geq 1$$

siendo C la trayectoria de cualquier curva de Jordan contenido en $A(z_0, r, R)$

A la expresión $\sum_{n \geq 0} a_n (z-z_0)^n$ se le llama parte regular de la serie de Laurent y a la expresión $\sum_{n \geq 0} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$ se le llama parte singular o principal de la serie de Laurent.

Una serie de Taylor es una serie de Laurent en donde son nulos los coeficientes de la parte principal.

Métodos prácticos para la obtención de series de Laurent

Vamos a ver, mediante un ejemplo, como obtener series de Laurent sin necesidad de utilizar las expresiones de a_n y b_n del teorema anterior.

Se trata de obtener la serie de Laurent de la función $f(z) = z^{-5} \operatorname{sen} z$ con centro $z_0 = 0$.

Se tiene que $f \in H(\mathbb{C} \setminus \{0\}) = H(D^*(0, +\infty))$

Sabemos que $\operatorname{sen} z = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Entonces:

$$f(z) = \frac{1}{z^5} \cdot \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-4}$$

$$\Rightarrow f(z) = \underbrace{\frac{1}{z^4} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{z^2}}_{\text{Parte principal}} + \underbrace{\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-4}}_{\text{Parte regular}}$$

Ejemplo:

Determinar la serie de Laurent de la función $f(z) = z^2 \cdot e^{\frac{1}{z}}$ con centro en $z_0 = 0$.

Tenemos que $f \in H(\mathbb{C} \setminus \{0\}) = H[D^*(0, +\infty)]$

Ademas el desarrollo de Mc-Laurin de e^z es:

$$e^z = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} \Rightarrow e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{z^n}$$

Entonces podemos expresar la función como:

$$f(z) = z^2 \cdot e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \frac{z^2}{z^n} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{z^{n-2}} =$$

$$= \underbrace{z^2 + z + \frac{1}{2}}_{\text{Parte regular}} + \underbrace{\sum_{n \geq 3} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{z^{n-2}}}_{\text{Parte principal}}$$

Si en la parte principal hacemos el cambio $k=n-2$

$\Rightarrow n=k+2$ como $n\geqslant 3 \Rightarrow k+2\geqslant 3 \Rightarrow k\geqslant 1$.

Entonces:

$$\sum_{n\geqslant 3} \frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{z^{n-2}} = \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{(k+2)!}\cdot\frac{1}{z^k}$$

Podemos expresar entonces la función $f(z)$ expresada en su serie de Laurent como:

$$f(z) = z^2+z+\frac{1}{2}+\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{(k+2)!}\cdot\frac{1}{z^k}$$

Ejemplo: desarrollo en coronas concéntricas diferentes.

Se trata de determinar todas las series de Laurent de la función $f(z)=\dfrac{1}{z^3-z^4}$ con centro en 0.

Se tiene que $f(z)=\dfrac{1}{z^3(z-1)} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}-\{0,1\})$

Vamos a distinguir dos casos:

a) Que $|z|<1 \Leftrightarrow z\in A(0;0,1)$ Entonces:

$$\frac{1}{z^3(1-z)} = \frac{1}{z^3}\cdot\frac{1}{1-z} = \frac{1}{z^3}\sum_{n\geqslant 0} z^n = \sum_{n\geqslant 0} z^{n-3} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{z^3(1-z)} = \sum_{n \geq 0} z^{n-3} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \sum_{n \geq 3} z^{n-3}$$

Si hacemos el cambio $k = n-3$ al ser $n \geq 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow n = k+3 \geq 3 \Rightarrow k \geq 0$ y podemos poner:

$$\frac{1}{z^3(1-z)} = \underbrace{\frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z}}_{\text{Parte principal}} + \underbrace{\sum_{k \geq 0} z^k}_{\text{Parte regular}}$$

b) Supongamos que $|z| > 1 \Leftrightarrow z \in A(0; 1, +\infty)$. Si descomponemos la fracción $\dfrac{1}{z^3(1-z)}$ en fracciones simples

$$\frac{1}{z^3(1-z)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z^3} + \frac{D}{1-z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z^3(1-z)} = \frac{Az^2(1-z) + Bz(1-z) + C(1-z) + Dz^3}{z^3(1-z)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Az^2(1-z) + Bz(1-z) + C(1-z) + Dz^3 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} -A+D=0 \\ A-B=0 \\ B-C=0 \\ C=1 \end{array}\right\} \Rightarrow A = B = C = D = 1.$$

Luego:

$$\frac{1}{z^3(1-z)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{1-z}$$ y la serie de Laurent

tán solo tiene parte principal, su parte regular es nula.

Ejemplo (uso de fracciones simples)

Encontrar todas las series de Laurent de la

función $f(z) = \dfrac{-2z+3}{z^2-3z+2}$ centradas en $z_0 = 0$.

$z^2 - 3z + 2 = 0 \Rightarrow z = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \begin{smallmatrix} \nearrow 2 \\ \searrow 1 \end{smallmatrix}$ Entonces

$f \in H(\mathbb{C} - \{1,2\})$

Si descomponemos $\dfrac{-2z+3}{z^2-3z+2}$ en fracciones simples:

$$-\frac{2z+3}{z^2-3z+2} = \frac{-2z+3}{(z-1)(z-2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-2z+3}{(z-1)(z-2)} = \frac{A(z-2)+B(z-1)}{(z-1)(z-2)} \Rightarrow \begin{cases} A+B = -2 \\ -2A-B = 3 \end{cases}$$

$$-A = 1 \Rightarrow A = -1$$

$\Rightarrow B = -1$

Luego

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z}$$

Si suponemos que es $|z|<1$ podemos poner:

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} z^n - \frac{1}{2\left(1-\frac{z}{2}\right)} = \sum_{n\geq 0} z^n - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$$

Al ser $|z|<1 \Rightarrow \left|\frac{z}{2}\right|<1$ y por tanto:

$$\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \sum_{n\geq 0}\left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{2^n}$$. Por tanto:

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} z^n - \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{2^n} \Rightarrow f(z) = \sum_{n\geq 0} z^n - \sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{2^{n+1}}$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n\geq 0}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)\cdot z^n$$ siendo $|z|<1$. La serie de Laurent tan sólo tiene parte regular, la parte principal es nula.

Veamos ahora el caso de que $z \in A(0;1,2)$, o lo que es equivalente, que $1<|z|<2$. Entonces se verifica que $\frac{1}{2} < \left|\frac{z}{2}\right| < 1$ y como $f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{z}{2}\right)}$

tenemos que si $z \in A(0;1,2)$

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2}\cdot\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2^{n+1}}\cdot z^n \quad \text{con } |z|<2$$

Pero también podemos poner esto como

$$f(z) = -\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \sum_{n\geq 0}\frac{1}{2^{n+2}}\cdot z^n$$

como $1<|z|<2 \Rightarrow \frac{1}{|z|}<1 \Rightarrow \left|\frac{1}{z}\right|<1$ y por tanto $\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{z^n}$ con lo que:

$$f(z) = \underbrace{-\sum_{n\geq 0}\frac{1}{z^{n+1}}}_{\text{Parte principal}} - \underbrace{\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2^{n+1}}\cdot z^n}_{\text{parte regular}} \quad \text{con } 1<|z|<2$$

El único caso que nos queda es $z\in A(0;2,+\infty)$

Como $|z|>2 \Rightarrow \frac{1}{|z|} = \left|\frac{1}{z}\right| < \frac{1}{2} < 1$. Por tanto

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = \frac{-1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{\frac{2}{z}-1}$$

Como $\left|\frac{2}{z}\right| < 1$ ya que $|z| < 2$:

$$f(z) = -\frac{1}{z} \cdot \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{z}\right)^n + \frac{1}{z} \cdot \sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{z^n}$$

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{z^{n+1}} - \sum_{n \geq 0} \frac{1}{z^{n+1}} \Rightarrow$$

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \left(2^n - 1\right) \cdot \frac{1}{z^{n+1}} \quad \text{para } |z| > 2$$

la serie de Laurent tan sólo tiene parte principal. su parte regular es cero.

SINGULARIDADES Y CEROS

Diremos que $z_0 \in \mathbb{C}$ es una singularidad aislada si existe $\delta > 0$ tal que $f \in \mathcal{H}(D^*(z_0, \delta))$, lo cual implica que f admite un desarrollo en serie de Laurent, es decir que $\exists\, a_n, b_n \in \mathbb{C}$ tal que

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n \geq 1} b_n \cdot \frac{1}{(z - z_0)^n} \quad \forall z \in D^*(z_0, \delta)$$

Usando series de Laurent distinguimos tres tipos de singularidades aisladas.

1) Diremos que $z_0 \in \mathbb{C}$ es una singularidad evitable si la parte principal de la serie de Laurent es nula

2) Diremos que $z_0 \in \mathbb{C}$ es una singularidad tipo polo (o simplemente polo) si la parte principal de la serie de Laurent tiene una cantidad finita de sumandos, es decir que la parte principal será de la forma:

$$\frac{b_1}{z-z_0} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \cdots + \frac{b_m}{(z-z_0)^m} \quad \text{con } b_i \neq 0 \quad i=1 \dots m.$$

Al número m se le llama orden del polo

3) Diremos que z_0 es una singularidad esencial si la parte principal de la serie de Laurent tiene infinitos términos.

Ejemplo:

Clasificar las singularidades de las siguientes funciones:

(i) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z}$

Se tiene que $f \in H(\mathbb{C} \setminus \{0\}) = H(D^*(0,+\infty))$

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z} = \frac{1}{z} \cdot \operatorname{sen} z = \frac{1}{z} \cdot \sum_{n \geq 0} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{si } z \in D^*(0,+\infty)$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \cdot \frac{z^n}{(2n+1)!} \quad \text{si } |z| > 0 \text{. Entonces}$$

$z_0 = 0$ es una singularidad evitable

(ii) $g(z) = \dfrac{e^z}{z+1}$. $\qquad g \in H(\mathbb{C} \setminus \{-1\})$

$$\frac{e^z}{z+1} = \frac{1}{z+1} \cdot e^z = e^{-1} \cdot \frac{1}{z+1} \cdot e^{z+1} = e^{-1} \cdot \frac{1}{z+1} \cdot \sum_{n \geq 0} \frac{(z+1)^n}{n!}$$

$$\text{con } z \neq -1 \quad = e^{-1} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} (z+1)^{n-1} \quad \text{con } z \neq -1$$

Luego:

$$g(z) = \underbrace{\frac{e^{-1}}{z+1}}_{\text{parte principal}} + \underbrace{e^{-1} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)!} (z+1)^n}_{\text{Parte regular}}$$

$z = -1$ es polo de orden 1.

4.6 Singularidades y ceros

Diremos que $z_0 \in \mathbb{C}$ es una singularidad aislada si existe $\delta > 0$ tal que $f \in \mathcal{H}(D^*(z_0, \delta))$

$\Downarrow$ Admite serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n \geq 1} b_n \frac{1}{(z-z_0)^n} \quad \text{si } z \in D^*(z_0, \delta)$$

Usando las series de Laurent distinguiremos tres tipos de singularidades aisladas

(1) Diremos que z_0 es una singularidad evitable si la parte principal de la serie de Laurent es nula.

(2) Diremos que z_0 es una singularidad tipo polo (o polo) si la parte principal de la serie de Laurent tiene una cantidad finita de sumandos, entonces la parte principal será de la forma:

$$\frac{b_1}{z-z_0} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \cdots + \frac{b_m}{(z-z_0)^m} \quad \text{con } b_m \neq 0$$

Al número m se le llama orden del polo

(3) Diremos que z_0 es una singularidad esencial si la parte principal de la serie de Laurent tiene infinitos términos

Ejemplo:

Clasificar las singularidades de las siguientes funciones:

(i) $f(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)}{z} \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0\}) = \mathcal{H}(D^*(0,+\infty))$

$$= \frac{\operatorname{sen} z}{z} = \frac{1}{z} \operatorname{sen} z = \frac{1}{z} \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{si } z \in D^*(0,+\infty)$$

$$= \underbrace{\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}}_{\text{parte regular}} \quad \text{si } |z|>0$$

Es una singularidad evitable

$g(z) = \frac{e^z}{z+1} \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{-1\})$

$$\frac{e^z}{z+1} = \frac{1}{z+1} e^{z+1-1} = e^{-1} \frac{1}{z+1} e^{z+1} =$$

$$= e^{-1} \frac{1}{z+1} \sum_{n\geq 0} \frac{(z+1)^n}{n!} \quad \text{en } z \neq -1$$

$$= e^{-1} \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} (z+1)^{n-1} \quad \text{en } |z+1|>0 = \frac{e^{-1}}{z+1} + e^{-1} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!} (z+1)^{n-1}$$

$$\text{en } |z+1|>0 = \underbrace{\frac{e^{-1}}{z+1}}_{\text{p. principal}} + \underbrace{e^{-1} \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)!} (z+1)^n}_{\text{p. regular}}$$

$\Rightarrow$ polo de orden 1

Teorema de caracterización de singularidades

Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ y $f \in H[D^*(z_0, \delta)]$ para un $\delta > 0$. Entonces se verifica:

(i) z_0 es una singularidad evitable si $\exists \lim_{z \to z_0} f(z)$

Definimos la función:

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in D^*(z_0, \delta) \\ \lim_{z \to z_0} f(z) & \text{si } z = z_0 \end{cases}$$

Esta extensión de f verifica que $\tilde{f} \in H[D(z_0, \delta)]$

(ii) z_0 es una singularidad tipo polo si $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$

Además el polo es de orden m si:

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m \cdot f(z) \notin \{0, \infty\}$$

(iii) z_0 es una singularidad esencial si $\nexists \lim_{z \to z_0} f(z)$

Ejemplos:

1º $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z}$ tiene una singularidad en $z_0 = 0$.

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\operatorname{sen} z}{z} \underset{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{z \to z_0} \cos z = 1.$$

La extensión de f es:

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} z}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ 1 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

Entonces $\tilde{f}(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$

2º $f(z) = \dfrac{e^z}{z+1}$ tiene una singularidad en $z_0 = -1$.

$$\lim_{z \to -1} \frac{e^z}{z+1} = \frac{e^{-1}}{0} = +\infty$$

$$\lim_{z \to -1} (z+1)^1 \cdot \frac{e^z}{z+1} = e^{-1} \notin \{0, +\infty\} \Rightarrow z_0 = -1$$ es

un polo de orden 1.

3º $f(z) = \dfrac{1}{z} \cos \dfrac{1}{z}$ tiene una singularidad esencial

en $z_0 = 0$

$$\nexists \lim_{z \to 0} \frac{1}{z} \cos \frac{1}{z}$$

<u>Ceros de funciones holomorfas</u>

Sea $f \in \mathcal{H}(D)$. Se dice que $z_0 \in D$ es un cero de f si $f(z_0) = 0$.

Diremos que $z_0 \in D$ es un cero de orden n si:

$$f(z_0)\,f'(z_0) = 0 = f''(z_0) = \cdots = f^{(n-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(n)}(z_0) \neq 0.$$

Ejemplo:

$$f(z) = 1 + z^2 = 0 \Rightarrow z^2 = -1 \Rightarrow z = \pm i$$

$f'(z) = 2z \Rightarrow f'(i) \neq 0 \quad f'(-i) \neq 0$. Los ceros $z = \pm i$ son de orden 1.

<u>Teorema</u>: Sea $h(z) = \dfrac{f(z)}{g(z)}$ un cociente de funciones holomorfas en $A(z_0; r, R)$. Sea $z_0 \in A(z_0; r, R)$ el único cero de g en ese anillo. Entonces h es holomorfa en $A(z_0; r, R)$ y por tanto admite una serie de Laurent centrada en z_0. La serie de Laurent de h tiene la forma:

$$h(z) = \sum_{m \geq 0} a_m \cdot (z - z_0)^m \cdot \frac{1}{(z - z_0)^r} \cdot \sum_{n \geq 0} b_n (z - z_0)^n$$

donde z_0 es un cero de orden r de $g(z)$, $\sum_{m \geq 0} a_m (z - z_0)^m$ es el desarrollo de Taylor de f en $z = z_0$, $\sum_{n \geq 0} b_n (z - z_0)^n$ es el desarrollo de Taylor de la función $1/G(z)$ donde $G(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^r}$