TEMA 1: NÚMEROS COMPLEJOS

1. Introducción

La necesidad de extender el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales viene dada al resolver ecuaciones de la forma $x^2+1=0$; esta ecuación no tiene solución en $\mathbb{R}$. Se define el conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos como:

$$\mathbb{C} = \{x+iy \ / \ x, y \in \mathbb{R}\}$$

Dado el complejo $Z = x+iy$ se llama parte real de Z a Re(Z)$=x$, llamamos parte imaginaria de Z a Im(Z)$=y$

2. Operaciones con números complejos

2.1. Suma

Sean los complejos $z_1 = x_1+iy_1,\ \ z_2 = x_2+iy_2$. Se define su suma como: $z_1+z_2 = (x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$, es decir que el resultado de sumar dos números complejos es otro complejo cuya parte real es la suma de las partes reales, siendo su parte imaginaria la suma de las partes imaginarias. Evidentemente la suma es una operación en $\mathbb{C}$ ya que al sumar dos complejos obtenemos un complejo, es decir que la suma es una ley de composición interna en $\mathbb{C}$:

$$\begin{array}{ccccc} + & : & \mathbb{C}X\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & (\mathrm{z}_1, z_2) & \longrightarrow & \mathrm{z}_1 + z_2 \end{array}$$

Además + verifica las siguientes propiedades:

a1.- Asociativa: $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \Rightarrow z_1 + (z_2+z_3) = (z_1+z_2)+z_3$

a2.- Existencia de elemento neutro: el elemento neutro de la suma es $0 = 0+0i$ ya que $\forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow z+0 = 0+z = z$

a3.- Existencia de elemento simétrico: el elemento simétrico de $z = x + iy$ es $-z = -x - iy$ ya que $\forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow z + (-z) = -z + z = 0$

a4.- Conmutativa: $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \Rightarrow z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

Luego $(\mathbb{C}, +)$ es un grupo abeliano.

2.2. Producto

Sean $z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$. Se define su producto como: $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i$. Se pueden demostrar las siguientes propiedades:

b1.- Asociativa:$\forall z_1,\ z_2,\ z_3 \in \mathbb{C} \Rightarrow z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$

b2.- Existencia de elemento neutro: el elemento neutro para el producto es 1=1+0i ya que $\forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow z1 = 1z = z$

b3.- Existencia de elemento simétrico: $\forall z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\},\ \exists z^{-1} \in \mathbb{C}^*$ tal que $zz^{-1} = z^{-1}z = 1$. Además si $z = x + iy \neq o$ entonces:
$z^{-1} = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{x+iy} = \dfrac{x-iy}{x^2+y^2} = \dfrac{x}{x^2+y^2} - \dfrac{y}{x^2+y^2} i$

b4.- Distributiva:$_1,\ z_2,\ z_3 \in \mathbb{C} \Rightarrow z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

b5.- Conmutativa: $\forall z_1,\ z_2 \in \mathbb{C} \Rightarrow z_1 z_2 = z_2 z_1$

Luego $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ es un grupo abeliano y al verificarse también la propiedad distributiva del producto respecto a la suma se verifica que $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es cuerpo conmutativo.

2.3. Homomorfismo entre cuerpos

Sean los cuerpos $(K_1, +, \cdot)$ y $(K_2, *, \perp)$. Se dice que la aplicación $f : K_1 \longrightarrow K_2$ es un homomorfismo de cuerpos si verifica:

a) $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in K_1$

b) $f(x \cdot y) = f(x) \perp f(y)$, $\forall x, y \in K_1$

Observación: hemos tomado el cuerpo $(K_1, +, \cdot)$ pero no queremos denotar por $+$ y $\cdot$ a la suma y al producto respectivamente, sino a cualquier par de operaciones en K_1 que verifiquen los axiomas de cuerpo.

2.4. El cuerpo $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$

En $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \; / x, y \in \mathbb{R}\}$ definimos las operaciones:
a) Suma: $\forall (x_1, x_2),\ (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ Es obvio que $(\mathbb{R}^2, +)$ es un grupo abeliano.
b) Producto.- $\forall (x_1, x_2),\ (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ se define:
$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 \cdot y_1 - x_2 \cdot y_2, x_{12} + x_2 \cdot y_1)$. Entonces $\mathbb{R}^{*2} = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ con la operación producto es también un grupo abeliano ya que verifica las siguientes propiedades:
Conmutativa.- $\forall (x_1, y_1),\ (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_2, y_2) \cdot (x_1, y_1)$
Asociativa.-$\forall (x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow (x_1, y_1) \cdot [(x_2, y_2) \cdot (x_3, y_3)] =$
$= [(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)] \cdot (x_3, y_3)$
Existencia de elemento neutro.- El elemento neutro es (1,0) ya que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow (x, y) \cdot (1, 0) = (1, 0) \cdot (x, y) = (x, y)$
Existencia de elemento simétrico.- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ su simétrico es $\left(\dfrac{x}{x^2 + y^2} \; , \; \dfrac{-y}{x^2 + y^2} \right)$
ya que $(x, y) \cdot \left(\dfrac{x}{x^2 + y^2} \; , \; \dfrac{-y}{x^2 + y^2} \right) = (1, 0)$
Además se verifica la propiedad **distributiva del producto respecto a la suma**, es decir $\forall (x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow (x_1, y_1) \cdot [(x_2, y_2) \cdot (x_3, y_3)] =$
$= [(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)] \cdot (x_3, y_3)$. Luego $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ es un cuerpo conmutativo

Vamos a establecer un homomorfismo entre los cuerpos $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ y $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$. Después veremos que este homomorfismo es inyectivo y exhaustivo, con lo cual será un isomorfismo. Consideremos la aplicación:

$$\begin{array}{lccc} \text{f:} & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & x+iy & \longrightarrow & \text{(x,y)} \end{array}$$

Esta aplicación es homomorfismo ya que $\forall x_1+iy_1,\ x_2+iy_2 \in \mathbb{C}$ cumple que :

1.- $f[(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)] = f[(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)] = (x_1+x_2\ ,\ y_1+y_2) =$
$= (x_1\ ,\ y_1)\ +\ (x_2,\ y_2) = f(x_1+iy_1)+f(x_2+iy_2)$

2.- $f[(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2)] = f[(x_1\cdot x_2 - y_1\cdot y_2)+i(x_{12}+x_2\cdot y_1)] =$
$= (x_1\cdot x_2 - y_1\cdot y_2\ ,\ x_{12}+x_2\cdot y_1) = (x_1\ ,\ y_1){\cdot}(x_2\ ,\ y_2) = f(x_1+iy_1)\cdot f(x_2+iy_2)$
Hasta aquí podemos asegurar que f es homomorfismo. Veamos que f es monomorfismo, es decir que f es inyectiva. Si $f(x_1+iy_1) = f(x_2+iy_2) \Rightarrow (x_1, y_1) =$
$= (x_2, y_2) \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{x}_1 = x_2 \\ \text{y}_1 = y_2 \end{cases}$

Tan solo nos queda probar que f es epimorfismo, es decir que f es exhaustiva pero esto es evidente ya que $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2\ \exists\ x+iy \in \mathbb{C}\ /\ f(x+iy) = (x,y)$
Por tanto $\mathbb{R}^2\ y\ \mathbb{C}$ son isomorfos, es decir algebraicamente equivalentes, de manera que lo mismo da que nos refiramos al complejo $x+iy$ que denotarlo en forma de par (x,y). Este isomorfismo permite representar en el plano un número complejo. Para representar el número complejo $x+iy$ representamos en el eje de abcisas la parte real y en el de ordenadas la parte imaginaria.

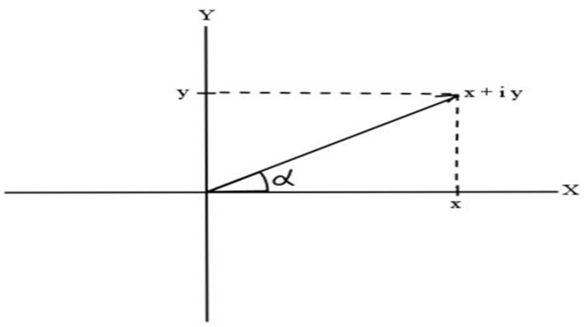

Figura 1: Representación gráfica de un número complejo

3. Forma polar de un número complejo

Dado el número complejo $z = x + iy$ llamamos módulo del complejo a la distancia del punto (x, y) al origen de coordenadas $O(0, 0)$. Se denota por $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Si $\vec{r}$ es el radio vector del complejo $z = x + iy$, es decir el vector que une los puntos $O(0, 0)$ y $P(x, y)$, este $\vec{r}$ forma un ángulo con el eje positivo de abcisas. A este ángulo se le llama argumento del número complejo.

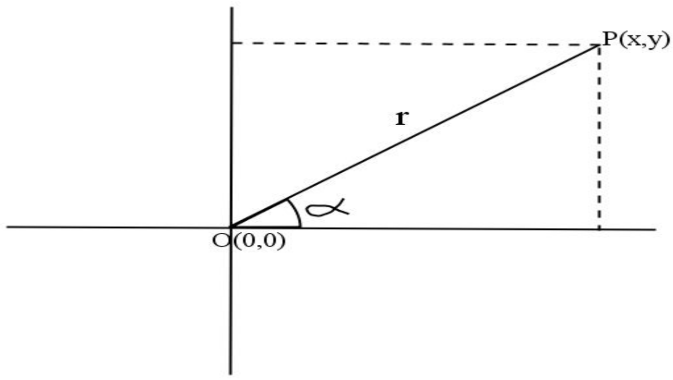

Figura 2: Forma polar de un complejo

Si nos fijamos en la figura 2 observamos que:
$tg\ \alpha = \dfrac{y}{x} \Rightarrow \alpha = arctg\ \dfrac{y}{x}$, $x = rcos\alpha$, $y = rsen\alpha$. El complejo se puede expresar como:
$z = x + iy = (x, y) = rcos\alpha + irsen\alpha = r(cos\alpha + isen\alpha) = r(cos\alpha\ \ sen\alpha)$.
A esta forma se le llama forma trigonométrica del complejo. Tenemos una nueva forma de expresar el número complejo. Si $z = x + iy$, su módulo vale $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, y su argumento es $\theta = arctg\ \dfrac{y}{x}$, en este caso la forma polar del complejo es $z = r_\theta$

Observación.- En forma binómica $z = x+iy$ o en forma de par $z = (x, y)$ es cómodo realizar operaciones de suma y resta, pero se hacen incómodas las operaciones de potenciación y radicación. En forma polar es penoso realizar sumas y restas de números imaginarios pero es fácil realizar operaciones de potenciación y radicación. También es fácil realizar en forma polar productos y cocientes.

Proposición.- Sean los complejos $z_1 = r_\alpha$, $z_2 = s_\beta$. Entonces:

a) $z_1 \cdot z_2 = (r \cdot s)_{\alpha+\beta}$

b) $z_1^n = (r^n)_{n\alpha}$

demostración

a)

$$\begin{cases} z_1 = r_\alpha & \Rightarrow \quad z_1 = r \cdot (cos\alpha + isen\alpha) \\ z_2 = r_\beta & \Rightarrow \quad z_2 = s \cdot (cos\beta + isen\beta) \end{cases}$$

Por tanto $z_1 \cdot z_2 = r \cdot s(cos\alpha + isen\alpha) \cdot (cos\beta + isen\beta)$. Si desarrollamos esta expresión obtenemos $z_1 \cdot z_2 = r \cdot s[(cos\alpha cos\beta - sen\alpha sen\beta) + i(cos\alpha sen\beta +$ $+ sen\alpha cos\beta) \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = r \cdot s[cos(\alpha+\beta) + isen(\alpha+\beta)] = (r \cdot s)_{\alpha+\beta}$

b)

$$z_1^n = (r_\alpha)^n = r_\alpha \cdot r_\alpha \cdot \overbrace{\cdots\cdots}^{n} r_\alpha \Rightarrow z_1^n = (r^n)_{n\alpha}$$

4. Raíces de números complejos

Sea $z = r_\alpha$ un complejo. Se dice que s_β es la raíz n-ésima de r_α, y se escribe $s_\beta = \sqrt[n]{r_\alpha}$ si se verifica que $r_\alpha = (s_\beta)^n$. Veamos cómo calcular raíces n-ésimas de complejos.

Dos números complejos son **iguales** si lo son sus módulos y sus argumentos difieren en un número entero de vueltas. Por tanto si $s_\beta = \sqrt[n]{r_\alpha}$ entonces:

$$r_\alpha = (s_\beta)^n \Rightarrow (s^n)_{n\beta} = r_\alpha \Rightarrow \begin{cases} \text{r} & = & \text{s}^n \\ \text{n } \beta & = & \alpha + 2k\pi \end{cases}$$

Luego $s = \sqrt[n]{r}$ y el argumento es $\beta = \dfrac{\alpha + 2k\pi}{n}$ donde $k \in \mathbb{Z}$

Si $K=0 \Rightarrow \beta_0 = \dfrac{\alpha}{n}$

Si $K=1 \Rightarrow \beta_1 = \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{2\pi}{n}$

Si $K=2 \Rightarrow \beta_2 = \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{4\pi}{n}$

....

Si $K=n-1 \Rightarrow \beta_{n-1} = \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{2(n-1)\pi}{n}$

Si $K=n \Rightarrow \beta_n = \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{2n\pi}{n} = \dfrac{\alpha}{n} + 2\pi \equiv \beta_0$

Podemos afirmar entonces que si $s_\beta = \sqrt[n]{r_\alpha} \Rightarrow \begin{cases} \text{s}= \sqrt[n]{r} \\ \beta = \dfrac{\alpha + 2k\pi}{n},\ k=0,\ 1, \ldots\ ..\ n-1 \end{cases}$

Ahora vamos a ver otra forma de expresar, de modo más sencillo, las raíces n-ésimas de un número complejo.

5. Fórmula de Euler

Teorema.- $e^{yi} = cos\ y + i\ sen\ y$

Demostración

Para las funciones $e^x,\ cos\ x,\ sen\ x$ son válidos los siguientes desarrollos de Mc-Laurin:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (*)$$

$$cos\ x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \quad (**)$$

$$sen\ x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (***)$$

Si en la expresión (*) ponemos $x = yi$ se obtiene:

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(yi)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n i^n}{n!} = \sum_{n\ par}^{\infty} \frac{y^n i^n}{n!} + \sum_{n\ impar}^{\infty} \frac{y^n i^n}{n!}$$

Si n es par $\Rightarrow n = 2k,\ k \in \mathbb{Z}$ y si n es impar $\Rightarrow n = 2k+1,\ k \in \mathbb{Z}$. Por tanto podemos poner que:

$$e^{iy} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{2k}\ i^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{2k+1}\ i^{2k+1}}{(2k+1)!} \Rightarrow e^{iy} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{2k}\ (i^2)^k}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{2k+1}\ (i^2)^k\ i}{(2k+1)!} \Rightarrow$$

$\Rightarrow e^{iy} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{2k}\ (-1)^k}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{2k+1}\ (-1)^k}{(2k+1)!}$. teniendo en cuenta (**) y (***) se obtiene $e^{yi} = cos\ y + i\ sen\ y$

Volvamos ahora a la raíz n-ésima de un complejo:

$$s_\beta = \sqrt[n]{r_\alpha} \Rightarrow s_\beta = \begin{cases} (\sqrt[n]{r})_{\beta_0} \\ (\sqrt[n]{r})_{\beta_1} \\ \ldots\ldots\ldots \\ (\sqrt[n]{r})_{\beta_{n-1}} \end{cases},\ \beta_k = \frac{\alpha + 2k\pi}{n},\ k = 0,\ 1,\ \ldots..,\ n-1$$

Estas son las n raíces n-ésimas de un complejo. Si pasamos cada una de estas raíces a forma binómica $\sqrt[n]{r}_{\beta_k} = \sqrt[n]{r}(cos\ \beta\ k + i\ sen\ \beta\ k) = \sqrt[n]{r}\ e^{i\beta_k}$

6. Argumento de un número complejo

Dado el complejo $z = x + iy = r_\theta$, el argumento Θ es uno de los posible ángulos que el radio vector de z forma con el eje positivo de abcisas tal y como se muestra en la figura 2. ¿Cómo podemos distinguir todos los posible ángulos en variable compleja? Cuando $z \neq 0$ llamaremos argumento principal de z y lo denotaremos por $Arg(z)$ al único valor perteneciente al intervalo $]-\pi,\ \pi[$ que verifica $Arg(z) = arctg\ \frac{y}{x}$

Veamos un ejemplo: obtener el argumento principal del siguiente conjunto de números complejos $\{z \in \mathbb{C}\ /\ Re(z) < 0,\ Im(z) = 0\}$. Si $z = x + 0i$ es un elemento de este conjunto entonces su representación gráfica vendrá dada por:

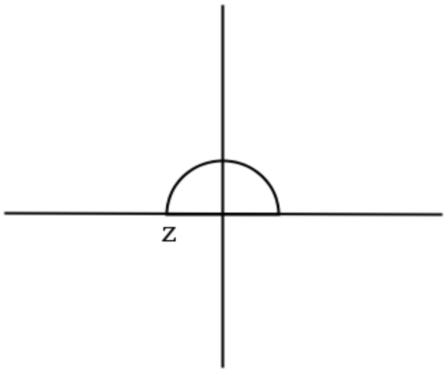

Figura 3: Representación gráfica de z=x+0i

Se tiene que $Arg(z) = artg\ \dfrac{o}{x} = arctg\ o \Rightarrow z = \pi$

Obtener el argumento principal del conjunto $\{z \in \mathbb{C}\ /\ Re(z) = 0,\ Im(z) > 0\}$. Si z es uno de los elementos de este conjunto, la reprentación gráfica de z es:

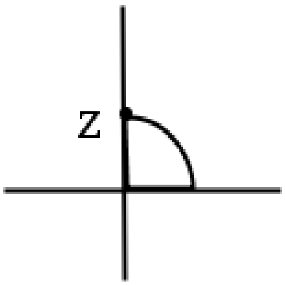

Figura 4: Representación gráfica de z=0+iy

Tenemos que $Arg(z) = arctg\ \dfrac{y}{0} = arctg(+\infty) = \dfrac{\pi}{2}$

Llamamos **argumento** del número complejo $z = x + iy$ a cualquiera de los ángulos que forma el su radio vector con el eje real positivo. Se representa por arg(z), es decir $arg(z) = \{Arg(z) + 2k\pi\ /\ k \in \mathbb{Z}\}$

En los ejemplo anteriores, si $z = x + 0i \Rightarrow arg(z) = \{\pi + 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\} =$
$= \{k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\}$

7. Fórmula de Moivre

Teorema.- $(cos\ \alpha + i\ sen\ \alpha)^n = cos\ n\alpha + i\ sen\ n\alpha$

Demostración

Se tiene que $1_\alpha = 1(cos\ \alpha + i\ sen\ \alpha) \Rightarrow (1_\alpha)^n = 1_{n\alpha} = (cos\ \alpha + i\ sen\ \alpha)^n \Rightarrow$ $(cos\ \alpha + i\ sen\ \alpha)^n = cos\ n\alpha + i\ sen\ n\alpha$

8. Conjugado de un complejo

Dado el complejo $z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$ llamaremos conjugado de z al complejo $\overline{z}$ obtenido al cambiar el signo de la parte imaginaria, es decir $\overline{z} = x - iy$. Gráficamente sería el simétrico de z respecto al eje real

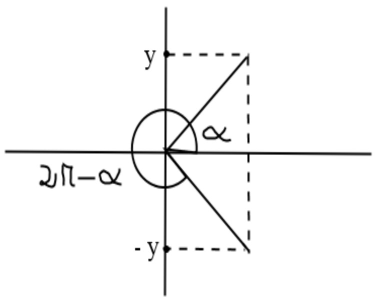

Figura 5: Representación gráfica del conjugado

Si $z = r_\alpha \Rightarrow \overline{z} = r_{2\pi-\alpha}$

Propiedades del conjugado

1.- $\overline{\overline{z}} = z$

2.- $z \cdot \overline{z} = |z|^2$ ya que $z \cdot \overline{z} = (x+iy) \cdot (x-iy) = x^2 - (yi)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$

3.- $\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

4.- $\overline{(z_1 \cdot z_2)} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

5.- $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

9. La proyección estereográfica de Riemann

¿Existe una equivalencia geométrica entre una esfera y el plano complejo?. Intuitivamente parece ser que ambas superficies no son equivalentes, la esfera es muy distinta a un plano. Supongamos una esfera descansando sobre un plano. Llamaremos punto S (sur) al único punto de contacto entre ambos y punto N (norte) a la antípoda del punto S (o también al simétrico de S respecto al círculo máximo llamado ecuador). Haremos corresponder a cada punto P de la esfera un punto P' de la siguiente manera:

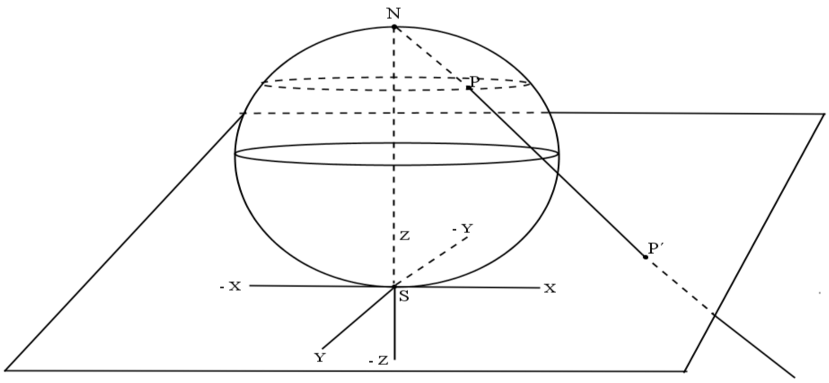

Figura 6: Esfera de Riemann

Unimos el punto N de la esfera con el punto P, tomando como imagen de P la intersección P' entre el plano y la recta NP. Vamos a formalizar todo esto analíticamente. Para fijar ideas, supongamos que el plano complejo es el plano $Z = 0$, tomando como origen de coordenadas en este plano el punto S(0,0) (o en el espacio S(0,0,0)). Tomemos también, sin pérdida de generalidad, el centro de la esfera en el punto C(0,0,1), lo que nos indica que el radio de la esfera es 1. Entonces las coordenadas de N son (0,0,2). La ecuación de la esfera viene dada por la expresión: $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1^2$, es decir que la ecuación de la esfera es $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$. Sea $P(a, b, c)$ un punto cualquiera de la esfera. La recta NP, r_{NP} tendrá como vector director $\vec{v} = \vec{NP} = (a, b, c-2)$ y como pasa por el punto $N(0, 0, 2)$ su ecuación paramétrica será $r_{NP} : \begin{cases} \text{x=at} \\ \text{y=bt} \\ \text{z=2+(c-2)t} \end{cases}$

El punto P' es $P' = r_{NP} \cap (z = 0)$ y por tanto $2+(c-2)t = 0 \Rightarrow t = \dfrac{2}{2-c}$. Si sustituimos este valor de t en la ecuación paramétrica de la recta que pasa por N y por P, obtenemos que $x = \dfrac{2a}{2-c}$, $y = \dfrac{2b}{2-c}$, $z = 2+\dfrac{2}{2-c}(c-2) = 0$. Las coordenadas del punto P', imagen de $P(a, b, c)$ son $P' = \left(\dfrac{2a}{2-c}, \dfrac{2b}{2-c}, 0\right)$.
Veamos que un círculo en la esfera paralelo al ecuador se proyecta en un círculo en el plano complejo. Sea el círculo en la esfera paralelo al ecuador $z = c$, con centro por tanto en $(0, 0, c)$. La ecuación de este círculo es $x^2+y^2 = c^2$. Si tomamos un punto de este plano P(a,b) (en el espacio P(a,b,c) siendo c constante) verifica que $a^2 + b^2 = c^2$. Hemos visto que la proyección estereográfica de este punto es $P'(\dfrac{2a}{2-c}, \dfrac{2b}{2-c}, 0)$ y estos puntos P' están en un círculo de centro $(0, 0)$ y radio $r = \dfrac{2|c|}{2-c}$ ya que $d(P', (0, 0)) = \dfrac{2|c|}{2-c}$:

$$\sqrt{\left(\frac{2a}{2-c}\right)^2 + \left(\frac{2b}{2-c}\right)^2} = \sqrt{\frac{4a^2}{(2-c)^2} + \frac{4b^2}{(2-c)^2}} = \frac{2}{2-c}\sqrt{c^2} = \frac{2|c|}{2-c}.$$

Un minúsculo círculo muy próximo a N (es decir $c \approx 2$) tendrá como proyección un círculo en el plano con un enorme radio. El punto N no puede ser proyectado sobre el plano, pues su proyección sería $N'(\frac{0}{0}, \frac{0}{0}, 0)$, es decir que las coordenadas de N estarían indeterminadas. La imagen del punto N es el punto del infinito (se llama así por la razón anterior del radio infinito).

La aplicación anteriormente descrita entre la esfera y el plano es biyectiva. Dado un punto P(a,b) del plano z=0 la proyección estereográfica de este punto sobre la esfera la obtenemos hallando el punto de intersección de la recta NP, N(0,0,2), P(a,b,0) con la esfera $x^2 + t^2 + (z-1)^2 = 1$

$$r_{NP}: \begin{cases} \text{N(0,0,2)} \\ \text{P(a,b,0)} \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \vec{NP} = (a, b, -2)$$

La ecuación paramétrica de la recta NP es:

$$r_{NP}: \begin{cases} \text{x=at} \\ \text{y=bt} \\ \text{z=2-2t} \end{cases}$$

Si sustituimos en la ecuación de la esfera: $a^2t^2 + b^2t^2 + (-2t+1)^2 = 1$ con lo cual:

$(a^2 + b^2 + 4)t^2 \cdot 4t + 1 = 1 \Rightarrow \boxed{\text{t=0}}$ o bien $\boxed{t = \dfrac{a^2 + b^2 + 4}{4}}$. Por lo tanto el punto P' de la esfera que es proyección del punto del plano P(a,b,0) es:

$$\left(\frac{a^2 + b^2 + 4}{4}, \frac{a^2 + b^2 + 4}{4} \cdot b, -\frac{a^2 + b^2}{2}\right).$$

Recapitulando, hemos establecido dos cosas:

1ª Que una esfera menos un miserable punto es equivalente a un plano.

2ª Que también podemos hacer que la esfera y el plano sean equivalentes, en vez de quitando un punto a la esfera, añadiendo un punto al plano. Parece una estupidez añadir un punto a un plano, ¿ dónde lo ponemos ? Sin embargo no lo es. se puede definir perfectamente un "punto en el infinito"que será la imagen del puñetero punto N de la esfera, el único que quedaba sin emparejar. Esta construcción se llama compacificación de Alexandrof.

Miguel Galo Fernández
Noviembre de 2006

Índice