TEMA 2

FUNCIONES ANALITICAS. FUNCIONES HOLOMORFAS

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un subconjunto no vacio y consideremos la función:

$$f : \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

f asigna a cada valor $z \in \Omega$ uno y sólo un valor $f(z) \in \mathbb{C}$. Al ser $z \in \Omega \subset \mathbb{C}$, z será de la forma $z = x + iy$. Al ser $f(z) \in \mathbb{C}$, $f(z)$ será de la forma $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$ donde

$u : \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad v : \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ son dos funciones. Hemos visto que $\mathbb{C}$ es isomorfo (algebraicamente equivalente) a $\mathbb{R}^2$ por lo que una función compleja de variable compleja puede ser expresada por:

$$\begin{aligned} f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longrightarrow f(x,y) = (u(x,y), v(x,y)) \end{aligned}$$ donde

$u, v : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ son dos funciones.

Dada la función $f: \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida

por $f(x+iy) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$:

a) $\exists \lim\limits_{z \to z_0} f(x+iy) \Longleftrightarrow \begin{cases} \exists \lim\limits_{z \to z_0} u(x,y) \\ \exists \lim\limits_{z \to z_0} v(x,y) \end{cases}$

Recordemos la teoría de límites para funciones

de la forma $g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ (lo mismo será

si ponemos la función $g: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$).

- Límites reiterados: son cualesquiera de los límites

$\lim\limits_{x \to x_0} \left(\lim\limits_{y \to y_0} g(x,y) \right)$ o bien $\lim\limits_{y \to y_0} \left(\lim\limits_{x \to x_0} g(x,y) \right)$

Si existe $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} g(x,y) \Longleftrightarrow \exists \lim\limits_{x \to x_0} \left(\lim\limits_{y \to y_0} g(x,y) \right) = \lim\limits_{y \to y_0} \left(\lim\limits_{x \to x_0} g(x,y) \right)$

- Límites direccionales según rectas

Es el límite:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y = y_0 + m(x-x_0)}} g(x,y)$$

Si $\exists \lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} g(x,y)$ existe cualquier límite direccional y su valor coincide con el de los límites reiterados y por supuesto con el límite de la función $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$

- Límites direccionales según parábolas

$$\lim_{x\to x_0} f(x,y)$$

$$y = y_0 + m\,(x-x_0)^2$$

Al igual que antes podemos afirmar que si existe el límite $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ existen los límites direccionales según parábolas y su valor es igual al de los límites reiterados y al de este límite.

La única forma de ver que existe el límite, para funciones $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, es mediante la definición.

Dada $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice que $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l$

Si:

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \Big/ \begin{array}{c} |x-x_0|<\delta \\ \wedge \\ |y-y_0|<\delta \end{array} \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon.$$

Como las funciones complejas de variable compleja son funciones en la forma:

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = \big(u(x,y), v(x,y)\big)$$
$$\quad \overset{\shortparallel}{\mathbb{C}} \qquad\quad \overset{\shortparallel}{\mathbb{C}}$$

donde $u, v: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, para ver la existencia del límite

$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ tendremos que estudiar la existencia

de los límite $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)$; $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)$

Es relativamente fácil ver que no existe un límite, si es que se da este caso, mediante las propiedades recíprocas de las anteriores.

1ª Si $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)\right) \neq \lim\limits_{y\to y_0}\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)\right)$, es decir si los límites reiterados son distintos, entonces no existe el límite de la función

2ª Si los límites direccionales, según cualquier dirección, dependen del parámetro m, no son iguales o no son iguales a los límites reiterados, entonces no existe el límite de la función.

Continuidad de funciones

Sea $f: \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función, sea $z_0 \in \Omega$.

Se dice que f es continua en $z_0 \in \Omega$ si:

i) $\exists\, f(z_0)$

ii) $\exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$

iii) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

En caso de que f no verifique alguna de las tres propiedades anteriores se dice que f es discontinua en $z_0 \in \Omega$.

<u>Propiedades de los límites</u>:

Sean $f, g: \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. Entonces:

1ª $\lim\limits_{z \to z_0} \left[f(z) \pm g(z) \right] = \lim\limits_{z \to z_0} f(z) \pm \lim\limits_{z \to z_0} g(z)$

2ª $\lim\limits_{z \to z_0} \left[f(z) \cdot g(z) \right] = \lim\limits_{z \to z_0} f(z) \cdot \lim\limits_{z \to z_0} g(z)$

3ª Si $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{\lim\limits_{z \to z_0} f(z)}{\lim\limits_{z \to z_0} g(z)}$

4ª El límite de una función, si existe, es único.

Propiedades de las funciones continuas.

Sean $f, g : \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ continuas en $z_0 \in \Omega$.

Entonces:

$f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ son continuas en z_0. Además si $g \neq 0$, $g(z_0) \neq 0$ $\forall z \in \Omega$ entonces $\frac{f}{g}$ es también continua en z_0.

Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por:

$f(x+iy) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$. Entonces:

$$f \text{ es continua en } x_0 + y_0 i \iff \begin{cases} u \text{ es continua en } (x_0, y_0) \\ v \text{ es continua en } (x_0, y_0) \end{cases}$$

Ejemplo: Estudiar la continuidad de:

$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por:

$f(x+iy) = e^{xy} + i \operatorname{sen}(x^2 - 2xy^3)$. En este caso tenemos $u(x,y) = e^{xy}$ $\quad v(x,y) = \operatorname{sen}(x^2 - 2xy^3)$

f es continua $\forall z \in \mathbb{C}$ por serlo $u(x,y)$ y $v(x,y)$

Diferenciabilidad

Sea la función $f : \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ y sea $z_0 \in \Omega$. Diremos que f es diferenciable en z_0 si existe $r > 0$, $r \in \mathbb{R}$ tal que $\forall z \in D(z_0, r) = \{ z \in \mathbb{C} \, / \, |z - z_0| < r \}$ se verifica que existe el límite:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

. Al valor de este límite se le llama derivada de f en z_0 y se escribe como:

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

$$\left. \frac{df}{dz} \right|_{z = z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

(Se lee $\left. \frac{df}{dz} \right|_{z=z_0}$, diferencial de f respecto a z restringida a z_0)

$$\frac{df(z_0)}{dz} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Denotemos $\Delta z = z - z_0$. Entonces $z = z_0 + \Delta z$ y la definición de la derivada se convierte en:

$$\lim_{\substack{\Delta z \to 0 \\ \Delta z \neq 0}} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0)$$

Ejemplos:

1) Sea $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = z^2$. Hallar $f'(z_0)$ para cierto $z_0 \in \mathbb{C}$.

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{\cancel{(z-z_0)}(z+z_0)}{\cancel{(z-z_0)}}$$

$$= \lim_{z \to z_0} z + z_0 = 2z_0$$

2) Sea $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = |z|^2$.

Hemos visto que f es continua si y sólo si $u(x,y) = \operatorname{Re} f(z)$ $v(x,y) = \operatorname{Im} f(z)$ son continuas. Nos preguntamos, ¿será tambien cierto para funciones diferenciables? Es decir:

$$¿\ f \text{ diferenciable} \Longleftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} f \text{ diferenciable} \\ \operatorname{Im} f \text{ diferenciable} \end{cases} ?$$

La respuesta es que esto no es cierto. Por ejemplo en la función $f(z) = |z|^2 = z \cdot \bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2$ se verifica que $\operatorname{Re} f(z) = x^2 + y^2$ es diferenciable $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ $\operatorname{Im} f(z) = 0$ es diferenciable $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, sin embargo veremos que $f(z) = |z|^2$ tan sólo es diferenciable en $z = 0 + 0i$

Supongamos que $f(z) = |z|^2$ es diferenciable en $z_0 = x_0 + i y_0$. Entonces:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to (0,0)} \frac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to (0,0)} \frac{|z_0+\Delta z|^2 - |z_0|^2}{\Delta z} =$$

$$= \lim_{\Delta z \to (0,0)} \frac{(z_0+\Delta z)\cdot(\overline{z_0+\Delta z}) - z_0 \cdot \overline{z_0}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to (0,0)} \frac{(z_0+\Delta z)\cdot(\overline{z_0} + \overline{\Delta z}) - z_0 \overline{z_0}}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to (0,0)} \frac{\cancel{z_0 \cdot \overline{z_0}} + z_0 \cdot \overline{\Delta z} + \overline{z_0}\, \Delta z + \Delta z \cdot \overline{\Delta z} - \cancel{z_0 \cdot \overline{z_0}}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to (0,0)} \frac{z_0 \overline{\Delta z} + \overline{z_0} \Delta z + \Delta z \cdot \overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

Si existen dos límites direccionales distintos sabemos que no existe el valor del límite.

Vamos a tomar dos direcciones distintas:

$C_1 = \{ z \in \mathbb{C} \ / \ \operatorname{Im}(z) = 0 \}$ $\qquad C_2 = \{ z \in \mathbb{C} \ / \ \operatorname{Re}(z) = 0 \}$

Si $\Delta z \in C_1 \Rightarrow \overline{\Delta z} = \Delta z$ $\qquad$ Si $\Delta z \in C_2 \Rightarrow \overline{\Delta z} = -\Delta z$

Entonces:

$$\lim_{\substack{\Delta z \to (0,0) \\ \Delta z \in C_1}} \frac{z_0 \cdot \overline{\Delta z} + \overline{z_0} \cdot \Delta z + \Delta z \cdot \overline{\Delta z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} (z_0 + \overline{z_0} + \Delta z) = z_0 + \overline{z_0}$$

$$\lim_{\substack{\Delta z \to (0,0) \\ \Delta z \in C_2}} \frac{z_0 \overline{\Delta z} + \overline{z_0} \Delta z + \Delta z \cdot \overline{\Delta z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} (-z_0 + \overline{z_0} - \Delta z) = -z_0 + \overline{z_0}$$

si existiera el límite habría de ser:

$$z_0 + \bar{z}_0 = -z_0 + \bar{z}_0 \Rightarrow z_0 = -z_0 \Rightarrow z_0 = 0 = 0 + 0i,$$

de esta forma $f(z) = |z|^2$ tan sólo es diferenciable en $(0,0)$, sin embargo $\operatorname{Re} f(z) = x^2 + y^2$, $\operatorname{Im} f(z) = 0$ son diferenciables $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Dar una función compleja de variable compleja $f: \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ consiste en dar dos funciones reales de dos variables reales $u: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad v: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de forma que:

$$f(x+iy) = u(x,y) + i \cdot v(x,y).$$

Lo que pretendemos es ver si hay una relación entre la diferenciabilidad de f y la de u y v. Esta relación nos la da el siguiente teorema:

Teorema: los siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) f es diferenciable en $z_0 = x_0 + iy_0$

(ii) $u(x,y) = \operatorname{Re} f(x,y)$ y $v(x,y) = \operatorname{Im} f(x,y)$ son diferenciables en (x_0, y_0) verificando las condiciones de Cauchy-Riemann siguientes:

$\bullet\ u'_x(x_0,y_0) = \dfrac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x} = v'_y(x_0,y_0) = \dfrac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y}$

$\bullet\ u'_y(x_0,y_0) = \dfrac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y} = -v'_x(x_0,y_0) = -\dfrac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}$

Además la derivada de f en z_0 vale:

$$f'(z_0) = u'_x(x_0,y_0) + v'_x(x_0,y_0)\,i$$

Demostración:

$f: \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $\quad z_0 \in \Omega \quad z_0 = x_0 + iy_0$

$f(x+iy) = f(z) = u(x+iy) + i\cdot v(x+iy)$

f diferenciable en $z_0 \iff \exists\, f'(z_0) = \lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \iff$

$\iff \exists\, f'(z_0) = \lim\limits_{\substack{z\to z_0\\ y=y_0}} \dfrac{f(z)-f(z_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x+iy_0)-f(x_0+iy_0)}{x-x_0}$

$= \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{u(x+iy_0)+i\cdot v(x+iy_0) - u(x_0+iy_0) - i\cdot v(x_0+iy_0)}{x-x_0} =$

$= \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{u(x+iy_0)-u(x_0+iy_0)}{x-x_0} + \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{v(x+iy_0)-v(x_0+iy_0)}{x-x_0}\, i \quad (*)$

si hacemos $h = x - x_0$ si $x \to x_0 \Rightarrow h \to 0$, $x = x_0 + h$

Entonces:

$$(*) = \lim_{h\to 0} \frac{u(x_0+h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{v(x_0+h, y_0) - v(x_0, y_0)}{h} i$$

$$= u'_x(x_0, y_0) + i \cdot v'_x(x_0, y_0) = f'(z_0) \cdot (I)$$

De igual forma podríamos haber puesto:

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{z\to z_0 \\ x = x_0}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{y\to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} =$$

$$= \lim_{y\to y_0} \frac{u(x_0+iy) - u(x_0+iy_0)}{i(y-y_0)} i + \lim_{y\to y_0} \frac{v(x_0+iy) - v(x_0+iy_0)}{y - y_0} i$$

$$= \lim_{y\to y_0} \frac{u(x_0+iy) - u(x_0+iy_0)}{-i^2(y-y_0)} (-i) - \lim_{y\to y_0} \frac{v(x_0+iy) - v(x_0+iy_0)}{-i^2(y-y_0)} i^2$$

$$= -u'_y(x_0, y_0) \cdot i + v'_y(x_0, y_0) = f'(z_0) \cdot (II)$$

Igualando (I) y (II):

$$u'_x(x_0+y_0 i) + i \cdot v'_x(x_0+y_0 i) = v'_y(x_0+iy_0) - u'_y(x_0, y_0) i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u'_x(x_0+iy_0) = v'_y(x_0+iy_0)$$

$$u'_y(x_0+iy_0) = -v'_x(x_0+iy_0)$$

Ejemplo: La función $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$f(x+iy) = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ verifica:

$$\left.\begin{array}{l} u(x,y) = x^2 - y^2 \\ v(x,y) = 2xy \end{array}\right\} \text{ son diferenciables}$$

$$\left.\begin{array}{ll} u'_x = 2x & v'_x = 2y \\ u'_y = -2y & v'_y = 2x \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{se verifican las condiciones} \\ \text{de Cauchy - Riemann}\end{array}$$

Por tanto f es diferenciable y su derivada vale:

$$f'(x+iy) = u'_x(x+iy) + v'_x(x+iy) \cdot i = 2x + 2yi$$

Ejemplo: La función $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$ tan sólo es diferenciable en 0.

Para comprobar esto utilizaremos las condiciones de Cauchy - Riemann:

$$u(x,y) = x^2 + y^2 \Rightarrow u'_x = 2x \qquad u'_y = 2y$$

$$v(x,y) = 0 \Rightarrow v'_y = 0 \qquad v'_x = 0$$

$$u'_x = v'_y \Leftrightarrow x = 0 \qquad u'_y = -v'_x \Leftrightarrow y = 0$$

Las condiciones de Cauchy-Riemann tan sólo se verifican en $(0,0)$, por tanto $f(z)=|z|^2$ es diferenciable tan sólo en $0=0+0i$

Propiedades de las funciones diferenciables.

1º Si $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es diferenciable en $z_0 \in \mathbb{C} \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ es continua en $z_0 \in \mathbb{C}$

Demostración.

Por ser f derivable en z_0 se verifica que:

$\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = f'(z_0)$. Según la definición de límite:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ / \ |z-z_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon$$

Esto es equivalente a poner:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ / \ |z-z_0| < \delta \Rightarrow f'(z_0) - \varepsilon < \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} < f'(z_0) + \varepsilon$$

y por tanto; tomando $z > z_0$,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ / \ |z-z_0| < \delta \Rightarrow (z-z_0)\left[f'(z_0) - \varepsilon\right] < f(z)-f(z_0) < (z-z_0)\left[f'(z_0)+\varepsilon\right]$$

Por paso al límite una desigualdad estricta se convierte en $\leq$, es decir que:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ / \ |z - z_0| < \delta$ entonces:

$$\lim_{z \to z_0} (z-z_0)[f'(z_0) - \varepsilon] \leq \lim_{z\to z_0} f(z) - f(z_0) \leq \lim_{z\to z_0} (z-z_0)[f'(z_0) + \varepsilon] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{z\to z_0} f(z) - f(z_0) = 0 \Rightarrow \lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$ con lo

que f es continua en z_0.

2ª) La derivada de una función constante es cero

Demostración:

Si $f(z) = c \quad \forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =$

$$= \lim_{z\to z_0} \frac{c - c}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} 0 = 0.$$

3ª $\forall n \in \mathbb{Z}$ (enteros), $\forall z_0 \in \mathbb{C}$ se verifica que:

$$(z^n)'\Big|_{z_0} = n \cdot z_0^{\,n-1}$$

4ª La adición, sustración, multiplicación y cociente de funciones derivables es derivable y se verifican las siguientes identidades:

$$[f \pm g]'(z_0) = f'(z_0) \pm g'(z_0)$$

$$[f \cdot g]'(z_0) = f'(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0)$$

$$\left[\frac{f}{g}\right]'(z_0) = \frac{f'(z_0) \cdot g(z_0) - f(z_0) \cdot g'(z_0)}{[g(z_0)]^2}$$

Derivación de la función inversa.

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ inyectiva, derivable en $z_0 \in \Omega$ tal que $f'(z_0) \neq 0$. Supongamos que f^{-1} es continua en $f(z_0)$. Entonces f^{-1} es derivable en $f(z_0)$ y su derivada vale:

$$(f^{-1})'(f(z_0)) = \frac{1}{f'(z_0)}$$

Derivación de la función compuesta: regla de la cadena

Sea la cadena de funciones

$$\begin{tikzcd} \Omega \subset \mathbb{C} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & \Omega' \subset \mathbb{C} \arrow[r, "g"] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

Supongamos que f es derivable en $z_0 \in \Omega$ y que g es derivable en $f(z_0) \in \Omega'$. Entonces la función compuesta $g \circ f$ es derivable en $z_0 \in \Omega$ y se verifica que:

$$(g \circ f)'(z_0) = g'[f(z_0)] \cdot f'(z_0).$$

Regla de L'Hôpital

Sean $f, g : \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dos funciones tales que $\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} g(z) = 0$ o bien:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} g(z) = \infty.$$

Entonces:

$\lim_{z \to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)}$ (que es indeterminado de la forma $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$) $= \lim_{z \to z_0} \dfrac{f'(z)}{g'(z)}$

Ejemplo de la regla de la cadena

Sea $g(w) = w^5$ donde $w = 2z^2 + 1$. Nos piden que hallemos $\frac{dg}{dz}$. Lo que expresa la regla de la cadena es:

$$\frac{dg}{dz} = \frac{dg}{dw} \cdot \frac{dw}{dz} = 5w^4 \cdot 4z = 20w^4 z.$$

Funciones holomorfas

Diremos que la función $f: \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ es analítica u holomorfa en $z_0 \in \Omega$ si $\exists r > 0$ tal que f es derivable en $D(z_0, r)$. La función f es holomorfa en Ω si lo es $\forall z_0 \in \Omega$. Al conjunto de todas las funciones holomorfas en Ω lo representamos por $H(\Omega)$

Se define el dominio de holomorfía de una función como el conjunto maximal donde una función es holomorfa. De manera más técnica, el dominio de holomorfía de f es M si:

i) $f \in H(M)$

ii) Si $f \in H(\Omega) \Rightarrow \Omega \subset M$.

Ejemplo:

a) $f(z) = z^2$ tiene por dominio de holomorfía a todo $\mathbb{C}$

b) $f(z) = |z|^2$ tan sólo es diferenciable 0 por lo que su dominio de holomorfía sería el conjunto $\{0+0i\}$ (no entiendo, con la definición que se ha dado, porqué pone en los apuntes que el dominio de holomorfía es $\emptyset$).

A cada punto del dominio de holomorfía se le llama <u>punto regular</u>. A los puntos del conjunto complementario del dominio de holomorfía (en donde f no es diferenciable) se les llama <u>puntos singulares</u>.

Si una función no tiene puntos singulares se dice que es <u>entera</u>. Por ejemplo $f(z) = z^2$ es entera.

Más adelante veremos que si $f \in H(\mathbb{C})$ entonces f es indefinidamente derivable es decir que si f es de clase $\mathcal{C}^1 \Rightarrow f$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$

Otras propiedades de las funciones holomorfas.

1ª Sea Ω un dominio en $\mathbb{C}$ (abierto y conexo)

Si $f: \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa en Ω y $f'(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow f$ es constante.

Demostración:

Según hemos visto anteriormente, si $f(z) = u(z) + i v(z)$ y f es holomorfa, $z = x + iy$, verifica:

$$f'(z) = u'_x - i u'_y = v'_y + i v_x = 0 \Rightarrow \begin{cases} u'_x = 0 \ ; & v'_x = 0 \\ u'_y = 0 \ ; & v'_y = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow u =$ constante $\Rightarrow v =$ constante $\Rightarrow f$ es constante.

2º Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio, $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa en Ω tal que $\operatorname{Re} f(z) =$ constante. $\forall z \in \Omega$. Entonces f es constante.

Demostración:

Sea $f(x+iy) = u(x+iy) + v(x+iy) \cdot i$. Si $\operatorname{Re} f(z) =$ constante $\Rightarrow$ $u =$ constante $\Rightarrow$ $u'_x = u'_y = 0 \Rightarrow f'(z) = u'_x - u'_y i = 0$ $\Rightarrow$ f es constante.

3ª Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa en Ω tal que $\operatorname{Im} f(z) =$ constante $\forall z \in \Omega$. Entonces f es constante.

Demostración:

Sea $f(x+iy) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$. Si es constante $\operatorname{Im} f(z) = v(x,y)$ $\forall z \in \Omega$ $\Rightarrow$ $v'_y = v'_x = 0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $f'(z) = v'_y + i \cdot v'_x = 0 \Rightarrow f$ es constante.

4º Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa de modo que $|f(z)| =$ constante $\forall z \in \Omega$. Entonces f es constante.

Dem:

Sea $z = x+iy$, $f(z) = u(x,y) + v(x,y) \cdot i$. Se verifica que $|f(z)|^2 = u^2 + v^2$ $\forall z \in \Omega$, al ser este módulo constante $u^2+v^2=c$ (constante). Derivando respecto a x e y obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} 2u\,u'_x + 2v\,v'_x = 0 \quad (I) \\ 2u\,u'_y + 2v\,v'_y = 0 \quad (II) \end{array}\right\}$$

Multiplicando (I) por u y (II) por v:

$$\left.\begin{array}{l} 2u^2\,u'_x + \cancel{2uv\,v'_x} = 0 \\ \cancel{2uv\,u'_y} + 2v^2\,v'_y = 0 \end{array}\right\} \text{ se verifica que } v'_x = -u'_y,\ v'_y = u'_x$$

$$2u^2\,u'_x + 2v^2\,u'_x = 0 \Rightarrow (u^2+v^2)\cdot u'_x = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow c\cdot u'_x = 0 \Rightarrow u'_x = 0 \Rightarrow u$ es constante $\Rightarrow f$ es constante.

De igual forma se prueba que $u'_y = 0$.

Observación: las condiciones de Cauchy-Riemann impiden que una función holomorfa pueda tomar valores de forma caprichosa. A poco que exista una ligazón entre partes real e imaginaria, la función holomorfa será constante. Por ejemplo:

1) Sea $f: \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa en Ω, $f(x+iy) = u(x,y) + i\cdot v(x,y)$. Supongamos que se verifica:

$u^3 = v$. Entonces f es constante.

Demostración:

Derivando respecto a x e y:

$$\left.\begin{array}{l} 3u^2 u'_x = v'_x \Rightarrow 3u^2 u'_x - v'_x = 0 \\ 3u^2 u'_y = v'_y \Rightarrow 3u^2 u'_y - v'_y = 0 \end{array}\right\} \text{ como } v_x = -u'_y, \quad v'_y = \ldots$$

$$\begin{array}{l} 3u^2 u'_x + u'_y = 0 \\ 3u^2 u'_y - u'_x = 0 \end{array} \quad \left\{\begin{array}{l} \cancel{3u^2 u'_x} + u'_y = 0 \\ 9u^4 u'_y - \cancel{3u^2 u'_x} = 0 \end{array}\right\}$$

$$(1 + 9u^4) u'_y = 0 \Rightarrow u'_y = 0 \quad (*)$$

$$\left.\begin{array}{l} 9u^4 u'_x + \cancel{3u^2 u'_y} = 0 \\ \cancel{-3u^2 u'_y} + u'_x = 0 \end{array}\right\}$$

$$(1 + 9u^4) u'_x = 0 \Rightarrow u'_x = 0 \quad (**)$$

De $(*)$ y $(**)$ se obtiene que u es constante $\Rightarrow f$ es constante.

Comprobamos así que la derivabilidad en el conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos es muy exigente.

Funciones armónicas

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio y consideremos la función real de variable compleja $u : \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$. Diremos que u es armónica en Ω si $u \in \mathcal{C}^2$ y verifica que:

$$\Delta^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow u''_x + u''_y = 0 \quad \forall (x,y) \in \Omega$$

Teorema: Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa en Ω de tal forma que

$f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ verifica que u, v son de clase $\mathcal{C}^2$ en Ω. Entonces u y v son armónicas.

Demostración:

Por ser f holomorfa en Ω $\forall (x,y) \in \Omega$ se verifica:

$$u'_x = v'_y$$
$$v'_x = -u'_y$$

$$u''_x = \frac{\partial}{\partial x}(u'_x) = \frac{\partial}{\partial x}(v'_y) = v''_{xy}$$
$$u''_y = \frac{\partial}{\partial y}(u'_y) = \frac{\partial}{\partial y}(-v'_x) = -v''_{yx}$$

Como las funciones u, v son de clase $\mathcal{C}^2$ se verifica el teorema de Swarz, es decir, que las derivadas cruzadas son iguales:

$v''_{xy} = v''_{yx}$. Por tanto:

$$u''_{xx} + u''_{yy} = v''_{xy} - v''_{yx} = 0$$

De igual forma:

$$v''_{x} = \frac{\partial}{\partial x} (v'_x) = \frac{\partial}{\partial x} (-u'_y) = -u''_{xy}$$

$$v''_{y} = \frac{\partial}{\partial y} (v'_y) = \frac{\partial}{\partial y} (u'_x) = u''_{yx}$$

Al ser $u''_{xy} = u''_{yx} \Rightarrow v''_{xx} + v''_{yy} = -u''_{xy} + u''_{yx} = 0$

Luego u y v son armónicas.

Observación: en el teorema anterior hemos puesto la condición de que u, v fuesen de clase C^2 en Ω pero esto es innecesario ya que si f es de clase C^1 es de clase C^∞; por tanto u, v serán de clase C^∞ tambien.

<u>Armónica conjugada</u>

Sea $u: \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función armónica.

Se dice que la función $v : \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ es armónica conjugada de u si la función $f : \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, definida por:

$f(x+iy) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$ es holomorfa en Ω.

<u>Proposición</u>: Si v es armónica conjugada de u entonces v es tambien armónica.

<u>Demostración</u>:

Al ser $f : \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa en $\Omega \Rightarrow$ u, v son armónica ya que se verifican las condiciones de Cauchy-Riemann:

$$u'_y = -v'_x$$
$$v'_y = u'_x$$

<u>Abiertos estrellados</u>: un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ se dice abierto estrellado si es abierto y verifica que $\forall z \in \Omega$ el segmento que une el origen 0 con z está contenido en Ω.

Teorema: Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto estrellado. Sea $u: \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ armónica. Entonces existe la armónica conjugada $v: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de u en Ω.

Ejemplo: verificar que la función $u(x,y) = x^2 - y^2 - y$ es armónica en $\mathbb{C}$ y encontrar una función armónica conjugada de u ($\Omega = \mathbb{C}$ es abierto estrellado)

Se verifica que $\Delta^2 u = u''_{xx} + u''_{yy} = 0$ ya que:

$$\left.\begin{array}{l} u'_x = 2x \Rightarrow u''_x \;\; 2 \\ u'_y = -2y - 1 \Rightarrow u''_{yy} = -2 \end{array}\right\} u''_{xx} + u''_{yy} = 2 - 2 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow u$ es armónica.

Supongamos que v es la conjugada armónica de u. Entonces:

$$v'_y = u'_x \Rightarrow v'_y = 2x \Rightarrow v = \int 2x\,dy + \varphi(x)$$

constante frente a y

$v(x,y) = 2xy + \varphi(x)$. Como $v'_x = -u'_y$

$$v'_x = 2y + \varphi'(x) = 2y + 1 \Rightarrow \varphi'(x) = 1 \Rightarrow \varphi(x) = \int dx + c$$

$\Rightarrow \varphi(x) = x + c$, $c =$ constante. La conjugada armónica de u es:

$$v(x,y) = 2xy + x + c \quad , \quad c = \text{constante}.$$

La función holomorfa que generan u y su conjugada armónica v es:

$$f(x+iy) = (x^2 - y^2 - y) + (2xy + x + \ )i$$

Funciones complejas elementales

a) Función polinómica de grado n.

Es de la forma

$$P(z) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot z^j \quad \text{siendo } c_j \in \mathbb{C} \ , \ z \in \mathbb{C}$$

Las funciones polinómicas son funciones enteras ya que no tienen singularidades.

b) Funciones racionales.

Las funciones racionales son cociente de dos funciones polinómicas, donde el denominador no es nulo.

$$f(z) = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j \cdot z^j}{\sum_{j=1}^{m} c_j \cdot z^j}$$

El dominio de holomorfía de una función racional es el complementario del conjunto de raíces del denominador (las singularidades de una función racional son las raíces del denominador).

Ejemplo:

$$f(z) = \frac{z^2 - z}{z} \quad \text{con} \quad z \neq 0 \, . \quad \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$$

Entonces $f \in H(\mathbb{C}^*)$, 0 es una singularidad de f.

Pero esta singularidad es evitable ya que podemos redefinir la función para esquivarla.

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{z(z-1)}{z} = \lim_{z \to 0} z - 1 = -1 \, .$$

Entonces definimos la función $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \neq 0 \\ -1 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

La función $g \in H(\mathbb{C})$

Fracciones simples: Una fracción simple en $\mathbb{C}$ es una expresión en la forma $\dfrac{c}{(z-z_0)^n}$ donde $c, z_0 \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$. La fracción simple $f(z) = \dfrac{c}{(z-z_0)^n}$ verifica que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$ siendo $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{z_0\}$, evidentemente z_0 es un punto singular de f.

Teorema: Sea $f: \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función racional propia (esto es, $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ siendo grado $P <$ grado Q). Supongamos que las raíces del denominador son:

z_0 con multiplicidad n_1

z_1 " " n_2

$\vdots$

z_k " " n_k

Entonces $f(z)$ se puede descomponer en fracciones simples de la siguiente forma:

$$f(z)=\frac{\alpha_1}{z-z_0}+\frac{\alpha_2}{(z-z_0)^2}+\cdots+\frac{\alpha_{n_1}}{(z-z_0)^{n_1}}+\frac{\beta_1}{z-z_1}+\frac{\beta_2}{(z-z_1)^2}+\cdots+\frac{\beta_{n_2}}{(z-z_1)^{n_2}}+$$

$$+\cdots+\frac{\gamma_1}{z-z_k}+\frac{\gamma_2}{(z-z_k)^2}+\cdots+\frac{\gamma_{n_k}}{(z-z_k)^{n_k}}$$

Ejemplo:

Sea la función racional $f(z)=\dfrac{z^3+z^2+2z-1}{z^5-z^4+2z^3-2z^2+z-1}$

Vamos a descomponerla en fracciones simples:

calculamos en primer lugar las raíces del denominador:

$z^5-z^4+2z^3-2z^2+z-1=0$

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & -1 & 2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \longrightarrow z^4+2z^2+1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (z^2)^2+2z^2+1=0 \Rightarrow z^2=\frac{-2\pm\sqrt{4-4}}{2} \begin{cases} z^2=\dfrac{-2+0}{2}=-1 \\ z^2=\dfrac{-2-0}{2}=-1 \end{cases}$$

$z^2=-1$ (doble) $\Rightarrow$ $z=i$ (doble) $\quad z=-i$ (doble)

Podemos escribir entonces:

$f(z)=\dfrac{z^3+z^2+2z-1}{(z-i)^2(z+i)^2(z-1)}$. Según hemos visto la descomposición de $f(z)$ serie:

$$f(z) = \frac{a_1}{z-i} + \frac{a_2}{(z-i)^2} + \frac{b_1}{z+i} + \frac{b_2}{(z+i)^2} + \frac{c}{z-1}$$

$$f(z) = \frac{a_1(z-i)(z+i)^2(z-1) + a_2(z+i)^2(z-1) + b_1(z+i)(z-i)^2(z-1) + b_2(z-i)^2(z-1) + c(z-i)^2(z+i)^2}{(z-i)^2(z+i)^2(z-1)}$$

De aquí obtenemos la igualdad:

$$a_1(z-i)(z+i)^2(z-1) + a_2(z+i)^2(z-1) + b_1(z+i)(z-i)^2(z-1) + b_2(z-i)^2(z-1) + c(z-i)^2(z+i)^2 =$$

$= z^3 + z^2 + 2z - 1$. Identificando polinomios obtenemos los valores de a_1, a_2, b_1, b_2 y c.

Función exponencial compleja.

Sea $z = x+iy$. Se define la exponencial compleja

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

e^x es una función exponencial real

$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$ (fórmula de Euler)

Veamos propiedades de la exponencial compleja:

1ª $f(z) = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$ es entera en $\mathbb{C}$.

$f(z) = e^z \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$

Demostración:

Si $z = x + iy \Rightarrow f(x+iy) = e^x \cos y + i \cdot e^x \operatorname{sen} y$

$u(x,y) = e^x \cos y$; $v(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$. Tanto u como v son derivables y además se verifican las condiciones de Cauchy-Riemann:

$$\begin{array}{lll} u'_x = e^x \cos y & u'_y = -e^x \operatorname{sen} y & u'_x = v'_y \\ v'_x = e^x \cos y & v'_y = e^x \cos y \quad \Rightarrow & v'_x = -u'_y \end{array}$$

Luego $f(z) = e^z$ es entera en $\mathbb{C}$. Además su derivada, según hemos visto, vale:

$f'(z) = u'_x - i \cdot u'_y = v'_y + i \cdot v'_x = e^x \cos y + i e^x \operatorname{sen} y = f(z)$, es decir la derivada de la función exponencial compleja es ella misma.

2ª $e^0 = 1$; $e^{0+0i} = e^0(\overset{1}{\cos 0} + i \overset{0}{\operatorname{sen} 0}) = 1 \cdot (1 + i \cdot 0) = 1$

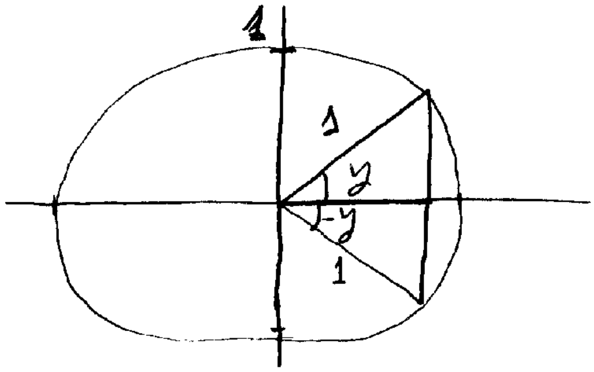
3ª $\forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$

Demostración: Sea $z = x + iy$. Entonces

$$e^{-z} = e^{-x-iy} = e^{-x}\left[\cos(-y) + i \operatorname{sen}(-y)\right]$$

$$e^{-z} = e^{-x}(\cos y - i \operatorname{sen} y) \quad \text{ya que} \quad \cos(-y) = \cos y$$

$$\operatorname{sen}(-y) = -\operatorname{sen} y$$



$$\frac{1}{e^z} = \frac{1}{e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)} = e^{-x}\left(\frac{1}{\cos y + i \operatorname{sen} y}\right) =$$

$$= e^{-x}\left(\frac{\cos y - i \operatorname{sen} y}{(\cos y + i \operatorname{sen} y)(\cos y - i \operatorname{sen} y)}\right) = e^{-x}\left(\frac{\cos y - i \operatorname{sen} y}{\cos^2 y - i^2 \operatorname{sen}^2 y}\right)$$

$$\frac{1}{e^z} = e^{-x}\left(\frac{\cos y - i \operatorname{sen} y}{\cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y}\right) = e^{-x}(\cos y - i \operatorname{sen} y)$$

Luego $e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$

4ª Si $z, w \in \mathbb{C}$, se verifica que $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$

Demostración:

Se puede hacer una demostración directamente a partir de la definición y multiplicación de complejos.

Esa demostración es mero cálculo, pesado y con pocas ideas. Otra demostración que usa las propiedades diferenciales de la exponencial compleja es la siguiente:

Sea $w \in \mathbb{C}$ fijo y consideremos la función:

$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$f(z) = e^{-z} \cdot e^{z+w}$. Si derivamos:

$f'(z) = -e^{-z} \cdot e^{z+w} + e^{-z} \cdot e^{z+w} = 0$ y por tanto f es constante; $f(z) = c$ (constante) $\forall z \in \mathbb{C}$. En particular $f(0) = e^{-0} \cdot e^{0+w} = c \Rightarrow c = e^{w}$. Luego se verifica que $f(z) = e^{-z} \cdot e^{z+w} = e^{w} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{e^{z+w}}{e^{z}} = e^{w} \Rightarrow e^{z+w} = e^{z} \cdot e^{w}$$

5ª Sea $n \in \mathbb{N}$ y $z \in \mathbb{C}$. Entonces:

$$e^{nz} = (e^{z})^{n}$$

Demostración:

• Procederemos por inducción. Para $n = 1$:

$e^{1\cdot z} = (e^z)^1$ es obvio que se verifica

• Para $n=2$ la expresión quedaría como:

$$e^{2z} = (e^z)^2$$

Dem:

$e^{2z} = e^{2x+2yi} = e^{2x}\cdot(\cos 2y + i \operatorname{sen} 2y)$. Tenemos que tener en cuenta que:

$\cos 2y = \cos^2 y - \operatorname{sen}^2 y \quad \operatorname{sen} 2y = 2 \operatorname{sen} y \cos y$

Luego:

$$e^{2z} = e^{2x}\left[(\cos^2 y - \operatorname{sen}^2 y) + i\cdot 2\operatorname{sen} y \cos y\right]$$

Como $e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) \Rightarrow (e^z)^2 = \left[e^x(\cos y + i\operatorname{sen} y)\right]^2$

$\Rightarrow (e^z)^2 = e^{2x}(\cos y + i\operatorname{sen} y)^2 \Rightarrow (e^z)^2 = e^{2x}(\cos^2 y + i^2\operatorname{sen}^2 y + 2i\cos y \operatorname{sen} y) \Rightarrow (e^z)^2 = e^{2x}\left[(\cos^2 y - \operatorname{sen}^2 y) + i\,2\cos y \operatorname{sen} y\right]$

Luego se verifica que $e^{2z} = (e^z)^2$.

• Supongamos que la propiedad es cierta para $n=k$, es decir que se verifica:

$$e^{kz} = (e^z)^k$$

· Vamos a probar la propiedad para $n = k+1$, es decir que

$$e^{(k+1)z} = (e^z)^{k+1}$$

$$e^{(k+1)z} = e^{kz} \cdot e^z = (e^z)^k \cdot e^z = (e^z)^{k+1}.$$

Logaritmos de números complejos.

En primer lugar vamos a recordar la definición de logaritmo neperiano de números reales.

Sea $x \in \mathbb{R}^+$ (i.e. $x > 0$). Se dice que $\ln x = \alpha$ si se verifica que $e^\alpha = x$.

Para números complejos, sea $z \in \mathbb{C} - \{0\}$, ¿cómo podríamos definir el logaritmo neperiano de z?

Sea $\ln z = u + iv$. Entonces si aplicamos la misma definición que en el caso real:

$$e^{u+i\cdot v} = z$$

Si llamamos $|z|$ al modulo de z y $\alpha = \arg(z)$

$$e^{u+iv} = |z| \left(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha \right)$$

$$e^{u} \cdot (\cos v + i \operatorname{sen} v) = |z| \cdot (\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^{u} = |z| \Rightarrow u = \ln|z| \\ \left.\begin{array}{l} \cos\alpha = \cos v \\ \operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen} v \end{array}\right\} \Rightarrow v = \alpha + 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow v = \arg(z) + 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z}.$$

Entonces para el caso complejo, si $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ se define:

$$\ln z = \ln|z| + i \cdot [\arg z + 2k\pi] \quad k \in \mathbb{Z}.$$

El logaritmo de un complejo no se reduce a un sólo valor, es un conjunto de infinitos números complejos.

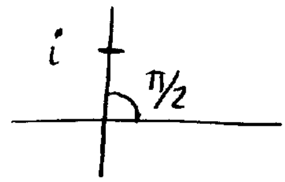
$\ln z = \{ \ln|z| + i \cdot (\arg z + 2k\pi) / k \in \mathbb{Z} \}$. Para $k = 0$

$\ln z = \ln|z| + i \cdot \arg(z)$, a este valor se le llama logaritmo principal.

Ejemplo:

Calcular $\ln i$.

Tenemos que $|i| = 1$ $\quad \arg(i) = \frac{\pi}{2}$



Luego: $\ln i = \ln |i| + i\,(\arg i + 2k\pi)$

$$\ln i = \ln 1 + i \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$$

$$\boxed{\ln i = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) i}$$

Para $k=0$ el logaritmo principal es $\ln i = \frac{\pi}{2} i$

<u>Propiedades de los logaritmos</u>

1ª $\ln z \cdot w = \ln z + \ln w \quad \forall z, w \in \mathbb{C} - \{0\}$

Demostración:

Es obvio que se verifica que $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ y que $\arg(z \cdot w) = \arg z + \arg w$. Luego:

$\ln(z \cdot w) = \ln |z \cdot w| + i\left[\arg(z \cdot w) + 2k\pi\right]$. Luego:

$\ln(z \cdot w) = \ln(|z| \cdot |w|) + i\left[\arg(z) + \arg(w) + 2k\pi\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln(z \cdot w) = \ln|z| + \ln|w| + i\left[\arg(z) + 2k\pi\right] + i\left[\arg(w) + 2k\pi\right]$

y por tanto:

$$\ln(z\cdot w) = \left[\ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)\right] + \left[\ln|w| + i(\arg w + 2k\pi)\right]$$

$$\Rightarrow \ln(z\cdot w) = \ln z + \ln w$$

2ª $\forall\, z, w \in \mathbb{C} - \{0\}$ $\quad \ln \frac{z}{w} = \ln z - \ln w$

<u>Demostración</u>:

Se verifica que $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$, $\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg z - \arg w$

Por la definición:

$$\ln\left(\frac{z}{w}\right) = \ln\left|\frac{z}{w}\right| + i\left(\arg\left(\frac{z}{w}\right) + 2k\pi\right)$$

$$\ln\left(\frac{z}{w}\right) = \ln\frac{|z|}{|w|} + i\left[\arg z - \arg w + 2k\pi\right]$$

Para nº reales $\ln\frac{|z|}{|w|} = \ln|z| - \ln|w|$ con lo que:

$$\ln\left(\frac{z}{w}\right) = \ln|z| - \ln|w| + i(\arg z - \arg w + 2k\pi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{z}{w}\right) = \left[\ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)\right] - \left[\ln|w| + i(\arg w + 2k\pi)\right]$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{z}{w}\right) = \ln z - \ln w$$

3ª $\ln (z)^n = n \cdot \ln z \quad \forall z \in \mathbb{C} - \{0\}$

Demostración:

$$|z|^n = |(z)^n| \quad \text{y} \quad \arg(z^n) = n \cdot \arg(z)$$

Por la definición:

$$\ln (z)^n = \ln |z^n| + i \cdot (\arg z^n + 2k\pi) \Rightarrow$$

$\ln (z)^n = \ln |z|^n + i\, (n \arg z + 2k\pi)$. Como para números reales se verifica $\ln |z|^n = n \ln|z|$ tenemos:

$$\ln (z)^n = n \ln |z| + i \cdot (n \arg z + 2k\pi)$$

$$\ln (z)^n = n \left[\ln z + i\, (\arg z + 2k\pi) \right] = n \ln z.$$

4ª $\ln \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \ln z \quad \forall z \in \mathbb{C} - \{0\}$

Demostración:

Esto es una consecuencia de $\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}}$, basta entonces con aplicar la propiedad 3ª.

3^a $\ln (z)^n = n \cdot \ln z \quad \forall z \in \mathbb{C} - \{0\}$

Demostración:

$$|z|^n = |(z)^n| \quad \text{y} \quad \arg(z^n) = n \cdot \arg(z)$$

Por la definición:

$$\ln (z)^n = \ln |z^n| + i \cdot (\arg z^n + 2k\pi) \Rightarrow$$

$\ln (z)^n = \ln |z|^n + i\,(n \arg z + 2k\pi)$. Como para números reales se verifica $\ln |z|^n = n \ln|z|$ tenemos:

$$\ln (z)^n = n \ln |z| + i \cdot (n \arg z + 2k\pi)$$

$$\ln (z)^n = n \left[\ln z + i\,(\arg z + 2k\pi) \right] = n \ln z.$$

4^a $\ln \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \ln z \quad \forall z \in \mathbb{C} - \{0\}$

Demostración:

Esto es una consecuencia de $\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}}$, basta entonces con aplicar la propiedad 3^a.

Funciones trigonométricas.

Para $x \in \mathbb{R}$, según la formula de Euler y teniendo en cuenta que $\cos(-x) = \cos x$ y que $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$, se cumple:

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x \quad (*)$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x \quad (**)$$

Si sumamos $(*)$ y $(**)$:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Si restamos a $(*)$ la $(**)$:

$$\operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

La expresión de $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$ para $x \in \mathbb{R}$, la generalizamos para $z \in \mathbb{C}$ definiendo:

$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Fórmula de Euler extendida

$\forall z \in \mathbb{C}$ se verifica que $\cos z + i \operatorname{sen} z = e^{iz}$

Demostración:

$$\forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow \cos z + i \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} + i \cdot \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$= \frac{e^{iz} + \cancel{e^{-iz}} + e^{iz} - \cancel{e^{-iz}}}{2} = \frac{2e^{iz}}{2} = e^{iz}$$

Del mismo modo podríamos definir en $\mathbb{C}$ las restantes razones trigonométricas:

$\forall z \in \mathbb{C}$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})} \quad \text{(tangente)}$$

$$\operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z} = \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}} \quad \text{(Cotangente)}$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos z} = \frac{2}{e^{iz} + e^{-iz}} \quad \text{(Secante)}$$

$$\operatorname{cosec} z = \frac{1}{\operatorname{sen} z} = \frac{2i}{e^{iz} - e^{-iz}} \quad \text{(Cosecante)}$$

Propiedades de las funciones trigonométricas complejas:

1º $\forall z \in \mathbb{C}$ $\quad \operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$

<u>Dem</u>:

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \Rightarrow \operatorname{sen}^2 z = \frac{(e^{iz} - e^{-iz})^2}{-4} = \frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{-4} = \frac{-e^{2iz} + 2 - e^{-2iz}}{4}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \Rightarrow \cos^2 z = \frac{(e^{iz} + e^{-iz})^2}{4} = \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4}$$

Luego:

$$\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = \frac{-e^{2iz} + 2 - e^{-2iz}}{4} + \frac{e^{2iz} + 2 + 2e^{-2iz}}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

2ª $\forall z \in \mathbb{C}$ se verifica que $\quad 1 + \operatorname{Tg}^2 z = \dfrac{1}{\cos^2 z} = \sec^2 z$

Demostración:

$$1 + \operatorname{Tg}^2 z = 1 + \left(\frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}\right)^2 = 1 + \frac{\operatorname{sen}^2 z}{\cos^2 z} = \frac{\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z}{\cos^2 z} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 z} = \sec^2 z$$

3ª $\forall z \in \mathbb{C}$ se verifica que $\quad 1 + \operatorname{Cotg}^2 z = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 z} = \operatorname{Cosec}^2 z$

Demostración:

$$1 + \operatorname{Cotg}^2 z = 1 + \left(\frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}\right)^2 = 1 + \frac{\cos^2 z}{\operatorname{sen}^2 z} = \frac{\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z}{\operatorname{sen}^2 z} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 z} = \operatorname{Cosec}^2 z$$

Las funciones $\operatorname{arc\,sen}(z)$, $\operatorname{arc\,cos}(z)$, $\operatorname{arctg}(z)$, ... no se pueden calcular directamente. Por ejemplo si tratamos de calcular $\operatorname{arc\,sen} 0$ procederemos como sigue:

$$z = \operatorname{arc\,sen} 0 \Rightarrow \operatorname{sen} z = 0 \Rightarrow \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{iz} - e^{-iz} = 0 \Rightarrow (e^{iz})^2 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^{iz} = 1 & (I) \\ e^{iz} = -1 & (II) \end{cases}$$

(I) Si $e^{iz} = 1 \Rightarrow iz = \ln 1 = \ln|1| + i \cdot \arg(1) \Rightarrow$

$\Rightarrow iz = 2k\pi i \Rightarrow z = 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$.

(II) Si $e^{iz} = -1 \Rightarrow iz = \ln(-1) = \ln|-1| + i\arg(-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow iz = i \cdot (2k+1) \cdot \pi \Rightarrow z = (2k+1) \cdot \pi \quad k \in \mathbb{Z}$.

Ejemplo: calcular $\operatorname{arc\,cos} 2$.

$$z = \operatorname{arc\,cos} 2 \Rightarrow \cos z = 2 \Rightarrow \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{iz} + e^{-iz} = 4 \Rightarrow (e^{iz})^2 - 4e^{iz} + 1 = 0$$

Por tanto:

$$e^{iz} = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$$e^{iz} \begin{cases} \dfrac{4+2\sqrt{3}}{2} = 2+\sqrt{3} \quad (\mathrm{I}) \\ \dfrac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3} \quad (\mathrm{II}) \end{cases}$$

(I) Si $e^{iz} = 2+\sqrt{3} \Rightarrow \ln e^{iz} = \ln(2+\sqrt{3}) \Rightarrow$

$\Rightarrow iz = \ln|2+\sqrt{3}| + i \cdot \arg(2+\sqrt{3}) \Rightarrow iz = \ln(2+\sqrt{3}) + 2K\pi i$

$\Rightarrow z = 2K\pi - i \ln(2+\sqrt{3})$

(II) Si $e^{iz} = 2-\sqrt{3}$, procederíamos de la misma forma que en (I) obteniendo:

$$z = 2K\pi - i\ln(2-\sqrt{3})$$

Otras funciones trigonométricas

a) Tangente

$$Tg(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)}{\cos(z)} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz}+e^{-iz})} \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

b) Cotangente

$\forall z \in \mathbb{C}$ se define $\text{Cotg}\, z = \dfrac{\cos(z)}{\text{sen}(z)} = \dfrac{i(e^{iz}+e^{-iz})}{e^{iz}-e^{-iz}}$

c) Secante

$\forall z \in \mathbb{C}$ se define $\sec z = \dfrac{1}{\cos(z)} = \dfrac{2}{e^{iz}+e^{-iz}}$

d) Cosecante

$\forall z \in \mathbb{C}$ se define $\text{Cosec}\, z = \dfrac{1}{\text{sen}\, z} = \dfrac{2i}{e^{iz}-e^{-iz}}$

Propiedades de las razones trigonométricas en $\mathbb{C}$.

1ª $\cos(-z) = \cos z \qquad \text{sen}(-z) = -\text{sen}\, z \qquad \forall z \in \mathbb{C}$

Dem:

$\cos(z) = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$; $\cos(-z) = \dfrac{e^{-iz}+e^{iz}}{2} \Rightarrow \cos(z) = \cos(-z)$

$\text{sen}\, z = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$; $\text{sen}(-z) = \dfrac{e^{i(-z)}-e^{-i(-z)}}{2i} = \dfrac{e^{-iz}-e^{iz}}{2i} = -\text{sen}\, z$

2ª $\forall z \in \mathbb{C}$ se verifica que

$$\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$$

Dem:

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \Rightarrow \operatorname{sen}^2 z = \frac{e^{2iz} + e^{-2iz} - 2}{-4} = \frac{2 - e^{2iz} - e^{-2iz}}{4}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \Rightarrow \cos^2 z = \frac{e^{2iz} + e^{-2iz} + 2}{4} =$$

Luego:

$$\operatorname{sen}^2(z) + \cos^2(z) = \frac{2 - e^{2iz} - e^{-2iz}}{4} + \frac{e^{2iz} + e^{-2iz} + 2}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

3ª $\forall z, w \in \mathbb{C}$

$$\operatorname{sen}(z+w) = \operatorname{sen} z \cos w + \operatorname{sen} w \cdot \cos z$$

Dem:

Se tiene que:

$$\operatorname{sen} z \cos w + \operatorname{sen} w \cdot \cos z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \cdot \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} + \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} \cdot \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} =$$

$$= \frac{(e^{iz} - e^{-iz})(e^{iw} + e^{-iw}) + (e^{iw} - e^{-iw})(e^{iz} + e^{-iz})}{4i} =$$

$$= \frac{e^{i(z+w)} + \cancel{e^{i(z-w)}} - \cancel{e^{-i(z-w)}} - e^{-i(z+w)} + e^{i(z+w)} - \cancel{e^{i(z-w)}} + \cancel{e^{-i(z-w)}} - e^{-i(z+w)}}{4i}$$

$$= \frac{2e^{i(z+w)} - 2e^{-i(z+w)}}{4i} = \frac{e^{i(z+w)} - e^{-i(z+w)}}{2i} = \operatorname{Sen}(z+w)$$

4ª De igual modo se prueba que:

$\operatorname{Cos}(z+w) = \operatorname{Cos} z \operatorname{Cos} w - \operatorname{Sen} z \cdot \operatorname{Sen} w$

5ª $\operatorname{Sen}(z-w) = \operatorname{Sen} z \operatorname{Cos} w - \operatorname{Cos} z \operatorname{Sen} w$

Dem:

$\operatorname{Sen}(z-w) = \operatorname{Sen}[z+(-w)] = \operatorname{Sen} z \operatorname{Cos}(-w) + \operatorname{Cos} z \cdot \operatorname{Sen}(-w)$ (*)

Como $\operatorname{Cos}(-w) = \operatorname{Cos} w$ y $\operatorname{Sen}(-w) = -\operatorname{Sen} w$, queda:

$\operatorname{Sen}(z-w) = \operatorname{Sen} z \operatorname{Cos} w - \operatorname{Cos} z \operatorname{Sen} w$

6ª $\operatorname{Cos}(z-w) = \operatorname{Cos} z \operatorname{Cos} w + \operatorname{Sen} z \cdot \operatorname{Sen} w$

Dem:

$$\operatorname{Cos}(z-w) = \operatorname{Cos}[z+(-w)] = \operatorname{Cos} z \underbrace{\operatorname{Cos}(-w)}_{\operatorname{Cos} w} - \operatorname{Sen} z \underbrace{\operatorname{Sen}(-w)}_{-\operatorname{Sen} w}$$

$= \operatorname{Cos} z \operatorname{Cos} w + \operatorname{Sen} z \operatorname{Sen} w$

7ª $\cos 2z = \cos^2 z - \operatorname{sen}^2 z$

Dem:

$\cos 2z = \cos(z+z) = \cos z \cdot \cos z - \operatorname{sen} z \cdot \operatorname{sen} z = \cos^2 z - \operatorname{sen}^2 z$

8ª $\operatorname{sen} 2z = 2 \operatorname{sen} z \cos z$

Dem:

$\operatorname{sen} 2z = \operatorname{sen}(z+z) = \operatorname{sen} z \cos z + \cos z \operatorname{sen} z = 2 \operatorname{sen} z \cos z$

9ª $\operatorname{tg} 2z = \dfrac{2 \operatorname{Tg} z}{1 - \operatorname{Tg}^2 z}$

Dem:

$$\operatorname{Tg} 2z = \frac{\operatorname{sen} 2z}{\cos 2z} = \frac{2 \operatorname{sen} z \cos z}{\cos^2 z - \operatorname{sen}^2 z} \underset{\downarrow}{=} \frac{\dfrac{2 \operatorname{sen} z \cos z}{\cos^2 z}}{\dfrac{\cos^2 z - \operatorname{sen}^2 z}{\cos^2 z}}$$

dividimos por $\cos^2 z$

$$= \frac{2 \dfrac{\operatorname{sen} z}{\cos z}}{1 - \dfrac{\operatorname{sen}^2 z}{\cos^2 z}} = \frac{2 \operatorname{Tg} z}{1 - \operatorname{Tg}^2 z}$$

10^a $\cos \frac{z}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos z}{2}}$

Dem:

$\cos z = \cos 2\cdot\left(\frac{z}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{z}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{z}{2}\right)$. Como:

$\operatorname{sen}^2\left(\frac{z}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{z}{2}\right) = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2\left(\frac{z}{2}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{z}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos z = \cos^2\left(\frac{z}{2}\right) - 1 + \cos^2\left(\frac{z}{2}\right) \Rightarrow 2\cos^2\left(\frac{z}{2}\right) = 1 + \cos z$

$\Rightarrow \cos^2\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{1+\cos z}{2} \Rightarrow \cos\left(\frac{z}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos z}{2}}$

11^a $\operatorname{sen}\left(\frac{z}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos z}{2}}$

Dem:

$\operatorname{sen}^2\left(\frac{z}{2}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{z}{2}\right) \Rightarrow \operatorname{sen}^2\left(\frac{z}{2}\right) = 1 - \frac{1+\cos z}{2}$

$\Rightarrow \operatorname{sen}^2\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{2-1-\cos z}{2} = \frac{1-\cos z}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{z}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos z}{2}}$

Las funciones trigonométricas en $\mathbb{C}$ tienen propiedades análogas a las que tienen las funciones trigonométricas en $\mathbb{R}$, pero no son exactamente las mismas, por ejemplo las funciones trigonométricas están acotadas en $\mathbb{R}$ pero no en $\mathbb{C}$, es decir:

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad -1 \leq \cos x \leq 1 \quad , \quad -1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$, si $z \in \mathbb{C}$ no podemos, ni tiene sentido, afirmar las desigualdades anteriores.

$$\cos(ix) = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2}$$ y se verifica que:

$$\lim_{x \to \infty} \cos(ix) = \lim_{x \to \infty} \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \frac{0 + \infty}{2} = \infty$$

$$\operatorname{sen}(ix) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2i} \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \operatorname{sen}(ix) = \frac{0 - \infty}{2i} = -\infty$$

Holomorfia de las funciones trigonométricas.

Las funciones $f(z) = \operatorname{sen} z$ $\quad g(z) = \cos z$ son enteras

$$f'(z) = \frac{d(\operatorname{sen} z)}{dz} = \cos z$$

$$\forall z \in \mathbb{C}$$

$$g'(z) = \frac{d(\cos t)}{dz} = -\operatorname{sen} z$$

La función $f(z) = \operatorname{tg} z$ no es entera

$$f'(z) = \frac{d(\operatorname{tg} z)}{dz} = (1 + \operatorname{Tg}^2 z) = \frac{1}{\cos^2 z} = \sec^2 z$$, para que existe esta derivada ha de ser $\cos z \neq 0$. Veamos cuando es $\cos z = 0 \Rightarrow \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow e^{iz} - e^{-iz} = 0 \Rightarrow (e^{iz})^2 - 1 = 0 \Rightarrow e^{iz} = \pm 1$$

• Si $e^{iz} = 1 \Rightarrow iz = \ln 1 = \ln|1| + i \cdot \arg(1) \Rightarrow$

$$z = \arg(1) \Rightarrow \boxed{z = 2k\pi}$$

• Si $e^{iz} = -1 \Rightarrow iz = \ln(-1) = \ln|-1| + i \arg(-1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow z = \arg(-1) \Rightarrow z = \pi + 2k\pi \Rightarrow \boxed{z = (2k+1) \cdot \pi}$$

Los $z = k\pi$ engloban a los $z = (2k+1) \cdot \pi$ y a $z = 2k\pi$

Luego el dominio de holomorfía de $f(z) = \operatorname{tg} z$ es

$$H = \{ z \in \mathbb{C} \,/\, z \neq k\pi \}$$

Funciones hiperbólicas

Al igual que las funciones trigonométricas en $\mathbb{C}$, las funciones hiperbólicas se definen por extensión a $\mathbb{C}$ de las funciones hiperbólicas reales.

Coseno hiperbólico

$$\text{Cosh}(z) = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

Secante hiperbólica

$$\text{Sech}(z) = \frac{1}{\text{Cosh}(z)}$$

Seno hiperbólico

$$\text{Senh}(z) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

Cosecante hiperbólica

$$\text{Cosech}(z) = \frac{1}{\text{Senh}(z)}$$

Tangente hiperbólica

$$\text{Tagh}(z) = \frac{\text{Senh}(z)}{\text{Cosh}(z)}$$

Cotangente hiperbólica

$$\text{Cotgh}(z) = \frac{1}{\text{Tagh}(z)}$$

Propiedades:

1ª $\text{Cosh}(-z) = \text{Cosh}(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$

2ª $\text{Senh}(-z) = -\text{Senh}(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$

3ª $\cosh(iz) = \cos(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$

4ª $\operatorname{Senh}(iz) = i\operatorname{Sen}(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$

5ª $\cosh^2(z) - \operatorname{Senh}^2(z) = 1.$

Dem:

$$\cosh(z) = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2} \Rightarrow \cosh^2(z) = \frac{e^{2z}+e^{-2z}+2}{4}$$

$$\operatorname{Senh}(z) = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2} \Rightarrow \operatorname{Senh}^2(z) = \frac{e^{2z}+e^{-2z}-2}{4} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cosh^2(z) - \operatorname{Senh}^2(z) = \frac{e^{2z}+e^{-2z}+2}{4} - \frac{e^{2z}+e^{-2z}-2}{4} = 1.$$

6ª $\operatorname{Senh}(z+w) = \operatorname{Senh}(z)\cosh(w) + \cosh(z)\cdot\operatorname{Senh}(w)$

Dem:

La demostración es análoga a la efectuada con el seno de la suma en $\mathbb{C}$

7ª $\cosh(z+w) = \cosh(z)\cdot\cosh(w) + \operatorname{Senh}(z)\cdot\operatorname{Senh}(w)$

Ejercicio: hallar Arg Sen h(z)

Sea $z = \arg \operatorname{Sen} h(2) \Rightarrow \operatorname{Sen} h(z) = 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{e^z - e^{-z}}{2} = 2 \Rightarrow e^z - e^{-z} = 4 \Rightarrow (e^z)^2 - 1 = 4e^z$$

$$\Rightarrow (e^z)^2 - 4e^z - 1 = 0 \Rightarrow e^z = \frac{4 \pm \sqrt{16+4}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{20}}{2}$$

$$e^z \begin{cases} 2+\sqrt{5} \\ 2-\sqrt{5} \end{cases}$$

- Si $e^z = 2+\sqrt{5} \Rightarrow z = \ln(2+\sqrt{5}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow z = \ln|2+\sqrt{5}| + i \arg(2+\sqrt{5}) \Rightarrow z = \ln|2+\sqrt{5}| + 2k\pi i$$

- Si $e^z = \underbrace{2-\sqrt{5}}_{\text{negativo}} \Rightarrow z = \ln|2-\sqrt{5}| + (2k+1)\pi i$