

**RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DEL EXAMEN DE AMPLIACIÓN
DE MATEMÁTICAS 18/01/2011**

Calcular $\int_{\Gamma} \frac{e^{\pi Z}}{Z^4 + (10 - 4i)Z^3 + (29 - 36i)Z^2 + (8 - 96i)Z - 48 - 64i} dZ$, siendo Γ el circulo de centro i (esto es el punto $(0,1)$) y radio 2.

Solución:

En primer lugar vamos a calcular las raíces del denominador. Si el polinomio complejo $Z^4 + (10 - 4i)Z^3 + (29 - 36i)Z^2 + (8 - 96i)Z - 48 - 64i$, tiene raíces reales deben ser nulas sus partes reales e imaginaria. Como:

$$Z^4 + (10 - 4i)Z^3 + (29 - 36i)Z^2 + (8 - 96i)Z - 48 - 64i = Z^4 + 10Z^3 + 29Z^2 + 8Z - 64 -$$

$-(4Z^3 + 36Z^2 + 96Z + 64)i$, las raíces del polinomio complejo del denominador se caracterizan por ser nulas sus partes real e imaginaria, por tanto vienen dadas por:

$$Z^4 + 10Z^3 + 29Z^2 + 8Z - 48 = 0 \quad \text{y} \quad 4Z^3 + 36Z^2 + 96Z + 64 = 0$$

$Z^4 + 10Z^3 + 29Z^2 + 8Z - 48 = 0$, lo resolvemos por Ruffini:

	1	10	29	8	-48
1		1	11	40	48
	1	11	40	48	0
-3		-3	-24	-48	
	1	8	16	0	
-4		-4	-16		
	1	4	0		
-4		-4			
	1	0			

Luego:

$$Z^4 + 10Z^3 + 29Z^2 + 8Z - 48 = (Z - 1)(Z + 3)(Z + 4)^2$$

Hacemos lo mismo con el polinomio de la parte imaginaria:

$4Z^3 + 36Z^2 + 96Z + 64 = 0$, hallamos las raíces por Ruffini:

	4	36	96	64
-1		-4	-32	-64
	4	32	64	0
-4		-16	-64	
	4	16		
-4	0		-16	
	4	0		

Luego $4Z^3 + 36Z^2 + 96Z + 64 = 4(Z + 1)(Z + 4)^2$. Entonces el polinomio del denominador mencionado se puede expresar como:

$Z^4 + (10 - 4i)Z^3 + (29 - 36i)Z^2 + (8 - 96i)Z - 48 - 64i = (Z - 1)(Z + 3)(Z + 4)^2 + 4(Z + 1)(Z + 4)^2 i$, y las raíces son aquellos valores de Z para los cuales se verifica simultáneamente :

$(Z - 1)(Z + 3)(Z + 4)^2 = 0$ y $4(Z + 1)(Z + 4)^2 = 0$, podemos afirmar que $Z = -4$ es una raíz real doble, veamos cuales serían las raíces complejas. Si dividimos el polinomio por $(Z + 4)^2$ nos queda:

$$\frac{Z^4 + (10 - 4i)Z^3 + (29 - 36i)Z^2 + (8 - 96i)Z - 48 - 64i}{(Z + 4)^2} = (Z - 1)(Z + 3) + 4(Z + 1)i, \text{ las}$$

raíces de este polinomio vienen dadas por

$(Z - 1)(Z + 3) + 4(Z + 1)i = 0$, si desarrollamos este polinomio nos queda en la forma:

$Z^2 + (2 + 4i)Z + (-3 + 4i) = 0$, que resolviendo por la ecuación de 2º grado:

$$Z = \frac{-2 - 4i \pm \sqrt{(2 + 4i)^2 - 4(-3 + 4i)}}{2} = \frac{-2 - 4i}{2} = -1 - 2i, \text{ que es raíz doble, ya tenemos}$$

las 4 raíces del polinomio, $z = -4$ raíz doble que no está en la circunferencia de centro $(0,1)$ y radio 2, y $Z = -1 - 2i$ raíz doble que sí está en la circunferencia