TEMA 3: INTEGRACIÓN COMPLEJA

El desarrollo de funciones de variable compleja sigue un camino muy distinto al usado en funciones de variable real. Esto reside en el hecho de la particularidad de las funciones de variable compleja: si una función de variable compleja es derivable en un punto entonces es infinitamente derivable en ese punto, cosa que no ocurre con funciones de variable real.

Nuestro objetivo es definir la integral curvilínea de una función compleja pero es conveniente definir previamente la integral definida de una función compleja.

<u>Definición de curva en el conjunto $\mathbb{C}$</u>

Una curva C en el conjunto de los números complejos es una función en la forma:

$$z : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$t \longmapsto z(t)$$

Dada la curva compleja $z(t) = u(t) + i \cdot v(t)$ se define la integral de $z(t)$ como:

$$\int_a^b z(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt$$

La posibilidad de que $z(t)$ sea integrable o no lo sea dependerá de que tambien lo sean las funciones $u(t)$ y $v(t)$.

Si $z(t)$ es un camino (curva continua de clase C^1 a trozos) entonces existen las integrales $\int_a^b u(t)\,dt$ y $\int_a^b v(t)\,dt$. Veamos qué quiere decir que $z(t)$ es un camino.

<u>Definición</u> <u>de</u> <u>camino</u> o <u>curva</u> <u>de</u> <u>clase</u> <u>C^1 a trozos</u>

La curva continua $z: [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ es un camino o curva de clase C^1 a trozos si existe una partición de $[a,b]$, $P = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_K = b\}$ tal que $z: [t_i, t_{i+1}] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ es de clase C^1 en $[t_i, t_{i+1}]$ $\forall i = 0, 1, \dots k-1$

Proposición: Sea $z : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ una curva de clase $\mathcal{C}^1$ en $[a,b]$. Entonces z es un camino.

Dem:

Sea $P = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k = b\}$ una partición cualquiera de $[a,b]$. Si $z : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ es de clase $\mathcal{C}^1$

$\Rightarrow z : [t_i, t_{i+1}] \subset [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ es de clase $\mathcal{C}^1 \ \forall i = 0, \dots k-1$

$\Rightarrow z$ es un camino.

Ejemplo: calcular $\displaystyle\int_0^1 (1+it)^2 dt = \int_0^1 (1-t^2) + 2ti \, dt =$

$$= \int_0^1 (1-t^2)\, dt + 2i \int_0^1 t\, dt = \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 + \left[it^2 \right]_0^1 = \frac{2}{3} + i$$

Propiedades de la integral compleja

De la definición y de las propiedades de la integral definida de funciones reales de variable real, se deducen las siguientes propiedades

1ª Sea $z : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$

$t \longmapsto z(t) = u(t) + i \cdot v(t)$ una curva.

Entonces:
$$\int_a^b z(t)\, dt = -\int_b^a z(t)\, dt$$

Demostración:

Tenemos que $\int_a^b z(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + i\cdot\int_a^b v(t)\,dt$.

Al ser $u, v : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones reales de variable real, se verifica que:

$$\int_a^b u(t)\,dt = -\int_b^a u(t)\,dt \quad ; \quad \int_a^b v(t)\,dt = -\int_b^a v(t)\,dt$$

Luego:

$$\int_a^b z(t)\,dt = -\left[\int_b^a u(t)\,dt + i\cdot\int_b^a v(t)\,dt\right] = -\int_b^a z(t)\,dt$$

2ª) Sean $z_1, z_2 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ dos caminos. Entonces:

$$\int_a^b [z_1(t) + z_2(t)]\,dt = \int_a^b z_1(t)\,dt + \int_a^b z_2(t)\,dt$$

Demostración:

Sean $z_1(t) = u_1(t) + iv_1(t)$; $z_2(t) = u_2(t) + iv_2(t)$.

Luego $z_1(t) + z_2(t) = [u_1(t) + u_2(t)] + i\cdot[v_1(t) + v_2(t)] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_a^b [z_1(t) + z_2(t)]\,dt = \int_a^b [u_1(t) + u_2(t)]\,dt + i\cdot\int_a^b [v_1(t) + v_2(t)]\,dt$$

Al ser $u_1(t) + u_2(t)$, $v_1(t) + v_2(t)$ funciones reales de variable real

$$\int_a^b [u_1(t)+u_2(t)]\,dt = \int_a^b u_1(t)\,dt + \int_a^b u_2(t)\,dt$$

$$\int_a^b [v_1(t)+v_2(t)]\,dt = \int_a^b v_1(t)\,dt + \int_a^b v_2(t)\,dt$$

Luego:

$$\int_a^b [z_1(t)+z_2(t)]\,dt = \int_a^b u_1(t)dt + \int_a^b u_2(t)\,dt + i\cdot\int_a^b v_1(t)dt + i\cdot\int_a^b v_2(t)dt$$

$$= \int_a^b z_1(t)\,dt + \int_a^b z_2(t)\,dt$$

3ª Si k es constante $\int_a^b k\cdot z(t)\,dt = k\cdot\int_a^b z(t)dt, \forall k\in\mathbb{C}$

4ª) Si $a \le c \le b$ y $z:[a,b]\longrightarrow \mathbb{C}$, es un camino, entonces:

$$\int_a^b z(t)\,dt = \int_a^c z(t)\,dt + \int_c^b z(t)\,dt$$

Demostración:

Sea $z(t) = u(t) + i\cdot v(t)$ $\qquad u, v:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C

Entonces $\int_a^b z(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\cdot\int_a^b v(t)\,dt$. Al ser u y v

funciones reales de variable real:

$$\int_a^b u(t)\,dt = \int_a^c u(t)\,dt + \int_c^b u(t)\,dt$$

$$\int_a^b v(t)\,dt = \int_a^c v(t)\,dt + i\cdot\int_c^b v(t)\,dt$$, por tanto:

$$\int_a^b z(t)\,dt = \int_a^c u(t)\,dt + \int_c^b u(t)\,dt + i\cdot\int_a^c v(t)\,dt + i\cdot\int_c^b v(t)\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^b z(t)\,dt = \left[\int_a^c u(t)\,dt + i\cdot\int_a^c v(t)\,dt\right] + \left[\int_c^b u(t)\,dt + i\cdot\int_c^b v(t)\,dt\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^b z(t)\,dt = \int_a^c z(t)\,dt + \int_c^b z(t)\,dt$$

5ª) $$\operatorname{Re}\int_a^b z(t)\,dt = \int_a^b \operatorname{Re}(z(t))\,dt$$

$$\operatorname{Im}\int_a^b z(t)\,dt = \int_a^b \operatorname{Im}[z(t)]\,dt$$

<u>Dem</u>: es trivial.

6ª) Sea $z:[a,b]\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ una curva y sea

$\phi:[a,b]\longrightarrow\mathbb{C}$ una función que verifica que

$\phi'(t)=z(t)\quad\forall t\in[a,b]$. Entonces:

$$\int_a^b z(t)\,dt=\phi(b)-\phi(a)$$

Demostración.

Supongamos que $z(t)=u(t)+i\cdot v(t)$
$\phi(t)=\phi_1(t)+i\cdot\phi_2(t)$ donde

$u,v,\phi_1,\phi_2:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ son funciones reales de variable real.

Al ser $\phi'(t)=z(t)\ \forall t\in[a,b]\Rightarrow\phi_1'(t)+i\cdot\phi_2'(t)=u(t)+i\cdot v(t)\Rightarrow$

$\Rightarrow\phi_1'(t)=u(t)\ \forall t\in[a,b],\ \phi_2'(t)=v(t)\ \forall t\in[a,b]$.

Por la regla de Barrow para variable real:

$$\int_a^b u(t)\,dt=\phi_1(b)-\phi_1(a),\quad\int_a^b v(t)\,dt=\phi_2(b)-\phi_2(a).$$

Luego:

$$\int_a^b z(t)\,dt=\int_a^b u(t)\,dt+i\cdot\int_a^b v(t)\,dt=(\phi_1(b)-\phi_1(a))+i[\phi_2(b)-\phi_2(a)]$$

es decir que:

$$\int_a^b z(t)\,dt = \phi_1(b)+i\cdot\phi_2(b) - [\phi_1(a)+i\cdot\phi_2(a)] = \phi(b)-\phi(a)$$

7ª) Sea $z:[a,b]\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ una curva continua

Entonces:

$$\left|\int_a^b z(t)\,dt\right| \le \int_a^b |z(t)|\,dt$$

<u>Demostración</u>:

La integral $\int_a^b z(t)\,dt$ es un número imaginario que tendrá un módulo R y un argumento θ de manera que podemos poner:

$$\int_a^b z(t)\,dt = R\cos\theta + iR\,\text{sen}\,\theta = R(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) = R\cdot e^{i\theta}$$

Entonces:

$\left|\int_a^b z(t)\,dt\right| = R = e^{-i\theta}\int_a^b z(t)\,dt = \int e^{-i\theta} z(t)\,dt$. Luego la integral $\int e^{-i\theta} z(t)\,dt$ es un número real con lo que:

$$\left|\int_a^b z(t)\,dt\right| = Re\int_a^b e^{-i\theta} z(t)\,dt = \int_a^b Re(e^{-i\theta} z(t))\,dt \le \int_a^b |z(t)|\,dt$$

Opuesto de un camino

Se llama camino opuesto al camino $z:[a,b]\to\mathbb{C}$, a otro camino que lo denotamos por $-z:[-b,-a]\to\mathbb{C}$ y que está definido por:

$(-z)(t)=z(-t)$. El camino opuesto recorre la curva en sentido contrario al sentido en que la recorre el camino original.

Ejemplo:

Si consideramos el camino
$$\begin{aligned} z:[0,1] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto z(t)=it \end{aligned}$$

en realidad el camino es el conjunto

$$C_1=\{it \,/\, t\in[0,1]\}$$

El camino opuesto a C_1 se obtiene cambiando el sentido de recorrido del anterior, sería:

$$C_2=\{-it \,/\, -1\le t\le 0\}$$

Un camino está caracterizado por su parametrización, de modo que un mismo camino puede ser representado por distintas parametrizaciones. Veamos esto con un ejemplo:

Sea el camino $z : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$

$$t \longmapsto z(t) = e^{it} \Rightarrow$$

$\Rightarrow z(t) = \cos t + i \operatorname{sen} t$. Llamamos:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{Re} z(t) = x(t) = \cos t \\ \operatorname{Im} z(t) = y(t) = \operatorname{sen} t \end{array}\right\} \Rightarrow x^2(t) + y^2(t) = 1.$$

El camino lo podríamos definir como uno de los siguientes conjuntos:

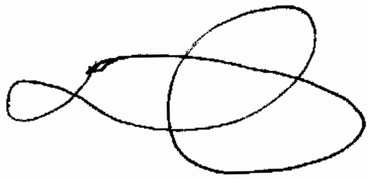
$$C = \{ (x(t), y(t)) \,/\, x^2(t) + y^2(t) = 1, \; t \in [0, 2\pi] \} =$$

$= \{ \cos t + i \operatorname{sen} t \,/\, t \in [0, 2\pi] \}$, en ambos casos se trata de una circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 1.

Curvas cerradas

Diremos que la curva $z : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ es cerrada si verifica que $z(a) = z(b)$.

Diremos que la curva $z:[a,b]\longrightarrow \mathbb{C}$ es <u>simple</u> si no tiene autointersecciones (i.e. que no se toca así misma) a excepción de los puntos inicial y final si fuera cerrada.


curva no simple

Las curvas cerradas y simples son las más importantes en el cálculo complejo. A estas curvas se les llama <u>curvas de Jordan</u>.

<u>Orientación de una curva</u>

Sea $z:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$ una curva de Jordan. Diremos que $z(t)$ tiene una orientación positiva si se recorre la gráfica en sentido contrario al giro de las manecillas del reloj (a esta orientación también se le llama orientación antihoraria). Si no se especifica lo contrario se supone que estamos utilizando la orientación antihoraria.

Curvas regulares

Dada la curva $z:[a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ diremos que es regular si es de clase C^1 y $\forall t \in [a,b], z'(t) \neq 0$

Curvas regulares a trozos

Se dice que la curva $z:[a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ es regular a trozos si existe una partición del intervalo $[a,b]$

$P = \{t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b\}$ tal que

$z:[t_i, t_{i+1}] \longrightarrow \mathbb{C}$ es regular $\forall i = 0,1,\dots n-1$.

Las curvas que utilizaremos en integración compleja serán regulares a trozos.

INTEGRALES DE LINEA EN EL CAMPO COMPLEJO

Sea C una curva regular a trozos parametrizada por el camino

$$\begin{aligned} z : [a,b] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\rightsquigarrow z(t). \end{aligned}$$

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio tal que $C \subset \Omega$ siendo $C = \{z(t) \,/\, a \leq t \leq b\}$

Sea $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua en Ω.

Definimos la integral de f a lo largo de la curva C como el número complejo:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t)\,dt$$

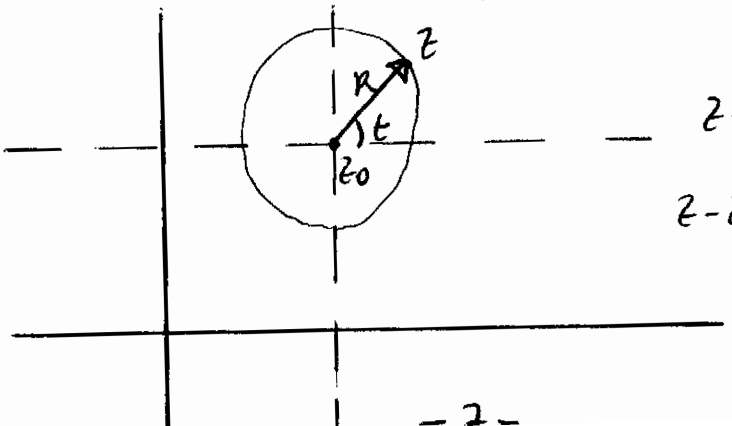
Si la curva C es cerrada se suele escribir:

$$\int_C f(z)dz = \oint f(z)dz$$

Veamos un ejemplo antes de proseguir:

Sea $f(z) = (z-z_0)^m$ donde $m \in \mathbb{Z}$ y $z_0 \in \mathbb{C}$. Se trata de integrar esta función a lo largo de la circunferencia de centro z_0 y radio R. La parametrización de la circunferencia de centro z_0 y radio R es:

$C \equiv \{ z_0 + R \cdot e^{it} \,/\, t \in [0, 2\pi] \}$. Veamos el porqué esto es así:



$$z - z_0 = R\cos t + i \cdot R \operatorname{sen} t$$

$$z - z_0 = R(\cos t + i \operatorname{sen} t)$$

$$z - z_0 = R e^{it}$$

$$z = z_0 + R \cdot e^{it}$$

En la parametrización hemos puesto que $t \in [0, 2\pi]$ para limitarnos tan sólo a la primera vuelta.

La función $f(z) = (z-z_0)^m = (z_0 + R \cdot e^{it} - z_0)^m = R^m \cdot e^{imt}$ y la derivada del camino de Jordan $z(t)$ vale:

$z'(t) = i \cdot R\, e^{it}$. Por tanto la integral que nos piden vale:

$$\oint_c (z-z_0)^m dz = \int_0^{2\pi} R^m \cdot e^{imt} \cdot i \cdot R \cdot e^{it} dt = iR^{m+1} \int_0^{2\pi} e^{i(m+1)t} dt$$

$$= i \cdot R^{m+1} \cdot \int_0^{2\pi} \cos(m+1)t + i \operatorname{sen}(m+1)t \; dt =$$

$$= -R^{m+1} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(m+1)t \, dt + i \cdot R^{m+1} \int_0^{2\pi} \cos(m+1)t \, dt =$$

$$\overset{(*)}{=} \left[\frac{R^{m+1}}{m+1} \cos(m+1)t + i \cdot \frac{R^{m+1}}{m+1} \operatorname{sen}(m+1) \cdot t \right]_0^{2\pi} = 0$$

(*) La integral $\int \operatorname{sen}(m+1) \cdot t\, dt$ y $\int \cos(m+1)t\, dt$ se hacen por cambio de variable. Recordemos este método:

• $\int \operatorname{sen}(m+1)t\,dt \quad \left\{\begin{array}{l} u=(m+1)t \\ du=(m+1)dt \\ dt=\dfrac{1}{m+1}du \end{array}\right\} = \int \operatorname{sen} u \cdot \dfrac{1}{m+1}\,du =$

$= \dfrac{1}{m+1}\int \operatorname{sen} u\,du = \dfrac{-1}{m+1}\cos u = -\dfrac{1}{m+1}\cos(m+1)\cdot t$

• $\int \cos(m+1)t\,dt = \int \cos u \cdot \dfrac{1}{m+1}\,du = \dfrac{1}{m+1}\int \cos u\,du = \dfrac{1}{m+1}\operatorname{sen} u =$

$= \dfrac{1}{m+1}\cdot \operatorname{sen}(m+1)\cdot t$

Propiedades que verifican las integrales de línea.

1ª $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ $\quad \forall\ z:[a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ camino de Jordan con parametrización $C = \{z(t) \,/\, t\in[a,b]\}$, $C \subset \Omega$ dominio en $\mathbb{C}$, $f, g: \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ continuas en Ω se verifica:

$\int_C [\alpha f(z) + \beta g(z)]\,dz = \alpha\int_C f(z)\,dz + \beta\int_C g(z)\,dz$. A esta propiedad se le conoce con el nombre de linealidad.

Demostración:

$\int_C [\alpha f(z)+\beta g(z)]\,dz = \int_a^b [\alpha f(z)+\beta g(z)]\cdot z'(t)\,dt =$

$\int_a^b \alpha \cdot f(z) \cdot z'(t)\, dt + \int_a^b \beta\, g(z) \cdot z'(t)\, dt$. Como estas dos integrales ya no son de línea, son tan sólo integrales complejas, según las propiedades vistas:

$$\int_a^b \alpha f(z(t)) \cdot z'(t)\, dt + \int_a^b \beta \cdot g(z(t)) \cdot z'(t)\, dt =$$

$$\alpha \cdot \int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t)\, dt + \beta \cdot \int_a^b g(z(t)) \cdot z'(t)\, dt =$$

$$= \alpha \int_C f(z)\, dz + \beta \int_C g(z)\, dz .$$

Definición de caminos equivalentes

Todo camino lleva asociado una partición, en donde es de clase $\mathcal{C}^1$ en el subintervalo. De forma mas clara:

Si $z : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ es un camino existe una partición (llamada partición asociada):

$P = \{ t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_K = b \}$ tal que

$z : [t_i, t_{i+1}] \subset [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ es de clase $\mathcal{C}^1$ en $[t_i, t_{i+1}]$

$\bullet \displaystyle\int \operatorname{sen}(m+1)t\,dt \left\{\begin{array}{l} u=(m+1)t \\ du=(m+1)dt \\ dt=\dfrac{1}{m+1}du \end{array}\right\} = \int \operatorname{sen} u \cdot \frac{1}{m+1}\,du =$

$= \dfrac{1}{m+1}\displaystyle\int \operatorname{sen} u\,du = \frac{-1}{m+1}\cos u = -\frac{1}{m+1}\cos(m+1)\cdot t$

$\bullet \displaystyle\int \cos(m+1)t\,dt = \int \cos u \cdot \frac{1}{m+1}\,du = \frac{1}{m+1}\int \cos u\,du = \frac{1}{m+1}\operatorname{sen} u =$

$= \dfrac{1}{m+1}\cdot \operatorname{sen}(m+1)\cdot t$

Propiedades que verifican las integrales de linea.

1ª $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ $\forall$ $z:[a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ camino de Jordan con parametrización $C=\{z(t) / t\in[a,b]\}$, $C\subset \Omega$ dominio en $\mathbb{C}$, $f,g: \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ continuas en Ω se verifica:

$\displaystyle\int_C [\alpha f(z)+\beta g(z)]\,dz = \alpha\int_C f(z)\,dz + \beta\int_C g(z)\,dz$. A esta propiedad se le conoce con el nombre de linealidad.

Demostración:

$\displaystyle\int_C [\alpha f(z)+\beta g(z)]\,dz = \int_a^b [\alpha f(z)+\beta g(z)]\cdot z'(t)\,dt =$

$$\int_a^b \alpha \cdot f(z) \cdot z'(t)\, dt + \int_a^b \beta\, g(z) \cdot z'(t)\, dt$$

. Como estas dos integrales ya no son de línea, son tan sólo integrales complejas, según las propiedades vistas:

$$\int_a^b \alpha f(z(t)) \cdot z'(t)\, dt + \int_a^b \beta \cdot g(z(t)) \cdot z'(t)\, dt =$$

$$\alpha \cdot \int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t)\, dt + \beta \cdot \int_a^b g(z(t)) \cdot z'(t)\, dt =$$

$$= \alpha \int_C f(z)\, dz + \beta \int_C g(z)\, dz .$$

Definición de caminos equivalentes

Todo camino lleva asociado una partición, en donde es de clase C^1 en el subintervalo. De forma mas clara:

Si $z : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ es un camino existe una partición (llamada partición asociada):

$P = \{ t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_k = b \}$ tal que

$z : [t_i, t_{i+1}] \subset [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ es de clase C^1 en $[t_i, t_{i+1}]$

Sean $z_1 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ y $z_2 : [c,d] \longrightarrow \mathbb{C}$ dos caminos. Se dice que z_1 es equivalente a z_2 y escribimos $z_1 \sim z_2$ si tienen el mismo número de puntos singulares y verifican la siguiente condición: si $P = \{t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b\}$ es la partición asociada a z_1 y $Q = \{s_0 = c < s_1 < \dots < s_n = d\}$ es la partición asociada a z_2 existe una aplicacion biyectiva:

$$\tau : [t_{i-1}, t_i] \longrightarrow [s_{j-1}, s_j] \quad \forall i,j = 1, \dots n$$

$\tau'(t) > 0 \quad \forall\, t \in [t_{i-1}, t_i]$ tal que $z_1 = z_2 \circ \tau$ (es lo mismo que poner $z_2 = \tau^{-1} \circ z_1$)

Por ejemplo los caminos:

$$\left.\begin{array}{l} z_1 : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z_1(t) = e^{it} \\ z_2 : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z_2(t) = e^{2it} \end{array}\right\} \text{ son equivalentes.}$$

si $P = \{t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = 2\pi\}$ es la partición asociada a z_1 y $Q = \{s_0 = 0 < s_1 < \dots < s_n = \pi\}$ es la partición asociada a z_2, $\forall i,j = 1, \dots n$ definimos la aplicación $\tau : [t_{i-1}, t_i] \longrightarrow [s_{j-1}, s_j]$ como:

$\tau(t) = 2t$. Entonces:

τ es biyectiva y $\tau'(t) = 2 > 0 \quad \forall t \in [0, 2\pi]$

Además $z_2 = z_1 \circ \tau$ ya que:

$z_2(t) = e^{2it} = (z_1 \circ \tau)(t) = z_1(\tau(t)) = z_1(2t) = e^{i \cdot 2t}$

Continuamos con las propiedades.

2ª) Si $z_1 \sim z_2$ son caminos equivalentes entonces

$\int_{c_1} f(z_1) dz_1 = \int_{c_2} f(z_2) dz_2$ donde c_1 y c_2 son

las parametrizaciones de los caminos z_1 y z_2.

Demostración:

Si P y Q son las particiones asociadas a z_1 y z_2 respectivamente $\forall i, j = 1, \dots n$ sabemos que existe una biyección $\tau : [t_{i-1}, t_i] \longrightarrow [s_{j-1}, s_j]$ donde $t_i \in P \quad \forall i = 1 \dots n \qquad s_j \in Q \quad \forall j = 1 \dots n$. de forma que $z_1 = z_2 \circ \tau$

Según la regla de la cadena:

$$z_1'(t) = z_2'(\tau(t)) \cdot \tau'(t).$$

$$z_1 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z_2 : [c,d] \longrightarrow \mathbb{C}$$

Por definición tenemos que:

$\int_{C_1} f(z_1)\, dz_1 = \int_a^b f(z_1(t)) \cdot z_1'(t)\, dt$. Si hacemos el cambio de variable:

$$s = \tau(t) \Rightarrow ds = \tau'(t)\, dt$$

$$\begin{tikzcd} {[a,b]} \arrow[r, "\tau"] \arrow[rr, bend right, "z_2 \circ \tau"'] & {[c,d]} \arrow[r, "z_2"] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

Nos queda:

$$\int_{C_1} f(z_1)\, dz_1 = \int_a^b f(z_1(t)) \cdot z_1'(t)\, dt = \int_a^b f\big(z_2(\tau(t))\big) \cdot z_1'(t)\, dt$$

$$= \int_a^b f(z_2(\tau(t))) \cdot z_2'(\tau(t)) \cdot \tau'(t)\, dt = \int_c^d f(z_2(s)) \cdot z_2'(s)\, ds$$

$$= \int_{C_2} f(z_2)\, dz_2$$

Unión de caminos (Suma de caminos)

Sean los caminos

$z_1 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\quad z_2 : [b,c] \longrightarrow \mathbb{C}$ tales que

$z_1(b) = z_2(b)$. Se define la unión o suma de los caminos z_1 y z_2 como:

$$(z_1 \cup z_2)(t) = (z_1 + z_2)(t) = \begin{cases} z_1(t) \text{ si } t \in [a,b] \\ z_2(t) \text{ si } t \in [b,c] \end{cases}$$

Esta definición puede generalizarse para la suma de n-caminos $z_1 + z_2 + \cdots + z_n$. Seguimos ahora con las propiedades de la integral curvilínea.

3ª Sean los caminos

$C_1 = \{ z_1(t) \,/\, a \le t \le b \}$ $\quad C_2 = \{ z_2(t) \,/\, b \le t \le c \}$

$z_1(b) = z_2(b)$. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio tal que $C_1 \subset \Omega$, $C_2 \subset \Omega$ $\quad f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ continua.

Entonces:

$$\int_{C_1 + C_2} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz$$

Demostracion

Si $z_1 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$

$z_2 : [b,c] \longrightarrow \mathbb{C}$ $\quad \Rightarrow z = z_1 + z_2 : [a,c] \longrightarrow \mathbb{C}$

Luego:

$$\int_{C_1+C_2} f(z)\,dz = \int_a^c f(z(t))\cdot z'(t)\,dt = \int_a^b f(z_1(t))\cdot z_1'(t)\,dt +$$

$$+ \int_b^c f(z_2(t))\cdot z_2'(t)\,dt = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz$$

4^a Sea el camino $C = \{ z(t) \,/\, a \le t \le b \}$. El camino opuesto es $-C = \{ z(-t) \,/\, -b \le -t \le a \}$. Entonces:

$$\int_{-C} f(-z)\,dt = -\int_C f(z)\,dz$$

Demostración:

$$\int_{-C} f(z)\,dz = \int_{-b}^{-a} f(z(-t))\,z'(-t)\,dt$$

Si hacemos el cambio de variable $s = -t \Rightarrow$

$a \leq s \leq b$, $ds = -dt$. Luego:

$$\int_{-C} f(z)\,dz = \int_a^b f(z(s)) \cdot z'(s) \cdot (-ds) = -\int_a^b f(z(s)) \cdot z'(s)\,ds =$$

$$= -\int_C f(z)\,dz.$$

Ejemplos:

Calcular $\oint \frac{1}{z}\,dz$ donde C es la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 1.

Sabemos que una parametrización para la circunferencia de centro z_0 y radio R es:

$C \equiv \{ z_0 + R \cdot e^{it} \,/\, t \in [0, 2\pi] \}$. Como $z_0 = 0$ y $R = 1$, una parametrización de la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 1 es:

$$C \equiv \{ e^{it} \,/\, t \in [0, 2\pi] \}$$

Entonces: $z(t) = e^{it} \Rightarrow z'(t) = e^{it} \cdot i$

$$\oint f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} \cdot i \cdot e^{it}\,dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

Otra forma de efectuar la integral anterior es utilizando el camino opuesto.

Consideramos el camino opuesto a $C_1 = \{ e^{it} / t \in [0, 2\pi] \}$

este camino es $-C_1 = C_2 = \{ e^{-it} / t \in [0, 2\pi] \}$

$z(-t) = e^{-it}$ $\quad z'(-t) = -i \cdot e^{-it}$. Entonces:

$$\oint_{C_2} f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} f(e^{-it}) \cdot (-i \cdot e^{-it})\,dt = -i \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{-it}} \cdot e^{-it}\,dt$$

$$\Rightarrow \oint_{C_2} f(z)\,dz = -i \cdot \int_0^{2\pi} dt = -2\pi i.$$

Como:

$$\int_{C_2} f(z)\,dz = \int_{-C_1} f(z)\,dz = -\int_{C_1} f(z)\,dz = -2\pi i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{C_1} f(z)\,dz = 2\pi i$$

También se puede hallar la anterior integral mediante un camino equivalente (también llamado cambio de parámetro)

Tratamos de calcular $\int_c \frac{1}{z}\,dz$ siendo c la circunferencia de centro (0,0) y radio 1.

Tomamos el camino equivalente a C_1

$C_3 = \{ e^{2it} / t \in [0,\pi] \}$. Entonces al ser $C_1 \sim C_3$

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_3} f(z)\,dz = \int_0^{\pi} \frac{1}{e^{2it}} \cdot 2 e^{2it}\,dt = 2i\int_0^{\pi} dt =$$

$$= 2\pi i$$

$z(t) = e^{2it} \Rightarrow z'(t) = 2 \cdot e^{2it}$

LONGITUD DE UN ARCO DE CURVA.

Sea $z: [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ una curva de Jordan. Se define la longitud del arco de curva $z(t)$ en el intervalo $[a,b]$ como:

$$L = \int_a^b |z'(t)|\,dt.$$

Para desarrollar lo que sigue también necesitamos saber lo que es un dominio simplemente conexo

DOMINIO SIMPLEMENTE CONEXO

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto de números complejos. Se dice que Ω es simplemente conexo si verifica la siguiente propiedad:

Si una curva de Jordan C está contenida en Ω entonces el interior de la curva tambien está contenido en Ω.

A los dominios que no son simplemente conexos se les denomina multiplemente conexos.

Sea $C = \{ z(t) \ / \ a \leq t \leq b \}$ una curva de Jordan, $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio simplemente conexo y $C \subset \Omega$. Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función compleja de variable compleja, continua a trozos. Entonces la curva C divide al plano complejo en dos regiones, una de ellas a la que llamaremos interior de C en donde la integral de f a lo largo de C está acotada, a la otra le denominamos exterior de C. De manera más precisa enunciamos el siguiente teorema:

Teorema de la curva de Jordan

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio simplemente conexo, $C = \{z(t) \,/\, a \leq t \leq b\} \subset \Omega$ una curva de Jordan, $f: \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua a trozos. Entonces la integral $\int_C f(z)\,dz$ está acotada, es decir:

$$\exists K \in \mathbb{R} \text{ tal que } \left| \int_C f(z)\,dz \right| \leq K$$

Demostración:

Según una propiedad vista anteriormente, el valor absoluto de una integral es menor o igual que la integral del valor absoluto. Además sabemos que si la función $f(z(t))$ es continua a trozos entonces está acotada, es decir $\exists M \in \mathbb{R}$ tal que $|f(z(t))| \leq M$ $\forall t \in [a,b]$. Luego:

$$\left| \int_C f(z)\,dz \right| = \left| \int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t)\,dt \right| \leq \int_a^b |f(z(t)) \cdot z'(t)|\,dt =$$

$$= \int_a^b M \cdot |z'(t)|\,dt = M \cdot \int_a^b |z'(t)|\,dt = M \cdot L = K.$$

TEOREMA DE LA INTEGRAL INDEFINIDA DE CAUCHY

Sea $z: [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ una curva de Jordan con parametrización $C = \{z(t) \,/\, a \leq t \leq b\}$. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio simplemente conexo tal que $C \subset \Omega$ y sea $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función tal que $f \in H(\Omega)$. Entonces existe una función $F \in H(\Omega)$ llamada integral indefinida de f tal que $\forall z \in \Omega$ $F'(z) = f(z)$. Además se verifica que:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t)\,dt = F(z(b)) - F(z(a))$$

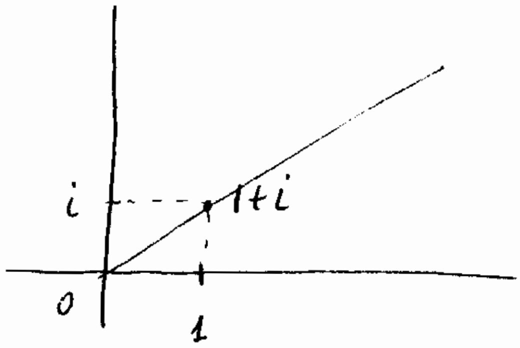
Corolario: En las condiciones del teorema anterior si la curva $z(t)$ es cerrada $(z(b) = z(a))$ entonces:

$$\oint_C f(z)\,dz = 0$$

Lo que caracteriza a la integral de una función holomorfa en un dominio simplemente conexo es que la integral de la misma no depende del camino tan sólo depende de la posición inicial y final de este.

Ejemplo.

Hallar la integral $\int_C z^2 dz$ donde C es la curva que une los puntos 0 y $1+i$.



La recta que pasa por los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$ es:

$z = (0+0i) + t(1+1i) \Rightarrow$

$\Rightarrow z(t) = t + it \quad t \in [0,1]$. Entonces la integral vale:

$$\int_C z^2 dz = \int_0^1 (t+it)^2 \cdot (1+i)\, dt = (1+i) \cdot \int_0^1 (1+it)^2 dt =$$

$$= (1+i) \cdot \left[t + i t^2 - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = (1+i)\left(\frac{2}{3} + i\right)$$

En realidad, al ser $f(z) = z^2$ holomorfa en $\mathbb{C}$ no nos hace falta la parametrización del camino.

Como $F(z) = \int z^2 dz = \frac{z^3}{3}$ entonces:

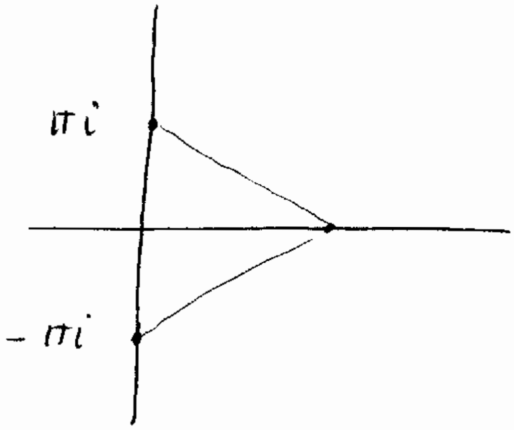
$$\int_C f(z)\, dz = F(1+i) - F(0+0i) = \frac{(1+i)^3}{3}$$

Ejemplo:

Se trata de calcular $\int_C f(z)\,dz$ siendo:

C: la curva de extremos $(-\pi i)$ y (πi) y

$f(z) = \cos z$.



Como la función $f(z) = \cos z$ es holomorfa $\Rightarrow$ la integral no depende del camino de integración, tan sólo depende del punto inicial y final.

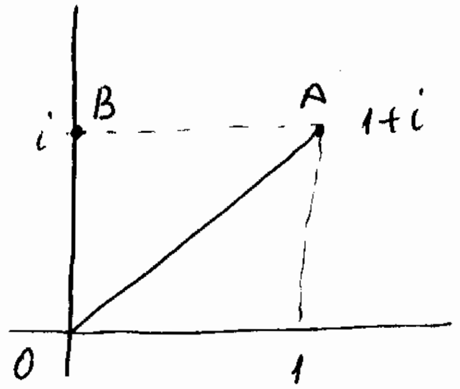
$$\int_C f(z)\,dz = F(z(b)) - F(z(a)) = F(\pi i) - F(-\pi i) =$$

$$= \operatorname{sen} \pi i - \operatorname{sen}(-\pi i) = 2 \operatorname{sen} \pi i$$

$$F(z) = \int \cos z\,dz = \operatorname{sen} z$$

Veamos un ejemplo de integración de función que no es holomorfa y por tanto no se puede aplicar lo anterior.

Consideramos la curva:



Se pide

a) $\displaystyle\int_{OA} f(z)\,dz$ b) $\displaystyle\int_{OBA} f(z)\,dz$

siendo $f(z) = y - x - 3ix^2$

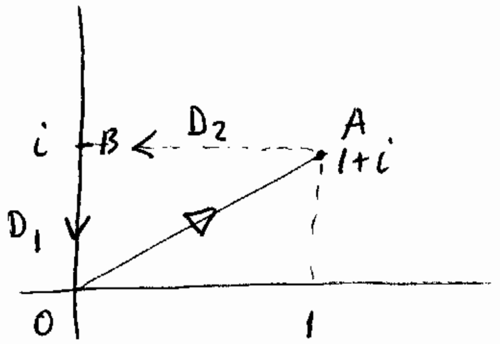
Se tiene que $u(x,y) = y - x$ $v(x,y) = -3x^2$

$u'_x = -1$ $v'_y = 0 \Rightarrow u'_x \neq v'_y \Rightarrow f$ no es holomorfa.

$$\int_{OA} f(z)\,dz = \int_0^1 (-3it^2)(1+i)\,dt = 3(1-i)\int_0^1 t^2 dt = 1-i$$

$c = \{ t+it \,/\, t \in [0,1] \}$ $z(t) = t+it \Rightarrow z'(t) = 1+i$

$$\int_{OBA} f(z)\,dz = \int_{D_1} f(z)\,dz + \int_{D_2} f(z)\,dz$$



D_1 es la curva con parametrización

$$C_1 = \{ it \ / \ t \in [0,1] \}$$

$$\text{Integrando} \begin{cases} z'(t) = i \\ f(z(t)) = t - 0 - 3\cdot i\cdot 0^2 = i\cdot t \end{cases}$$

$$\int_{D_1} f(z)dz = \int_0^1 it\,dt = \frac{i}{2}$$

D_2 es la curva con parametrización

$$C_2 = \{ t+i \ / \ t \in [0,1] \}$$

$$\text{Integrando} \begin{cases} z'(t) = 1 \\ f(z(t)) = 1 - t - i\cdot 3t^2 \end{cases} \Rightarrow \int_{D_2} f(z)\,dz = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$$

El triangulo es una curva cerrada de Jordan hay que tomar orientación positiva (antihoraria). Luego:

$$\oint_{\underset{\text{triangulo}}{T}} f(z)\,dz = \int_{OA} f(z)dz - \int_{OBA} f(z)dz = 1 - i - \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)$$

Si la función f fuera holomorfa la integral sería cero.

FORMULA INTEGRAL DE CAUCHY

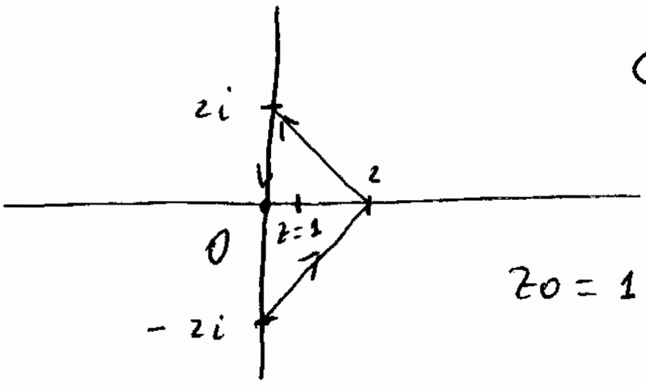
Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio simplemente conexo tal que $f \in H(\Omega)$. Si $C \in \Omega$ es una curva de Jordan positivamente orientada entonces:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad \forall z_0 \in \text{Interior de } C.$$

Ejemplos:

1º Calcular

$$\int_C \frac{\cos z}{z-1} dz$$ donde C es la frontera del triángulo de vértices $(0, 2+2i, 2-2i)$



$C \subset \mathbb{C}$ es una curva de Jordan positivamente orientada

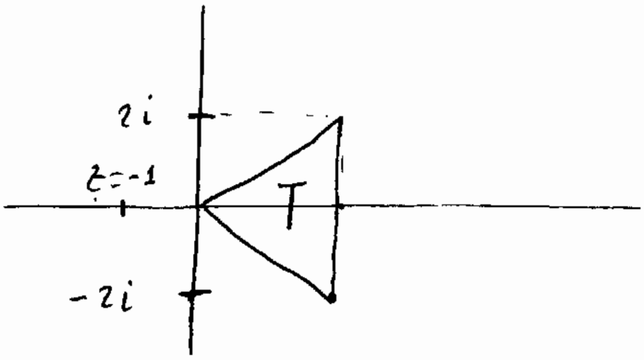
$z_0 = 1$ $\qquad f(z) = \cos z \in H(\mathbb{C})$

$$f(1) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\cos z}{z-1} dz \Rightarrow \int \frac{\cos z}{z-1} dz = 2\pi i \cdot f(1)$$

$$\Rightarrow \int \frac{\cos z}{z-1} dz = 2\pi i \cdot \cos 1$$

2º Calcular

$$\int_C \frac{\cos z}{z+1}\, dz$$ donde C es la frontera del triángulo de vértices $(0,\ 2+2i,\ 2-2i)$



La función $f(z) = \dfrac{\cos z}{z+1}$ es holomorfa en T (el triángulo anterior)

$$f'(z) = \frac{-(z+1)\operatorname{sen} z - \cos z}{(z+1)^2}$$, $f(z)$ no es derivable en $z=-1 \notin T$. Por tanto, al ser f holomorfa y C una curva de Jordan:

$$\int_C f(z)\, dz = \int_C \frac{\cos z}{z+1}\, dz = 0 .$$

¿Es contradictorio este resultado con la formula de Cauchy de la integral? No, en este caso no podríamos poner $f(z) = \cos z \in H(\mathbb{C})$

$f(-1) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\cos z}{z+1} dz \Rightarrow \int \frac{\cos z}{z+1} dz = 2\pi i \cos(-1)$

$\Rightarrow \int \frac{\cos z}{z+1} dz = 2\pi i \cos 1$, esto está mal ya que $z_0 = -1$ no pertenece al interior de la curva (es decir al interior del triángulo)

Ejemplo:

Calcular

$$\int_C \frac{\tan z}{z^2-1} dz \quad \text{siendo} \quad C = \left\{ z \in \mathbb{C} \,/\, |z| = \frac{3}{2} \right\}$$

C es la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio $\frac{3}{2}$, una curva de Jordan. Consideramos el dominio Ω formado por esta circunferencia y su interior, es decir $\Omega = \left\{ z \in \mathbb{C} \,/\, |z| \leq \frac{3}{2} \right\}$

Vamos a descomponer en fracciones simples la fracción $\frac{1}{z^2-1}$ para ver si podemos aplicar la fórmula integral de Cauchy

$z^2-1 = 0 \Rightarrow z = \pm 1$. Luego:

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-1} \Rightarrow \cancel{\frac{1}{z^2-1}} = \frac{A(z-1)+B(z+1)}{\cancel{(z+1)(z-1)}} \Rightarrow$$

$$(A+B)z + (-A+B) = 1 \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -A+B=1 \end{cases}$$

$$2B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{2} \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$$

Entonces :

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{-\frac{1}{2}}{z+1} + \frac{\frac{1}{2}}{z-1} \Rightarrow \frac{\tan z}{z^2-1} = \frac{1}{2}\frac{\tan z}{z-1} - \frac{1}{2}\frac{\tan z}{z+1}$$

$$\Rightarrow \int_C \frac{\tan z}{z^2-1}\,dz = \frac{1}{2}\underbrace{\int_C \frac{\tan z}{z-1}\,dz}_{(*)} - \frac{1}{2}\underbrace{\int_C \frac{\tan z}{z+1}\,dz}_{(**)}$$

Para poder aplicar la fórmula integral de Cauchy a (*) y (**) $\tan z$ ha de ser holomorfa en el dominio Ω. Ahora bien, $\tan z$ tan sólo no es holomorfa en los casos en que $\cos z = 0$, ya que $\tan z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}$.

Pero $\cos z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = 0 \Rightarrow e^{iz}+e^{-iz} = 0 \Rightarrow (e^{iz})^2+1=0$

$\Rightarrow (e^{iz})^2 = -1 \Rightarrow e^{iz} = \pm i$

- Si $e^{iz} = i \Rightarrow \ln e^{iz} = \ln i \Rightarrow iz = i\cdot \arg(i) \Rightarrow$

$\Rightarrow iz = i\cdot\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \Rightarrow z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \notin \Omega$

• Si $e^{iz} = -i \Rightarrow z = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \notin \Omega$

Luego $f(z) = \tan z$ es holomorfa en Ω. Aplicando la fórmula integral de Cauchy obtenemos que:

$$\int_C \frac{\tan z}{z-1} = 2\pi i \cdot f(1) = 2\pi i \cdot \tan(1)$$

$$\int_C \frac{\tan z}{z+1} = 2\pi i \cdot f(-1) = 2\pi i \cdot \tan(-1) = -2\pi i \cdot \tan(1)$$

Entonces:

$$\int_C \frac{\tan z}{z^2-1}\, dz = \frac{1}{2}\, 2\pi i \cdot \tan(1) - \frac{1}{2}\left(-2\pi i \tan 1\right) = 2\pi i \tan(1)$$

DERIVACION DE FUNCIONES HOLOMORFAS

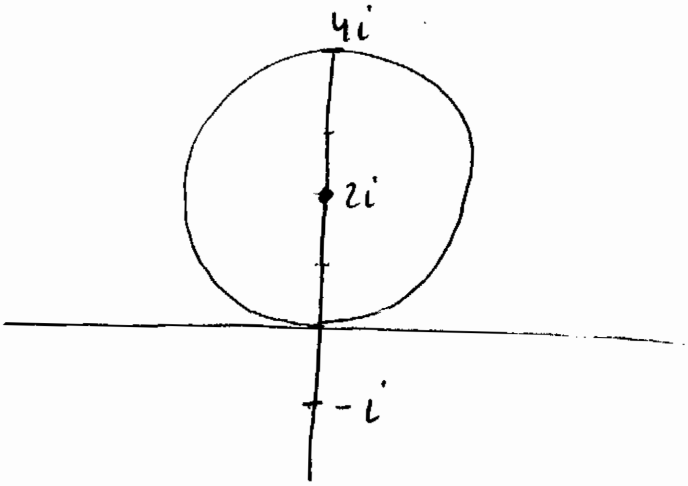
Teorema: Sea Ω un abierto. Sea $f: \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función tal que $f \in H(\Omega)$. Entonces f posee derivadas de todos los órdenes en cada punto de Ω y por consiguiente $f^{(n)} \in H(\Omega)$ $\forall n \geq 1$. Además si C es una curva de Jordan, regular a trozos y positivamente orientada, entonces:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz \quad \forall z_0 \in \text{Interior de } C$$

Ejemplo: calcular

$$\int_C \frac{\cos z}{z^2+1}\, dz \qquad \text{siendo } C = \{ z \in \mathbb{C} \,/\, |z-2i| = 2 \}$$

Observamos que C es la circunferencia de centro $(0,2)$ y radio 2.



Como en el apartado anterior, podríamos pensar en descomponer en fracciones simples y ver si se cumplen las condiciones para aplicar la fórmula integral de Cauchy. Veamos que esto no nos lleva a buen puerto.

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z+i)(z-i)} = \frac{A}{z+i} + \frac{B}{z-i} = \frac{A(z-i)+B(z+i)}{\cancel{(z-i)(z+i)}}$$

$A(z-i)+B(z+i) = 1 \Rightarrow (A+B)z + (-A+B)i = 1$ por tanto:

$$\left.\begin{array}{r} A+B=0 \\ -A+B=1 \end{array}\right\}$$

$$2B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{1}{2}.$$

Luego

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+i} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\cos z}{z^2+1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\cos z}{z+i} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\cos z}{z-i}$$. Entonces:

$$\int_C \frac{\cos z}{z^2+1}\,dz = \frac{1}{2}\int_C \frac{\cos z}{z+i}\,dz + \frac{1}{2}\int_C \frac{\cos z}{z-i}\,dz$$

$z=-i$ no pertenece al interior de la curva por tanto no podemos aplicar la formula integral de Cauchy.

¿Qué podemos hacer? Se tiene que:

$$\int_C \frac{\cos z}{z^2+1}\,dz = \int_C \frac{\cos z}{(z+i)(z-i)}\,dz = \int \frac{\frac{\cos z}{z+i}}{z-i}\,dz$$

$z=i$ pertenece al interior de la curva.

$f(z) = \dfrac{\cos z}{z+i}$ es holomorfa en el dominio

$\Omega = \{z\in\mathbb{C} \,/\, |z-2i| \le 2\}$ por tanto podemos aplicar la fórmula integral de Cauchy:

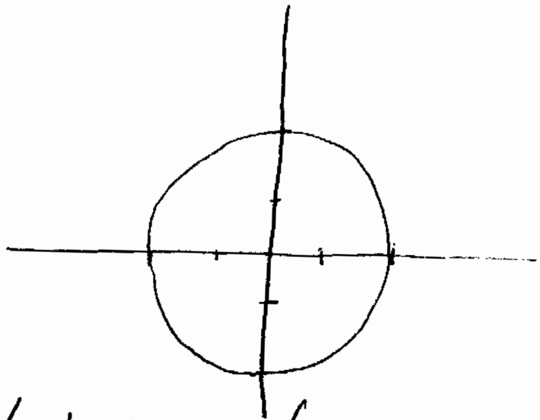
$$\int \frac{\frac{\cos z}{z+i}}{z-i}\, dz = 2\pi i \cdot f(i) = 2\pi i \cdot \frac{\cos i}{2i} =$$

$$= \pi \cdot \cos i = \pi \cdot \frac{e^{i^2}+e^{-i^2}}{2} = \frac{\pi}{2}\left(e^{-1}+e^{1}\right)$$

Ejemplo:

Calcular
$$\oint_{|z|=2} \frac{z^3+2z+1}{(z-1)^3}\, dz.$$

$c=|z|=2$ es la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 2



$\Omega=\{z\in\mathbb{C} \,/\, |z|\le 2\}$ es un dominio simplemente conexo y $c\subset\Omega$. Además $f(z)=z^3+2z+1\in H(\Omega)$ por lo que $f^{(n)}\in H(\Omega)$ y se verifica:

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\cdot\oint_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz \text{ , en nuestro caso:}$$

$$f''(1)=\frac{2!}{2\pi i}\oint_c \frac{z^3+2z+1}{(z-1)^3}\,dz \quad \text{con lo que}$$

$$\frac{2\pi i}{2!} f''(1) = \int_C \frac{z^3+2z+1}{(z-1)^3} dz = \pi \cdot i \cdot f''(1) = 6\pi i.$$

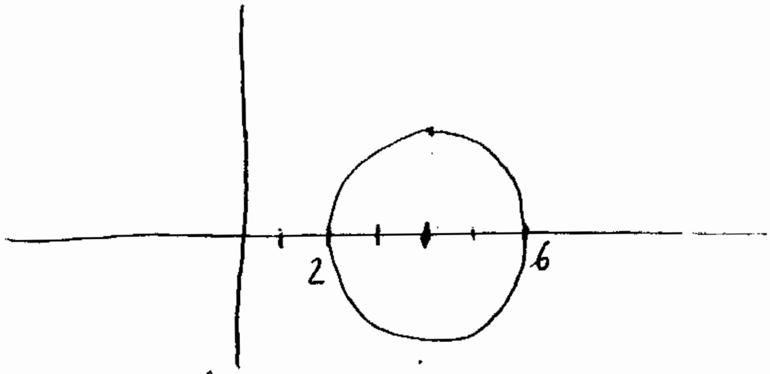
$f'(z) = 3z^2+2$

$f''(z) = 6z \Rightarrow f''(1) = 6$

Ejemplo: calcular $\oint_C \frac{\cos z}{(z+1)^3 \cdot (z-5)^2}$, siendo

$C = \{ z \in \mathbb{C} \,/\, |z-4| = 2 \}$, esta curva es una circunferencia de centro $(4,0)$ y radio 2.

- $z=-1$ no es un punto interior a la curva
- $z=5$ sí es un punto interior de la curva



Está claro que debemos tomar

$$\int_C \frac{\frac{\cos z}{(z+1)^3}}{(z-5)^2} dz \text{ , es decir } f(z) = \frac{\cos z}{(z+1)^3}$$

Consideramos el dominio $\Omega = \{ z \in \mathbb{C} \,/\, |z-4| \leq 2 \}$

Entonces Ω es un dominio simplemente conexo $C \in \Omega$. Como $f \in H(\Omega)$ (el único punto donde f no es holomorfa es $z=-1 \notin \Omega$) se verifica:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$. En nuestro caso:

$$f'(5) = \frac{1!}{2\pi i} \cdot \int \frac{f(z)}{(z-5)^2} dz \Rightarrow \int \frac{f(z)}{(z-5)^2} dz = 2\pi i \cdot f'(5)$$

$=$

$$f'(z) = \frac{-\operatorname{sen} z \cdot (z+1)^3 - \cos z \cdot 3(z+1)^2}{(z+1)^6}$$

$$f'(z) = \frac{-(z+1)\operatorname{sen} z - 3\cos z}{(z+1)^4} \Rightarrow f'(5) = \frac{-6\operatorname{sen} 5 - 3\cos 5}{6^4}$$

$$= \frac{-6\left(\frac{e^{5i}-e^{-5i}}{2i}\right) - 3 \cdot \frac{e^{5i}+e^{-5i}}{2}}{6^4}$$

Por tanto:

$$\int \frac{f(z)}{(z-5)^2} dz = 2\pi i \cdot \frac{-6\operatorname{sen} 5 - 3\cos 5}{6^4}$$