

EJERCICIOS TEMA 5

INTEGRACIÓN POR EL MÉTODO DE LOS RESIDUOS

1º Determinar el residuo de todos los polos de

$$f(z) = \frac{e^z}{(z^2+1) \cdot z^2}$$

$$z^2 \cdot (z^2+1) = 0 \begin{cases} z^2 = 0 \Rightarrow z = 0 \text{ (doble)} \\ z = i \\ z = -i \end{cases}$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^m \cdot f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} z^m \cdot \frac{e^z}{(z^2+1)z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^{m-2} \cdot e^z}{(z^2+1)}$$

$$= \begin{cases} \text{si } m=2 \text{ vale } 1 \\ \text{si } m > 2 \text{ vale } 0 \end{cases}$$

luego $z=0$ es un polo doble

$$\lim_{z \rightarrow i} (z-i)^m \cdot f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{(z-i)^{m-1} e^z}{z^2 (z+i)} = \begin{cases} \frac{e^i}{i^2(2i)} & \text{si } m=1 \\ 0 & \text{si } m > 1 \end{cases}$$

$z=i$ es un polo simple

$z=-i$ es un polo simple.

luego

$$\text{Res}(f(z), 0) = \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} \left[z^2 f(z) \right]_{z=0} = \frac{d}{dz} \left[\frac{e^z}{z^2+1} \right]_{z=0} = 1.$$

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{e^z}{z^2+1} \right] = \frac{e^z(z^2+1) - z \cdot e^z}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{e^z}{z^2+1} \right]_{z=0} = 1.$$

Al ser $z=i$ polo simple:

$$\text{Res}(f(z), i) = \frac{p(i)}{q'(i)}$$

$$p(z) = e^z \Rightarrow p(i) = e^i;$$

$$q(z) = (z^2+1)z^2 = z^4 + z^2$$

$$q'(z) = 4z^3 + 2z$$

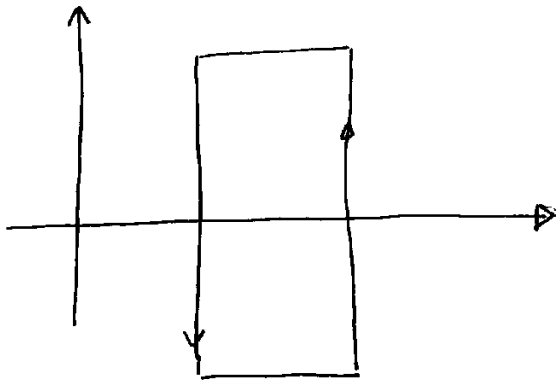
$$q'(i) = 4i^3 + 2i = -4i + 2i = -2i$$

$$\text{luego } \text{Res}(f(z), i) = \frac{e^i}{-2i} = -\frac{1}{2} i \cdot e^i$$

$$\text{Res}(f(z), -i) = \frac{p(-i)}{q'(-i)} = \frac{e^{-i}}{6i} = -\frac{1}{6} i e^{-i} = -\frac{i}{6e^i}$$

2º Calcular la integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{z(z-1)} dz \quad \text{donde } C \text{ es la trayectoria}$$



La función $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ tiene dos polos simples,

$z_0 = 0$ y $z_1 = 1$. Se tiene que $z_0 = 0 \notin C$. Se pueden dar dos casos:

1º Que $z_1 = 1 \notin \text{Int } C \Rightarrow f$ es holomorfa en C por

$$\text{tanto } \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{z(z-1)} dz = 0$$

2º Que $z_1 = 1 \in \text{Int } C$. Si aplicamos el teorema de los residuos:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{z(z-1)} dz = \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i \text{Res}(f(z), 1) = \text{Res}(f(z), 1) =$$

$$\text{Res}(f(z), 1) = \frac{P(1)}{q'(1)} = \frac{1}{1} = 1.$$

$$P(z) = 1 \Rightarrow P(1) = 1$$

$$q(z) = z(z-1) = z^2 - z \Rightarrow q'(z) = 2z - 1 \Rightarrow q'(1) = 1$$

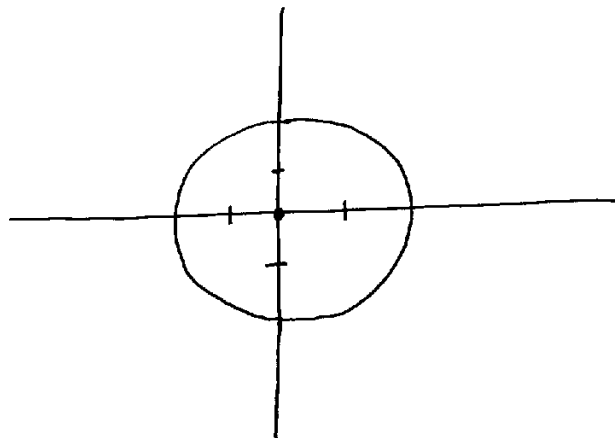
Por tanto:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{1}{z(z-1)} dz = 1.$$

3º Calcular la integral

$$\int_c z \cdot \text{sen} \frac{1}{z} dz \quad \text{siendo } c \text{ la circunferencia}$$

de centro 0 y radio 2



$z=0$ es un polo simple de $f(z) = z \text{sen} \frac{1}{z}$ ya que

$$\lim_{z \rightarrow 0} z \left(z \cdot \text{sen} \frac{1}{z} \right) = 0 \cdot \text{sen} \infty = 0$$

El polo $z=0$ está en el interior de la circunferencia y por tanto:

$$\int_C z \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{z} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), 0)$$

Como $f(z) \in H(\mathbb{C} \setminus \{0\}) = H(A(0; 0, +\infty))$ existe en este anillo el desarrollo en serie de Laurent de f . Se tiene que:

$$\operatorname{sen} z = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall z \in \mathbb{C} \text{ (en particular}$$

$$\forall z \in \mathbb{C} - \{0\}) \text{ Entonces, } \forall z \in \mathbb{C} - \{0\}:$$

$$\operatorname{sen} \frac{1}{z} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \cdot \frac{1}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{z^{2n+1}} \text{ y por tanto:}$$

$$f(z) = z \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{z} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \cdot \frac{1}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{z^n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(z) = 1 + \sum_{n \geq 1} (-1)^n \cdot \frac{1}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{z^n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(z) = 1 - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{z} + \sum_{n \geq 2} (-1)^n \cdot \frac{1}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{z^n}$$

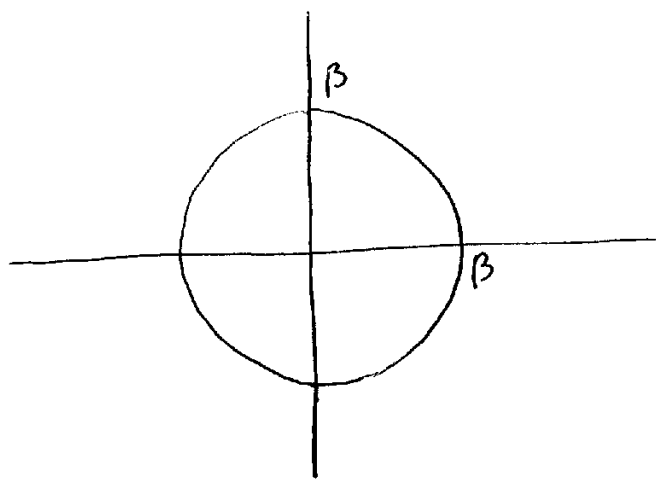
luego $\operatorname{Res}(f(z), 0) = -\frac{1}{6}$. Entonces:

$$\int_C z \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{z} dz = -2\pi i \cdot \frac{1}{6} = -\frac{\pi}{3} i$$

4º determinar la integral :

$$\int_C \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz \text{ donde } C \text{ es la circunferencia de}$$

centro 0 y radio $\beta > 1$



$$f(z) = \frac{e^z}{z(1-z)^3} \text{ tiene dos polos.}$$

- $z = 0$ es polo simple
- $z = 1$ es polo triple o de multiplicidad 3.

Aplicando el teorema de los residuos:

$$\int_C \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz = 2\pi i \cdot \left[\operatorname{Res} \left(\frac{e^z}{z(1-z)^3}, 0 \right) + \operatorname{Res} \left(\frac{e^z}{z(1-z)^3}, 1 \right) \right]$$

$$\text{Res} \left[\frac{e^z}{z(1-z)^3}, 0 \right] = \frac{f(0)}{g'(0)} = \frac{1}{1} = 1.$$

$$f(z) = e^z \Rightarrow f(0) = 1$$

$$g(z) = z(1-z)^3 \Rightarrow g'(z) = (1-z)^3 + 3z(1-z)^2(-1)$$

$$g'(z) = (1-z)^2(1-4z) \Rightarrow g'(0) = 1$$

$$\text{Res} \left[\frac{e^z}{z(1-z)}, 1 \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{(3-1)!} \cdot \frac{d^2}{dz^2} \left[(z-1)^3 \cdot \frac{e^z}{z(1-z)^3} \right] =$$

$$= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2}{dz^2} \left(-\frac{e^z}{z} \right) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dz} \left(-\frac{e^z \cdot z + e^z}{z^2} \right)$$

$$= 0.$$

Por tanto:

$$\int_C \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz = 2\pi i$$

5.º Calcular la integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z-1} dz$$

Se supone que C es una curva cerrada, no nos dicen de qué curva se trata.

La función $f(z) = \frac{e^z}{z-1}$ tiene dos singularidades aisladas en $z=0$ y $z=1$.

Pueden ocurrir cuatro casos:

a) Que $z_0=0$ y $z_1=1$ no pertenezcan al dominio que limita C . En este caso si C es cerrada:

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

b) Que $z_0=0 \in \text{dominio}$ que encierra $C = D$, pero $z_1 \notin D$. Entonces:

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), 0)$$

c) Que $z_1=1 \in D$, pero $z_0=0 \notin D$. Al igual que en b):

$$\int_D f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), 1)$$

d) Que $z_0, z_1 \in D$, y de nuevo aplicando el teorema de los residuos:

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \left[\text{Res}(f(z), 0) + \text{Res}(f(z), 1) \right]$$

$z=1$ es un polo simple de $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z-1}$ y por

tanto:

$$\text{Res}(f(z), 1) = \frac{p(1)}{q'(1)} = e$$

$$p(z) = e^{\frac{1}{z}} \Rightarrow p(1) = e$$

$$q(z) = z-1 \Rightarrow q'(z) = 1 \Rightarrow q'(1) = 1$$

$z=0$ es una singularidad esencial y por tanto hemos de buscar el término b_1 en el desarrollo de Laurent. Recordemos que:

i) el desarrollo de Mc-Laurin de e^z es:

$$e^z = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} z^n \Rightarrow e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{z^n}$$

ii) la serie geométrica es convergente si $|z| < 1$ y como estamos en un entorno de $z=0$ la serie

geométrica es convergente. Se tiene que:

$$\sum_{n \geq 0} z^n = \frac{1}{1-z} \Rightarrow \frac{1}{z-1} = - \sum_{n \geq 0} z^n =$$

$$= - (1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots) \quad \text{Por tanto pode-}$$

mos poner:

$$f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z} = - (1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots) \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!} \frac{1}{z^3} + \dots \right)$$

$$\Rightarrow f(z) = - \left[\left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{n!} + \dots \right) + \left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots \right) \cdot \frac{1}{z} + \dots \right]$$

Por tanto b_1 , que es el coeficiente de $\frac{1}{z}$, vale:

$$b_1 = - \left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots \right) = - \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} 1^n = 1 - e^1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_1 = 1 - e.$$

luego:

$$\text{Res}(f(z), 0) = 1 - e$$

Por tanto la solución en los casos b, c, d es:

$$b) \oint_c f(z) dz = 2\pi i \cdot (1 - e) = -2\pi i e$$

$$c) \oint_c f(z) dz = 2\pi i e$$

$$d) \oint_c f(z) dz = 2\pi i (e + 1 - e) = 2\pi i$$

6º Sea $0 < x < 1$ y sea $\theta \in \mathbb{R}$. Demostrar que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-x^2}{1-2x \cos \theta + x^2} d\theta = 1.$$

Solución:

$$\text{Hacemos } \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{Sea } z = e^{i\theta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dz = i \cdot e^{i\theta} d\theta \Rightarrow dz = iz d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{1}{iz} dz.$$

Luego:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1-x^2}{1-2x \cos \theta + x^2} d\theta = \int_{|z|=1} \frac{1-x^2}{1-2x \cdot \frac{z+z^{-1}}{2} + x^2} \cdot \frac{1}{iz} dz =$$

$$= \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{1-x^2}{z \left[1 - x \left(z + \frac{1}{z} \right) + x^2 \right]} dz = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{1-x^2}{z - z^2 x - x + zx^2} dz =$$

$$\frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{1-x^2}{-xz^2 + (1+x^2)z - x} dz$$

$$-xz^2 + (1+x^2)z - x = 0 \Rightarrow xz^2 - (1+x^2)z + x = 0$$

$$z = \frac{1+x^2 \pm \sqrt{1+2x^2+x^4-4x^2}}{2x} = \frac{1+x^2 \pm \sqrt{(x^2-1)^2}}{2x}$$

$$z = \frac{1+x^2 \pm (x^2-1)}{2x} = \begin{cases} \frac{1+x^2+x^2-1}{2x} = x \\ \frac{1+x^2-x^2+1}{2x} = \frac{1}{x} \end{cases}$$

$|z|=1$ es la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio

1. Como el polo $z=x$ verifica que $|x|<1$ está dentro de esta circunferencia y al ser $z=\frac{1}{x}>1$

este polo no está en esta circunferencia. Además estos polos son, obviamente, polos simples. Luego:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1-x^2}{1-2x\cos\theta+x^2} d\theta = \frac{1}{i} \cdot 2\pi i \cdot \text{Res}(f(z), x) \text{ siendo}$$

$$f(z) = \frac{1-x^2}{-xz^2 + (1+x^2)z - x}$$

$$\text{Res}(f(z), x) = \frac{p(x)}{q'(x)} = \frac{1-x^2}{1-x^2} = 1$$

$$p(z) = 1-x^2 \Rightarrow p(x) = 1-x^2$$

$$q(z) = -xz^2 + (1+x^2)z - x \Rightarrow q'(z) = -2xz + 1+x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q'(x) = -2x^2 + 1+x^2 = 1-x^2$$

luego:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1-x^2}{1-2x\cos\theta+x^2} d\theta = \frac{1}{i} \cdot 2\pi i \cdot 1 = 2\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-x^2}{1-2x\cos\theta+x^2} d\theta = 1 \quad \text{que es lo que}$$

se pretendía demostrar.

El ejercicio 7 está hecho en los apuntes, página 19.

8) Sea $k > 1$. Calcular la integral:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{k + \sin x}$$

Tenemos que $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$. Hacemos el cambio de variable $z = e^{ix} \Rightarrow dx = \frac{1}{iz} dz$ y la integral queda como:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{k + \sin x} = \int_{|z|=1} \frac{\frac{1}{iz} dz}{k + \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}} = \int_{|z|=1} \frac{1}{iz \left(k - \frac{z^2 - 1}{2iz} \right)} dz$$

$$= \int_{|z|=1} \frac{1}{2ki - \frac{z^2 - 1}{2}} dz = \int_{|z|=1} \frac{2}{-z^2 + 2ki + 1} dz =$$

$$= -2 \int \frac{1}{z^2 - 2kiz + 1} dz$$

$$z^2 - 2kiz + 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{2ki \pm \sqrt{-4k^2 + 4}}{2} = \begin{cases} ki + \sqrt{1-k^2} \\ ki - \sqrt{1-k^2} \end{cases}$$

La función $f(z) = \frac{1}{z^2 - 2kiz + 1}$ tiene dos polos simples:

$$z_0 = ki + \sqrt{1-k^2} = (k + \sqrt{1-k^2})i$$

$$z_1 = ki - \sqrt{1-k^2}i = (k - \sqrt{1-k^2})i$$

¿Están estos polos en el interior de la circunferencia de centro (0,0) y radio 1?

Se tiene que

$$|z_0| = k + \sqrt{k^2 - 1} > 1 \Rightarrow \text{esto est\u00e1 fuera de } |z| = 1.$$

$$|z_1| = k - \sqrt{k^2 - 1} < 1$$

$$k - \sqrt{k^2 - 1} < 1 \Leftrightarrow k < 1 + \sqrt{k^2 - 1} \Leftrightarrow k^2 < (1 + \sqrt{k^2 - 1})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k^2 < 1 + 2\sqrt{k^2 - 1} + k^2 \text{ lo cual es cierto.}$$

Luego:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{k + \cos x} = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), k - \sqrt{k^2 - 1})$$

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 2ki z + 1} \Rightarrow \operatorname{Res}(f(z), (k - \sqrt{k^2 - 1})i) = \frac{p[(k - \sqrt{k^2 - 1})i]}{q'[(k - \sqrt{k^2 - 1})i]}$$

$$p(z) = 1 \Rightarrow p(k - \sqrt{k^2 - 1}) = 1$$

$$q(z) = z^2 - 2ki z + 1 \Rightarrow q'(z) = 2z - 2ki \Rightarrow$$

$$q'[(k - \sqrt{k^2 - 1})i] = \cancel{2ki} - 2\sqrt{k^2 - 1}i + \cancel{2ki} = -2\sqrt{k^2 - 1}i$$

Entonces $\operatorname{Res}(f(z), (k - \sqrt{k^2 - 1})i) = -\frac{1}{2\sqrt{k^2 - 1}i}$ y por lo tanto.

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{k + \sec x} dx = 4\pi i \cdot \frac{-1}{2\sqrt{k^2-1}i} = \frac{-2\pi}{\sqrt{k^2-1}}$$

9º) calcular las integrales:

$$a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} dx$$

$$p(x) = x^2$$

$$q(x) = x^4 + x^2 + 1 = \left(x^2 - \frac{1+\sqrt{3}i}{4}\right) \left(x^2 - \frac{1-\sqrt{3}i}{4}\right)$$

$$x^4 + x^2 + 1 = 0; (x^2)^2 + x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$

$$x^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{4}$$

se verifica:

1º $p(x)$ y $q(x)$ son primos entre si

2º grado $q(x) >$ grado $p(x) + 2$

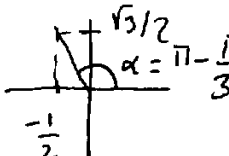
3º $q(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

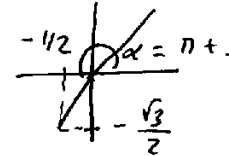
Aplicando la proposición 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} dx = 2\pi i \sum_{i=1}^n \text{Res} \left[\frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}, z_i \right] \text{ siendo } z_i \text{ los}$$

ceros de $q(x)$ en el semiplano positivo. Vamos a calcular z_i . Tendremos que:

$$x^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \quad \begin{cases} -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \stackrel{(*)}{=} e^{2\pi i/3} = 1_{2\pi/3} \\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \stackrel{(**)}{=} e^{4\pi i/3} = 1_{4\pi/3} \end{cases}$$

(*)  $\alpha = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

(**)  $\alpha = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

$$x^2 = 1_{2\pi/3} \Rightarrow x = \sqrt{1_{2\pi/3}} \begin{cases} 1_{\pi/3} = e^{\pi/3 i} \text{ plano positivo} \\ 1_{4\pi/3} = e^{4\pi/3 i} \text{ semiplano negativo} \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{2\pi/3 + 2k\pi}{2} = \begin{cases} \frac{2\pi/3}{2} = \frac{\pi}{3} \\ \frac{2\pi/3 + 2\pi}{2} = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

$$x^2 = 1_{4\pi/3} \Rightarrow x = \sqrt{1_{4\pi/3}} \begin{cases} 1_{2\pi/3} = e^{2\pi/3 i} \text{ plano positivo} \\ 1_{5\pi/3} = e^{5\pi/3 i} \text{ semiplano negativo} \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{4\pi/3 + 2k\pi}{2} = \begin{cases} \frac{4\pi/3}{2} = \frac{2\pi}{3} \\ \frac{4\pi/3 + 2\pi}{2} = \frac{2\pi}{3} + \pi = \frac{5\pi}{3} \end{cases}$$

luego $z_0 = e^{\pi/3 i}$ $z_1 = e^{2\pi/3 i}$

$$\text{Res} \left(\frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}, e^{\pi/3 i} \right) = \frac{p(e^{\pi/3 i})}{q'(e^{\pi/3 i})} = \frac{e^{2\pi/3 i}}{e^{\pi i} (4 + 2e^{1/3})} = \frac{e^{-\frac{1}{3}\pi i}}{4 + 2e^{1/3}}$$

$$p(z) = z^2 \Rightarrow p(e^{\pi/3 i}) = e^{2\pi/3 i}$$

$$q(z) = z^4 + z^2 + 1 \Rightarrow q'(z) = 4z^3 + 2z \Rightarrow q'(e^{\pi/3 i}) = +4e^{\pi i} + 2e^{\pi/3 i}$$

$$\text{Res} \left(\frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}, e^{2\pi/3 i} \right) = \frac{p(e^{2\pi/3 i})}{q'(e^{2\pi/3 i})} = \frac{e^{\frac{2}{3}\pi i}}{e^{\pi i} (4 + 2e^{2/3})}$$

$$p(e^{2\pi/3 i}) = e^{\frac{4}{3}\pi i}$$

$$q'(z) = 4z^3 + 2z^2 \Rightarrow q'(e^{2\pi/3 i}) = 4e^{2\pi i} + 2e^{\frac{4}{3}\pi i}$$

$$\text{ luego Res} \left(\frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}, e^{\frac{2\pi}{3} i} \right) = \frac{e^{-\frac{2}{3}\pi i}}{4 + 2e^{2/3}}$$

Entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} dx = 2\pi i \left[\frac{e^{-\frac{1}{3}\pi i}}{4 + 2e^{1/3}} + \frac{e^{\frac{4}{3}\pi i}}{4 + 2e^{1/3}} \right]$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{e^{\frac{1}{3}\pi i}}{4 + 2e^{1/3}} \left[\frac{1}{e} + e^4 \right]$$

b) Calcular la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^6}$$

$$p(x) = 1$$

$$q(x) = 1 + x^6$$

1º $p(x)$ y $q(x)$ son primos entre si

2º grado $q(x) >$ grado $p(x) + 2$

$$3^{\circ} \quad g(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Se verifican las condiciones de la proposición 1.

$$1 + x^6 = 0 \Rightarrow x^6 = -1 \Rightarrow x = \sqrt[6]{-1} = \sqrt[6]{1} \pi$$

$x = \sqrt[6]{1 \pi}$

$1^{\frac{\pi}{6}} = e^{\frac{\pi}{6} i}$ semiplano positivo
 $1^{\frac{\pi}{2}} = e^{\frac{\pi}{2} i}$ "
 $1^{\frac{5\pi}{6}} = e^{\frac{5\pi}{6} i}$ "
 $1^{\frac{7\pi}{6}} = e^{\frac{7\pi}{6} i}$ semiplano negativo
 $1^{\frac{9\pi}{6}} = e^{\frac{9\pi}{6} i}$ "
 $1^{\frac{11\pi}{6}} = e^{\frac{11\pi}{6} i}$ "

$\beta = \frac{\alpha + 2K\pi}{n} = \frac{\pi + 2K\pi}{6}$

$\downarrow$
 $K = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

$\beta_0 = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$ posit.
 $\beta_1 = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$ pos
 $\beta_2 = \frac{5\pi}{6} = 150^\circ$ pos
 $\beta_3 = \frac{7\pi}{6} = 210^\circ$ neg.
 $\beta_4 = \frac{9\pi}{6} = 270^\circ$ neg
 $\beta_5 = \frac{11\pi}{6} = 330^\circ$ neg

Los ceros de $q(z) = 0$ en el semiplano positivo son:

$$z_0 = e^{\frac{\pi}{6}i} \quad z_1 = e^{\frac{\pi}{2}i} \quad z_2 = e^{\frac{5\pi}{6}i}$$

duogo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^6} = 2\pi i \left[\text{Res} \left(\frac{1}{1+x^6}, e^{\frac{\pi}{6}i} \right) + \text{Res} \left(\frac{1}{1+x^6}, e^{\frac{\pi}{2}i} \right) + \text{Res} \left(\frac{1}{1+x^6}, e^{\frac{5\pi}{6}i} \right) \right]$$

15

$$\text{Res} \left(\frac{1}{1+z^6}, e^{\frac{\pi}{6}i} \right) = \frac{p(e^{\frac{\pi}{6}i})}{q'(e^{\frac{\pi}{6}i})} = \frac{1}{6 e^{\frac{5\pi}{6}i}}$$

$$p(z) = 1$$

$$q(z) = 1+z^6 \Rightarrow q'(z) = 6z^5$$

$$p(e^{\frac{\pi}{6}i}) = 1$$

$$q'(e^{\frac{\pi}{6}i}) = 6 \cdot e^{\frac{5\pi}{6}i}$$

$$q'(e^{\frac{\pi}{2}i}) = 6 \cdot e^{\frac{5\pi}{2}i}$$

$$q'(e^{\frac{5\pi}{6}i}) = 6 \cdot e^{\frac{25\pi}{6}i}$$

$$\text{Res} \left(\frac{1}{1+z^6}, e^{\frac{\pi}{2}i} \right) = \frac{1}{6 e^{\frac{5\pi}{2}i}}$$

$$\text{Res} \left(\frac{1}{1+z^6}, e^{\frac{5\pi}{6}i} \right) = \frac{1}{6 e^{\frac{25\pi}{6}i}}$$

Luego:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^6} = 2\pi i \cdot \frac{1}{6 \cdot e^{5\pi i}} \left(e^{-\frac{1}{6}} + e^{-\frac{1}{2}} + e^{-\frac{5}{6}} \right)$$

10:) Calcular la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{x-1} dx$$

Se trata de una integral de Fourier.

$$\begin{aligned} P(x) &= 1 \\ q(x) &= x-1 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} P(x) \text{ y } q(x) \text{ son primos entre si, } a=3>0 \end{array} \right.$$

1º grado q y grado $P+1$

$$2^\circ \quad q(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

3º $q(z)=0 \Rightarrow z=1$ es el cero en el semiplano superior.

Aplicando la proposición 3:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x-1} \cdot \cos 3x dx = \operatorname{Re} \left[2\pi i \cdot \operatorname{Res} \left(\frac{e^{3zi}}{z-1}, 1 \right) \right]$$

$$P(z) = e^{3zi} \Rightarrow P(1) = e^{3i}$$

$$q(z) = z-1 \Rightarrow q'(z) = 1 \Rightarrow q'(1) = 1$$

luego:

$$\operatorname{Res} \left(\frac{e^{3zi}}{z-1}, 1 \right) = \frac{e^{3i}}{1} = e^{3i} = \cos 3 + i \sin 3$$

$$2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{e^{3zi}}{z-1}, 1 \right) = 2\pi i \cos 3 - 2\pi \sin 3$$

Entonces :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{x-i} dx = \operatorname{Re} (2\pi i \cos 3 - 2\pi \sin 3) = -2\pi \sin 3$$

11º) Sean $a > 0$ y $b > 0$. Calcular:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} dx$$

de nuevo se trata de una integral de Fourier.

$$p(x) = 1$$

$$q(x) = (x^2+a^2)(x^2+b^2) \quad \left\{ \begin{array}{l} p(x) \text{ y } q(x) \text{ son primos entre si} \\ \text{y adem\'as } a = 1 > 0 \end{array} \right.$$

1º) grado $q >$ grado $p+1$

$$2^\circ \quad q(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$q(x) = (x^2+a^2)(x^2+b^2) = 0 \Rightarrow$$

$$x = ai$$

$$x = -ai$$

$$x = bi$$

$$x = -bi$$

los ceros en el semiplano positivo son $z_0 = ai$ $z_1 = bi$

si aplicamos el resultado de la proposici\'on 3 obtenemos que:

mos que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} dx = \operatorname{Re} \left[2\pi i \left(\operatorname{Res} \left(\frac{e^{ix}}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}, ai \right) + \operatorname{Res} \left(\frac{e^{ix}}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}, bi \right) \right) \right]$$

$$\operatorname{Res} \left(\frac{e^{ix}}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}, ai \right) = \frac{e^{-a}}{-2a^3i + 2ab^2i} ; \operatorname{Res} \left(\frac{e^{ix}}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}, bi \right) = \frac{e^{-b}}{-2b^3i + 2a^2bi}$$

$$p(z) = e^{iz} \Rightarrow p(ai) = e^{-a} ; p(bi) = e^{-b}$$

$$q(z) = (z^2+a^2)(z^2+b^2) = z^4 + (a^2+b^2)z^2 + a^2b^2 \Rightarrow q'(z) = 4z^3 + 2(a^2+b^2)z$$

$$q'(ai) = -4a^3i + 2a^3i + 2ab^2i$$

$$q'(bi) = -4b^3i + 2b^3i + 2a^2bi$$

Entrances :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} dx = \operatorname{Re} \left[2\pi i \left[\left(\frac{e^{-a}}{-2a^3i + 2ab^2i} \right) + \frac{e^{-b}}{-2b^3i + 2a^2bi} \right] \right] =$$

$$= 2\pi \left(\frac{e^{-a}}{2ab^2 - 2a^3} + \frac{e^{-b}}{2a^2b - 2b^3} \right) = \pi \left(\frac{e^{-a}}{ab^2 - a^3} + \frac{e^{-b}}{a^2b - b^3} \right)$$