RELACION DE EJERCICIOS Nº 4

SERIES DE POTENCIAS, DE TAYLOR Y DE LAURENT

1º Encontrar la serie de Mc-Laurin de las siguientes funciones y determinar su radio de convergencia

a) $f(z) = \dfrac{1}{1+z^4}$

Solución:

Según hemos visto en teoría la serie de Mc-Laurin de $\dfrac{1}{1+z}$ es $\sum\limits_{n\geq 0} (-1)^n \cdot z^n$. Por tanto, la serie de Mc-Laurin de $f(z) = \dfrac{1}{1+z^4}$ es:

$f(z) = \sum\limits_{n\geq 0} (-1)^n \cdot z^{4n}$. Vamos a calcular su radio de convergencia aplicando el criterio del cociente:

$L = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{z^{4(n+1)}}{z^{4n}} \right| = |z|^4 < 1$ para que sea convergente

$\Rightarrow |z| < 1$. Luego el radio de convergencia es:

$R = \dfrac{1}{L} = \dfrac{1}{|z|} > 1$ y el disco de convergencia es $D(0,R)$

b) $f(z)=\dfrac{z+2}{1-z^2}$. Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{z+2}{1-z^2}=\frac{A}{1+z}+\frac{B}{1-z}=\frac{A(1-z)+B(1+z)}{1-z^2}\Rightarrow\begin{cases}-A+B=1\\ A+B=2\end{cases}$$

$\Rightarrow B=\dfrac{3}{2}\Rightarrow A=\dfrac{1}{2}$. Entonces:

$$f(z)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+z}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1-z}=\frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\cdot z^n+\frac{3}{2}\sum_{n\geq 0}z^n$$

$$f(z)=\frac{1}{2}\left[\sum_{n\geq 0}(-1)^n z^n+\sum_{n\geq 0}3z^n\right]$$

$$f(z)=\frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\left[3+(-1)^n\right]z^n$$

Esta serie, por ser geométrica, tan sólo es convergente en el caso de que $|z|<1$ y su radio de convergencia, como en el ejercicio anterior, vale:

$R=\dfrac{1}{l}=\dfrac{1}{|z|}>1$, el disco de convergencia es $D(0,R)$ con $R>1$.

c) $\operatorname{sen}(2z^2)$

Recordemos como obteníamos el desarrollo de Mc-laurin de $f(z) = \operatorname{sen} z$.

Sabemos que $f(z) = e^z = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$. Si tomamos el valor $z = ix \Rightarrow e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$. Entonces:

$\cos x + i \operatorname{sen} x = \sum_{n \geq 0} \frac{(ix)^n}{n!}$ y podemos poner:

$$\cos x + i \operatorname{sen} x = \sum_{k \geq 0} \frac{(ix)^{2k}}{2k!} + \sum_{k \geq 0} \frac{(ix)^{2k+1}}{(2k+1)!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos x + i \operatorname{sen} x = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k \geq 0} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Es decir que:

$$\cos x = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad \operatorname{sen} x = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Tomando $x = 2z^2$

$$\operatorname{sen} 2z^2 = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \cdot \frac{(2z^2)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\operatorname{sen} 2z^2 = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \cdot 2^{2k+1} \cdot \frac{z^{4k+2}}{(2k+1)!}$$

Veamos el radio de convergencia de la serie:

$$\operatorname{sen}(2z^2) = \sum_{k\geq 0} (-1)^k \cdot 2^{2k+1} \cdot \frac{z^{4k+2}}{(2k+1)!}$$

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(-1)^{k+1} \cdot 2^{2k+3} \cdot \frac{z^{4k+6}}{(2k+3)!}}{(-1)^k \cdot 2^{2k+1} \cdot \frac{z^{4k+2}}{(2k+1)!}} \right| =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{4 \cdot z^4}{(2k+3)(2k+2)\cancel{(2k+1)!}}}{\frac{1}{\cancel{(2k+1)!}}} = \lim_{k\to\infty} \frac{4z^4}{(2k+3)(2k+2)} = 0$$

Por tanto $L = 0$ y como el radio de convergencia es $R = \frac{1}{L} = \infty$.

2) Obtener el desarrollo de Taylor de las siguientes funciones en el punto dado como centro:

a) $f(z) = \frac{z}{z+1}$ en $z_0 = 1$.

El desarrollo de Taylor en $z_0 = 1$ de $f(z)$ es

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

Como $z_0 = 1$

$$f(z_0) = \frac{1}{2}$$

$$f'(z) = \frac{1}{(z+1)^2} \Rightarrow f'(z_0) = \frac{1}{2}$$

$$f''(z) = \frac{-2}{(z+1)^3} \Rightarrow f''(z_0) = \frac{-2!}{2^3}$$

$$f'''(z) = \frac{2\cdot 3}{(z+1)^4} \Rightarrow f'''(z_0) = \frac{3!}{2^4}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(z) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n!}{(z+1)^{n+1}} \Rightarrow f^{(n)}(z_0) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n!}{2^{n+1}}$$

Luego:

$$f(z) = \frac{z}{z+1} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^{n-1} \cdot \frac{n!}{2^{n+1}}}{n!} (z-1)^n = \sum_{n \geq 0} (-1)^{n-1} \cdot \frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}$$

b) $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z-2i)}$ en $z_0 = -1$.

En primer lugar vamos a descomponer en fracciones simples la expresión anterior:

$$\frac{z}{(z-1)(z-2i)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2i}$$ con $A, B \in \mathbb{C}$. Entonces:

$$A(z-2i) + B(z-1) = z \Rightarrow (A+B)z + (-2Ai - B) = z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} A+B = 1 \\ -2Ai - B = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (1-2i)A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{1-2i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \frac{1+2i}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{1+2i}{1-(2i)^2} = \boxed{\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i = A}$$

$$A+B = 1 \Rightarrow B = 1 - A = 1 - \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i = \frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$$

$$\boxed{B = \frac{4}{5} - \frac{2}{5}i}$$

Entonces tenemos que:

$$\frac{z}{(z-1)(z-2i)} = \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i\right) \cdot \frac{1}{z-1} + \left(\frac{4}{5} - \frac{2}{5}i\right) \cdot \frac{1}{z-2i}$$

Para obtener el desarrollo de Taylor de $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2i)}$ centrado en $z_0 = -1$, bastaría con que tuviéramos el desarrollo de Taylor, centrado en $z_0 = -1$, de las funciones $\frac{1}{z-1}$ y $\frac{1}{z-2i}$. Vamos a proceder del siguiente modo, hallando el desarrollo de

Taylor en $z_0 = -1$ de una función genérica

$$f(z) = \frac{1}{z-a}$$ donde $a \in \mathbb{C}$ $a \neq -1$.

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(-1)}{n!} (z+1)^n \quad (*)$$ este es el desarrollo de Taylor.

$$f^{(0)}(z) = f(z) = \frac{1}{z-a} \Rightarrow f(-1) = \frac{1}{-1-a} = -\frac{1}{1+a}$$

$$f'(z) = -\frac{1}{(z-a)^2} \Rightarrow f'(-1) = -\frac{1}{(-1-a)^2} = -\frac{1}{(1+a)^2}$$

$$f''(z) = \frac{2(z-a)}{(z-a)^4} = \frac{2!}{(z-a)^3} \Rightarrow f''(-1) = \frac{2!}{(-1-a)^3} = -\frac{2!}{(1+a)^3}$$

$$f'''(z) = -\frac{2!\ 3(z-a)^2}{(z-a)^6} = -\frac{3!}{(z-a)^4} \Rightarrow f'''(-1) = -\frac{3!}{(-1-a)^4} = -\frac{3!}{(1+a)^4}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(z) = (-1)^n \cdot \frac{n!}{(z-a)^{n+1}} \Rightarrow \boxed{f^{(n)}(-1) = -\frac{n!}{(1+a)^{n+1}}}$$

Sustituyendo en $(*)$ obtenemos:

$$\frac{1}{z-a} = \sum_{n \geq 0} \frac{-\frac{n!}{(1+a)^{n+1}}}{n!} (z+1)^n \Rightarrow \boxed{\frac{1}{z-a} = -\sum_{n \geq 0} \frac{(z+1)^n}{(1+a)^{n+1}}}$$

para $a = +1$ obtenemos

$$\frac{1}{z-a} = -\sum_{n\geq 0} \frac{(z+1)^n}{(1+a)^{n+1}}$$

$$\frac{1}{z-1} = -\sum_{n\geq 0} \frac{(z+1)^n}{2^{n+1}}$$

Para $a = 2i$ se tiene que:

$$\frac{1}{z-2i} = \sum_{n\geq 0} \frac{(z+1)^n}{(1+2i)^{n+1}}.$$ Si sustituimos en la expresión de la descomposición en fracciones simples:

$$\frac{z}{(z-1)(z-2i)} = -\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i\right)\sum_{n\geq 0}\frac{(z+1)^n}{2^{n+1}} - \left(\frac{4}{5}-\frac{2}{5}i\right)\sum_{n\geq 0}\frac{(z+1)^n}{(1+2i)^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{z}{(z-1)(z-2i)} = \frac{-1}{5}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1+2i}{2^{n+1}} + \frac{4-2i}{(1+2i)^{n+1}}\right)\cdot (z+1)^n$$ y este es el desarrollo de Taylor que nos piden.

c) $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ en $z_0 = 1$.

El desarrollo pedido tiene la expresión:

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(z-1)^n.$$

Si descomponemos en fracciones simples la expresión $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ obtenemos:

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z+i)(z-i)} = \frac{A}{z+i} + \frac{B}{z-i} \quad , \; A, B \in \mathbb{C} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(z-i) + B(z+i) = 1 \Rightarrow (A+B)z + (-A+B)i = 1 \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} A+B &= 0 \\ -A+B &= \frac{1}{i} \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} A+B &= 0 \\ -A+B &= -i \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2B = -i \Rightarrow \boxed{B = -\frac{1}{2}i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{2}i}$$

Luego $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2} = \dfrac{1}{2}i \cdot \dfrac{1}{z+i} - \dfrac{1}{2}i \cdot \dfrac{1}{z-i}$

Procedemos como en el apartado anterior, vamos a obtener el desarrollo de Taylor de $f(z) = \dfrac{1}{z-a}$ $a \in \mathbb{C}$ centrado en $z_0 = 1$, $a \neq 1$ para obtener estos desarrollos en las funciones $\dfrac{1}{z+i}$ $(a=-i)$ y $\dfrac{1}{z-i}$ $(a=i)$

$$f(z) = \frac{1}{z-a} = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(z-1)^n$$

$$f^{(0)}(z) = f(z) = \frac{1}{z-a} \Rightarrow f(1) = \frac{1}{1-a}$$

$$f'(z) = \frac{-1}{(z-a)^2} \Rightarrow f'(1) = -\frac{1}{(1-a)^2}$$

$$f''(z) = \frac{2(z-a)}{(z-a)^4} = \frac{2!}{(z-a)^3} \Rightarrow f''(1) = \frac{2!}{(1-a)^3}$$

$$f'''(z) = \frac{-2!\,3(z-a)^2}{(z-a)^6} = -\frac{3!}{(z-a)^4} \Rightarrow f'''(1) = -\frac{3!}{(1-a)^4}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(z) = (-1)^n \cdot \frac{n!}{(z-a)^{n+1}} \Rightarrow f^{(n)}(1) = (-1)^n \cdot \frac{n!}{(1-a)^{n+1}}$$

Por tanto:

$$\frac{1}{z-a} = \sum_{n\geq 0} \frac{\frac{n!}{(1-a)^{n+1}} \cdot (-1)^n}{n!} \cdot (z-1)^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{z-a} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \cdot \frac{(z-1)^n}{(1-a)^{n+1}}} \text{. Luego:}$$

$$\frac{1}{z+i} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \cdot \frac{(z-1)^n}{(1+i)^{n+1}}$$

$$\frac{1}{z-i} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \cdot \frac{(z-1)^n}{(1-i)^{n+1}} \text{. Entonces:}$$

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2} i \cdot \sum_{n\geq 0} (-1)^n \cdot \frac{(z-1)^n}{(1+i)^{n+1}} - \frac{1}{2} i \cdot \sum_{n\geq 0} (-1)^n \cdot \frac{(z-1)^n}{(1-i)^{n+1}}$$

El desarrollo de Taylor de $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$ centrado en $z_0 = 1$ es:

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2}\, i \left[\sum_{n \geq 0} (-1)^n \cdot \left(\frac{1}{(1+i)^{n+1}} - \frac{1}{(1-i)^{n+1}} \right) \cdot (z-1)^n \right]$$

3°) Desarrollar cada una de las siguientes funciones en una serie de Laurent que converja para $0 < |z| < R$ y determinar el dominio de convergencia.

a) $\dfrac{e^z}{z^2}$

Tenemos que $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2} \in H\left[A(0; 0, +\infty) \right]$. Queremos obtener la serie de Laurent de $f(z)$ centrada en $z_0 = 0$. Se verifica que:

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2} \cdot e^z = \frac{1}{z^2} \cdot \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} \frac{z^{n-2}}{n!}$$

Por tanto:

$$f(z) = \underset{\substack{\downarrow \\ n=0}}{\frac{1}{z^2}} + \underset{\substack{\downarrow \\ n=1}}{\frac{1}{z}} + \sum_{n \geq 2} \frac{z^{n-2}}{n!}$$

Si efectuamos el cambio $k = n-2 \Rightarrow n = k+2 \geq 2 \Rightarrow k \geq 0$

$f(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{(k+2)!}$ este es el desarrollo en serie de Laurent centrado en $z_0 = 0$. La parte principal es $\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z}$ y la parte regular es $\sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{(k+2)!}$

El dominio de convergencia es $A(0; 0, +\infty)$

b) $\frac{\cosh 2z}{z}$

Por definición tenemos que $\cosh 2z = \frac{1}{2}\left(e^{2z} + e^{-2z}\right)$

Como $e^z = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} \Rightarrow e^{2z} = \sum_{n \geq 0} \frac{(2z)^n}{n!} \Rightarrow$

$\Rightarrow e^{2z} = \sum_{n \geq 0} \frac{2^n \cdot z^n}{n!} = \sum_{k \geq 0} \frac{2^{2k}}{(2k)!} z^{2k} + \sum_{k \geq 0} \frac{2^{2k+1}}{(2k+1)!} z^{2k+1}$

De manera análoga:

$e^{-2z} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-2z)^n}{n!} = -\sum_{k \geq 0} \frac{2^{2k+1}}{(2k+1)!} z^{2k+1} + \sum_{k \geq 0} \frac{2^{2k}}{(2k)!} z^{2k}$

Luego:

$$\cosh 2z = \frac{1}{2}\left[\sum_{k\geq 0} \frac{2^{2k}}{(2k)!} z^{2k} + \cancel{\sum_{k\geq 0} \frac{2^{2k+1}}{(2k+1)!} z^{2k+1}} - \cancel{\sum_{k\geq 0} \frac{2^{2k+1}}{(2k+1)!} z^{2k+1}} + \sum_{k\geq 0} \frac{2^{2k}}{(2k)!} z^{2k}\right]$$

$\Rightarrow \cosh 2z = \sum_{k\geq 0} \frac{2^{2k}}{(2k)!} z^{2k}$ o lo que es lo mismo, podemos poner:

$$\cosh 2z = \sum_{n\geq 0} \frac{2^{2n}}{(2n)!} z^{2n}.$$ Por tanto:

$$f(z) = \frac{\cosh 2z}{z} = \frac{1}{z}\cdot \sum_{n\geq 0} \frac{2^{2n}}{(2n)!} z^{2n} \Rightarrow f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{2^{2n}}{(2n)!} z^{2n-1}$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n\geq 1} \frac{2^{2n}}{(2n)!} z^{2n-1}.$$

Además $f \in H[\mathbb{C} - \{0\}] = H[A(0;0,+\infty)]$

Si hacemos $k = 2n-1 \Rightarrow n = \frac{k+1}{2} \geq 1 \Rightarrow k \geq 1$, podemos poner:

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k\geq 1} \frac{2^{k+1}}{(k+1)!} \cdot z^k$$ este es el desarrollo en serie de Laurent de $f(z)$ centrado en $z_0 = 0$.

El dominio de convergencia es $A(0;0,+\infty)$

c) $\dfrac{1}{z(1+z^2)}$.

$f(z) = \dfrac{1}{z(1+z^2)}$ es holomorfa en $0<|z|<1$, es decir $f \in H[A(0;0,1)]$ y también $f \in H[A(0,1,+\infty)]$.

El dominio de convergencia de la serie de Laurent de f es $A(0;0,1) \cup A(0;1,+\infty)$.

Sea $z \in \mathbb{C}$ de modo que $0<|z|<1$. Entonces sabemos, por la serie geométrica, que:

$\dfrac{1}{1-z} = \sum\limits_{n\geq 0} z^n$ por tanto podemos poner:

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1-(-z^2)} = \sum_{n\geq 0} (-z^2)^n = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \cdot z^{2n}$$

De esta manera tenemos que:

$$\frac{1}{z(1+z^2)} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{z} \cdot \sum_{n\geq 0} (-1)^n \cdot z^{2n} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n z^{2n-1}$$

Es decir:

$$\frac{1}{z(1+z^2)} = \frac{1}{z} + \sum_{n\geq 1} (-1)^n \cdot z^{2n-1}.$$ La parte principal del desarrollo de Laurent es $\frac{1}{z}$ y la parte regular es $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \cdot z^{2n-1}$.

4º Desarrollar cada una de las siguientes funciones en una serie de Laurent que converja para $0<|z-z_0|<R$ y determinar el dominio de convergencia.

a) $\frac{1}{z^2+1}$ en $z_0 = i$.

Si tomamos $R=1$, los complejos z tales que $0<|z-i|<1$ son $z \in \Delta(i;0,1)$, además $f \in H[\Delta(i,0,1)]$

Tenemos que:

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z+i)(z-i)} = \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{z+i}.$$ Vamos a hallar el desarrollo de $\frac{1}{z+i}$ según potencias de $z-i$.

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{(z-i)+2i} = \frac{1}{-2i\left[-\frac{z-i}{2i}-1\right]}$$, es decir:

$$\frac{1}{z+i} = -\frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{\left(-\frac{z-i}{2i}\right)-1}$$, como $|z-i|<1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left|\frac{z-i}{2i}\right| = \frac{|z-i|}{2} < \frac{1}{2} < 1$ y por tratarse de una serie geométrica:

$$\frac{1}{\left(-\frac{z-i}{2i}\right)-1} = \sum_{n\geq 0}\left(-\frac{z-i}{2i}\right)^n = \sum_{n\geq 0}\left(-\frac{1}{2i}\right)^n\cdot(z-i)^n =$$

$= \sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2}i\right)^n\cdot(z-i)^n$. Sustituyendo obtenemos:

$$\frac{1}{z+i} = -\frac{1}{2i}\cdot\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2}i\right)^n\cdot(z-i)^n = \sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2}i\right)^{n+1}\cdot(z-i)^n$$

De nuevo volvemos a sustituir obteniendo:

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{z-i}\cdot\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2}i\right)^{n+1}\cdot(z-i)^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z^2+1} = \sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2}i\right)^{n+1}\cdot(z-i)^{n-1}$$

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2}i \cdot \frac{1}{z-i} + \sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{2}i\right) \cdot (z-i)^{n-1} \text{ este}$$

es el desarrollo de la serie de Laurent de

$f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$ en $z_0 = i$. La parte principal es

$\dfrac{1}{2} i \cdot \dfrac{1}{z-i}$ y la parte regular $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{2}i\right)(z-i)^{n-1}$.

El dominio de convergencia de la anterior serie es

$A(0;0,1)$.

b) $\dfrac{\cos z}{(z-\pi)^3}$ en $z_0 = \pi$

Si tomamos $0 < |z-\pi| < \infty$, es decir, si $z \in A(\pi; 0, \infty)$

la función $f(z) = \dfrac{\cos z}{(z-\pi)^3} \in H[A(\pi; 0, +\infty)]$ por tanto

existe el desarrollo en serie de Laurent.

Vamos a hallar el desarrollo de Taylor de $\cos z$

en $z = \pi$. Este desarrollo es de la forma:

$$\cos z = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(z)}{n!} (z-\pi)^n \text{ donde } f(z) = \cos z$$

$f(z) = \cos z \Rightarrow f(\pi) = -1$

$f'(z) = -\operatorname{sen} z \Rightarrow f'(\pi) = 0$

$f''(z) = -\cos z \Rightarrow f''(\pi) = 1$

$f'''(z) = \operatorname{sen} z \Rightarrow f'''(\pi) = 0$

$f^{IV}(z) = \cos z \Rightarrow f^{IV}(\pi) = 1$

$\vdots$

$f^{2k}(z) = (-1)^k \cos z \Rightarrow f^{(2k)}(\pi) = (-1)^{k+1}$

$f^{2k+1}(z) = (-1)^{k+1} \operatorname{sen} z \Rightarrow f^{2k+1}(\pi) = 0$

Luego:

$$\cos z = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!} (z-\pi)^{2k}$$

Volvemos al ejercicio, se tiene que

$$\frac{\cos z}{(z-\pi)^3} = \frac{1}{(z-\pi)^3} \cdot \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!} (z-\pi)^{2k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\cos z}{(z-\pi)^3} = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!} (z-\pi)^{2k-3}$$

$$\frac{\cos z}{(z-\pi)^3} = -\frac{1}{(z-\pi)^3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(z-\pi)} + \sum_{k\geq 2} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!}(z-\pi)^{2k-3}$$

El dominio de convergencia de esta serie es el anillo $A(\pi; 0, +\infty)$

c) $\dfrac{1}{(z+i)^2-(z+i)}$ en $z_0 = -i$

Tenemos que:

$$\frac{1}{(z+i)^2-(z+i)} = \frac{1}{(z+i)[(z+i)-1]} = \frac{1}{z+i}\cdot\frac{1}{(z+i)-1}.$$

Si tomamos $|z+i| < 1 \iff z \in A(i; 0, 1)$ entonces, segun la propiedad de la serie geométrica,

$\dfrac{1}{(z+i)-1} = \sum_{n\geq 0} (z+i)^n$. Por tanto:

$$\frac{1}{(z+i)^2-(z+i)} = \frac{1}{z+i}\cdot\sum_{n\geq 0}(z+i)^n = \sum_{n\geq 0}(z+i)^{n-1}$$

La parte principal del desarrollo es serie de Laurent es cero y la parte regular es $\sum_{n\geq 0}(z+i)^{n-1}$.

5º Desarrollar cada una de las siguientes funciones en una serie de Laurent en el anillo que se indica

a) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

$\mathbb{C} \setminus \{0\} = A(0; 0, +\infty)$

$e^{\frac{1}{z}}$ tiene una singularidad en $z=0$. Según el desarrollo de Mc-Laurin de e^z, se tiene que:

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n \geq 0} \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{z^n}$$, este

es el desarrollo de la serie de Laurent, cuya parte principal es $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{z^n}$ siendo cero su parte regular.

b) $f(z) = \dfrac{1}{(z+i)(z-2)}$ en $D_1(0)$, $A(0; 1, 2)$ y $A(0, 2, +\infty)$

En $D_1(0) = \{ z \in \mathbb{C} \,/\, 0 < |z| < 1 \} = A(0; 0, 1)$

se tiene que $f \in H(A(0; 0, 1))$ y por tanto existen, según el teorema de Laurent, a_n y $b_n \in \mathbb{C}$ tales que

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n \cdot z^n + \sum_{n\geq 0} b_n \cdot \frac{1}{z^n}$$

En primer lugar descomponemos en fracciones simples la expresión $\dfrac{1}{(z+i)(z-2)} = \dfrac{A}{z+i} + \dfrac{B}{z-2} = \dfrac{Az-2A+Bz+Bi}{(z+i)(z-2)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (A+B)z + (-2A+Bi) = 1 \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -2A+Bi=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2A+2B=0 \\ -2A+Bi=1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow (2+i)B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{2+i} = \frac{2-i}{5} = \boxed{\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i = B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = -\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i.$$

Luego:

$$\frac{1}{(z+i)(z-2)} = \left(-\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i\right) \cdot \frac{1}{z+i} + \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i\right) \cdot \frac{1}{z-2}$$

Ahora vamos a desarrollar las expresiones $\dfrac{1}{z+i}$, $\dfrac{1}{z-2}$

Se tiene que:

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{+i\left[1 + \left(\frac{z}{i}\right)\right]} = \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{z}{i}\right)} = \frac{1}{i} \cdot \sum_{n\geq 0} \left(-\frac{z}{i}\right)^n$$

ya que al ser $0 < |z| < 1 \Rightarrow 0 < \left|\underset{\underset{|z|}{\shortparallel}}{-\frac{z}{i}}\right| < 1$ y

por tanto la serie geométrica es convergente.

Luego $\frac{1}{z+i} = -i \cdot \sum_{n\geq 0} (zi)^n = -\sum_{n\geq 0} i^{n+1} \cdot z^n$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{-2\left(1-\frac{z}{2}\right)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n\geq 0} \left(\frac{z}{2}\right)^n$$

ya que al ser $0 < |z| < 1 \Rightarrow 0 < \left|\frac{z}{2}\right| < \frac{1}{2} < 1$ y de nuevo la serie geométrica es convergente. Sustituyendo estos valores en la descomposición en fracciones simples:

$$\frac{1}{(z+i)(z-2)} = \left(-\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i\right) \cdot \left[-\sum_{n\geq 0} i^{n+1} \cdot z^n\right] + \left(\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i\right) \cdot \left[-\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{2^{n+1}}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(z+i)(z-2)} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{5} \left[(-2+i) \cdot i^{n+1} + (2-i) \cdot \frac{1}{2^{n+1}}\right] \cdot z^n,$$ la serie de Laurent tiene tan sólo parte regular, su parte principal es cero.

<u>En $A(0;1,2)$</u> $= \{ z \in \mathbb{C} \,/\, 1 < |z| < 2 \}$

Los puntos singulares de la función son $z=-i$; $z=2$.

Como $|-i| = 1 \Rightarrow -i \notin A$, $|2| = 2 \Rightarrow 2 \notin A$. Por tanto $f \in H[A(0;1,2)]$, por lo tanto existe en este anillo

anillo el desarrollo de Laurent de esta función según hemos visto anteriormente:

$$\frac{1}{(z+i)(z-2)} = \left(-\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i\right)\cdot\frac{1}{z+i} + \left(\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i\right)\cdot\frac{1}{z-2}$$

Se tiene que:

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{2^n} = -\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{2^{n+1}}$$ ya

que al ser $1<|z|<2 \Rightarrow \frac{1}{2}<\left|\frac{z}{2}\right|<1$, por tanto la serie geométrica es convergente.

Por otra parte:

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{i\left(\frac{z}{i}+1\right)} = \frac{1}{-\frac{z}{i}-1}i = \frac{1}{iz-1} = -\frac{1}{1-iz}i =$$

$$= -\frac{1}{zi}\cdot\frac{1}{\frac{1}{zi}-1} = \frac{1}{zi}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{zi}} \ (*).$$

Como $1<|z|<2 \Rightarrow \frac{1}{|z|}<1 \Rightarrow \frac{1}{|zi|}<1$, por tanto la serie geométrica $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{zi}\right)^n$ es convergente y obtenemos que:

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{zi}\cdot\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{zi}\right)^n = \sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{zi}\right)^{n+1}$$, es decir:

$$\frac{1}{z+i} = \sum_{k\geq 0} \left(\frac{1}{zi}\right)^{2k} + \sum_{k\geq 0} \left(\frac{1}{zi}\right)^{2k+1} =$$

$$= \sum_{k\geq 0} (-1)^k \cdot \frac{1}{z^{2k}} + i\sum_{k\geq 0} (-1)^k \cdot \frac{1}{z^{k+1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z+i} = \sum_{k\geq 0} (-1)^k \cdot \frac{1}{z^{2k}} \left(1+\frac{1}{2}i\right)$$

La serie de Laurent de $f(z) = \frac{1}{(z+i)(z-2)}$ en $A(0;1,2)$

es:

$$f(z) = \frac{1}{5}(-2+i) \cdot \sum_{k\geq 0} (-1)^k \cdot \frac{1}{z^{2k}} \cdot \left(1+\frac{1}{2}i\right) + \frac{1}{5}(2-i) \cdot \sum_{k\geq 0} \frac{z^k}{2^{k+1}}$$

La serie principal es $\frac{1}{5}(-2+i)\cdot\left(1+\frac{1}{2}i\right)\cdot\sum_{k\geq 0}(-1)^k \cdot \frac{1}{z^{2k}}$ y

la serie regular es $-\frac{1}{5}(2-i)\cdot \sum_{k\geq 0} \frac{z^k}{2^{k+1}}$.

<u>En $A(0;2,+\infty)$</u> $= \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| > 2\}$

De nuevo como los puntos singulares de f

$-i, 2 \notin A(0;2,+\infty) \Rightarrow f \in H[A(0;2,+\infty)]$ por

lo que existe la serie de Laurent de f en este anillo.

Al igual que en lo anterior:

$$\frac{1}{(z+i)(z-2)} = \frac{1}{5}(-2+i)\cdot\frac{1}{z+i} + \frac{1}{5}(2-i)\cdot\frac{1}{z-2}$$

Vamos a obtener desarrollos para $\frac{1}{z+i}$ y para $\frac{1}{z-2}$

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{i(1+\frac{z}{i})} = -\frac{1}{1-iz}\,i = -\frac{1}{\cancel{zi}}\cdot\frac{1}{\frac{1}{zi}-1}\,\cancel{i} =$$

$$= \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{zi}} = \frac{1}{z}\cdot\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{zi}\right)^n = \frac{1}{z}\cdot\sum_{n\geq 0}(-i)^n\cdot\frac{1}{z^n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z+i} = \sum_{n\geq 0}(-i)^n\cdot\frac{1}{z^{n+1}}$$ y esto es así ya que:

$$2<|z| \Rightarrow 2<|zi| \Rightarrow \frac{1}{|zi|}<\frac{1}{2} \Rightarrow \left|\frac{1}{zi}\right|<\frac{1}{2}<1$$

por tanto la serie geométrica es convergente. Luego:

$$\frac{1}{z+i} = \sum_{k\geq 0}(-i)^{2k}\cdot\frac{1}{z^{2k+1}} + \sum_{k\geq 0}(-i)^{2k+1}\cdot\frac{1}{z^{2k+2}} =$$

$$\frac{1}{z+i} = \sum_{k\geq 0}(-1)^k\cdot\frac{1}{z^{2k+1}} + i\cdot\sum_{k\geq 0}(-1)^k\cdot\frac{1}{z^{2k+2}}$$

$$\frac{1}{z+i} = \sum_{k\geq 0}(-1)^k\cdot\frac{1}{z^{2k+1}}\left(1+\frac{1}{2}i\right)$$

$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}}$. Como $|z| > 2 \Rightarrow \frac{1}{|z|} < \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left|\frac{2}{z}\right| < 1$ por tanto la serie geométrica es convergente y podemos poner:

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \cdot \sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{z^n} = \sum_{n\geq 0} 2^n \cdot \frac{1}{z^{n+1}}$$

Luego el desarrollo de Laurent de $f(z) = \frac{1}{(z+i)(z-2)}$

en $A(0; 2, +\infty)$ es:

$$\frac{1}{(z+i)(z-2)} = \frac{1}{5}(-2+i)\sum_{k\geq 0}(-1)^k \cdot \frac{1}{z^{2k+1}}\left(1+\frac{1}{2}i\right) + \frac{1}{5}(2-i) \cdot \sum_{k\geq 0} 2^k \cdot \frac{1}{z^{k+1}}$$

la serie de Laurent tan solo tiene parte principal, la parte regular es cero

$$\frac{1}{(z+i)(z-2)} = \sum_{k\geq 0}\left[\frac{1}{5}(-2+i)\cdot(-1)^k \cdot \frac{1}{z^k} + \frac{1}{5}(2-i)\cdot 2^k\right]\frac{1}{z^{k+1}}$$

c) $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ en $D_1^*(1)$ y $A(1; 1, +\infty)$

En $D_1^*(1) = \{z \in \mathbb{C} \ / 0 < |z-1| < 1\}$

Como los puntos singulares de f, $z=0$, $z=1 \in D_1^*(1) \Rightarrow$
$\Rightarrow f \in \mathcal{H}(D_1^*(1)) \Rightarrow$ existe la serie de Laurent de f centrada en 1. Se tiene que:

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{z} = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{1-(1-z)} = \frac{1}{z-1} \cdot \sum_{n \geq 0} (1-z)^n$$

y esto es así porque $0<|1-z| = |z-1| < 1$ y la serie geométrica es convergente. Podemos poner:

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1} \cdot \sum_{n \geq 0} (-1)^n \cdot (z-1)^n = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \cdot (z-1)^{n-1},$$

la serie de Laurent tan sólo tiene parte regular, su parte principal es nula.

<u>En $A(1; 1, +\infty)$</u>, como los puntos singulares de f no están en este anillo $\Rightarrow f \in \mathcal{H}[A(1; 1, +\infty)]$ y por tanto existe el desarrollo de Laurent de f en el anillo.

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{(z-1)[(z-1)+1]} = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{z-1}} = \frac{1}{(z-1)^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{1-z}}$$

Como $|z-1| > 1 \Rightarrow \left|\frac{1}{1-z}\right| < 1$ y al ser la serie geométrica de razón $\frac{1}{1-z}$ convergente podemos poner:

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{(z-1)^2} \cdot \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{1-z}\right)^n = \frac{1}{(z-1)^2} \cdot \sum_{n \geq 0} (-1)^n \cdot \frac{1}{(z-1)^n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z(z-1)} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \cdot \frac{1}{(z-1)^{n+2}}$$, la serie de Laurent tan sólo tiene parte principal, la parte regular es cero.

6º) Determinar todas las series de Taylor o las series de Laurent con centro en z_0 y determinar el dominio de convergencia de las siguientes funciones:

a) $\frac{1}{1-z^3}$ en $z_0 = 0$.

Como $1 - z^3 = 0 \Rightarrow z^3 = 1 \Rightarrow z = \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1_0} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{1_0} \begin{cases} \sqrt[3]{1}_0 = 1_0 = 1 \\ \sqrt[3]{1}_{120} = 1_{120°} = 1[\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°] = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \\ \sqrt[3]{1}_{240} = 1_{240} = \cos 240 + i \operatorname{sen} 240 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \end{cases}$$

$$\beta_k = \frac{\alpha + 2k\pi}{n} \quad k = 0, 1, 2 \Rightarrow \begin{cases} \beta_0 = \frac{0 + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{3} = 0 \\ \beta_1 = \frac{0 + 2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} = 120° \\ \beta_2 = \frac{0 + 4\pi}{3} = 2 \end{cases}$$

Luego $f \in H\left[\mathbb{C} \setminus \left\{1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right\}\right]$

f es holomorfa en $z_0=0$ y por tanto existe el desarrollo de Taylor (en este caso Mc-Laurin) de f en $z_0=0$

$$f(z)=\sum_{n\geq 0}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n$$ este es el desarrollo.

Si $|z^3|<1 \Rightarrow |z|<1$ la serie geométrica de razón z^3 es convergente con lo que:

$$\frac{1}{1-z^3}=\sum_{n\geq 0}(z^3)^n=\sum_{n\geq 0}z^{3n}$$, el dominio de convergencia es $A(0;0,1)$

b) $\frac{1}{z}$ en $z_0=1$.

Evidentemente $f(z)$ es holomorfa en $z=1$ por lo que existe el desarrollo de Taylor de f centrado en $z_0=1$.

$$\frac{1}{z}=\sum_{n\geq 0}\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(z-1)^n$$

$$f(z)=\frac{1}{z}\Rightarrow f(1)=1$$

$$f'(z)=-\frac{1}{z^2}\Rightarrow f'(1)=-1$$

$$f''(z) = \frac{2z}{z^4} = \frac{2!}{z^3} \Rightarrow f''(1) = 2!$$

$$f'''(z) = -\frac{2 \cdot 3 \cdot z^2}{z^6} = -\frac{3!}{z^3} \Rightarrow f'''(1) = -3!$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(z) = (-1)^n \cdot \frac{n!}{z^n} \Rightarrow f^{(n)}(1) = (-1)^n \cdot n!$$

Entonces:

$$\frac{1}{z} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n \cdot n!}{n!} \cdot (z-1)^n = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \cdot (z-1)^n$$

$\displaystyle\frac{1}{z} = \sum_{n \geq 0} (1-z)^n$ el dominio de convergencia, al tratarse de una serie geométrica es $|1-z| < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow |z-1| < 1 \Rightarrow z \in A(1; 0, 1)$

c) $\displaystyle\frac{\operatorname{sen} z}{z + \frac{1}{2}\pi}$ en $z_0 = -\frac{1}{2}\pi$.

Como $f(z) = \displaystyle\frac{\operatorname{sen} z}{z + \frac{1}{2}\pi}$ no es holomorfa en $z_0 = -\frac{1}{2}\pi$ no existe el desarrollo de Taylor de f en z_0.

Vamos a obtener la serie de Laurent.

Se tiene que:

$$f(z)=\frac{\operatorname{sen} z}{z+\frac{1}{2}\pi}=\frac{1}{z+\frac{\pi}{2}}\cdot \operatorname{sen} z.$$ Vamos a obtener el desarrollo de $f(z)=\operatorname{sen} z$ centrado en $z_0=-\frac{\pi}{2}$, el desarrollo de Taylor claro está.

$$f(z)=\operatorname{sen} z=\sum_{n\geq 0}\frac{f^{(n)}(-\frac{\pi}{2})}{n!}\left(z+\frac{\pi}{2}\right)^n.$$

$$f(z)=\operatorname{sen} z \Rightarrow f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$$

$$f'(z)=\cos z \Rightarrow f'\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$$f''(z)=-\operatorname{sen} z \Rightarrow f''\left(-\frac{\pi}{2}\right)=1$$

$$f'''(z)=-\cos z \Rightarrow f'''\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$$f^{IV}(z)=\operatorname{sen} z \Rightarrow f^{IV}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(z)=\begin{cases}\text{Si } n=2k \Rightarrow f^{(2k)}(z)=(-1)^k\operatorname{sen} z \Rightarrow f^{(2k)}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^{k+1}\\ \\ \text{Si } n=2k+1 \Rightarrow f^{(2k+1)}(z)=(-1)^k\cos z \Rightarrow f^{(2k+1)}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0\end{cases}$$

Luego:

$$f(z)=\operatorname{sen} z=\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!}\cdot\left(z+\frac{\pi}{2}\right)^{2k},$$ por tanto:

$$\frac{\operatorname{sen} z}{(z+\frac{1}{2}\pi)}=\frac{1}{z+\frac{\pi}{2}}\cdot\operatorname{sen} z=\frac{1}{z+\frac{\pi}{2}}\cdot\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!}\left(z+\frac{\pi}{2}\right)^{2k}$$

es decir:

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z+\frac{\pi}{2}} = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!} \cdot \left(z+\frac{\pi}{2}\right)^{2k-1}$$ este es el

desarrollo de Laurent. Afinamos un poco más:

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z+\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{z+\frac{\pi}{2}} + \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!} \left(z+\frac{\pi}{2}\right)^{2k-1},$$

la parte principal del desarrollo es $-\frac{1}{z+\frac{\pi}{2}}$ y

la parte regular $\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!} \left(z+\frac{\pi}{2}\right)^{2k-1}$

7º Determinar la ubicación y el tipo de singularidades de las siguientes funciones, incluyendo aquellas en el infinito. (En el caso de polos también especificar el orden)

a) $\cot z$

Antes de pasar a resolver este ejercicio hemos de ver un resultado teórico que no está en los apuntes. Es el siguiente teorema:

Teorema: Sea $h(z) = \dfrac{f(z)}{g(z)}$ un cociente de funciones holomorfas en $(z_0; 0, r)$, donde z_0 es el único cero de $g(z)$. Entonces h es holomorfa en $A(z_0; 0, r)$ y por tanto admite una serie de Laurent en el anillo anterior. Si z_0 es un cero de orden α el desarrollo de Laurent de h es:

$$h(z) = \sum_{m \geq 0} a_m (z - z_0)^m \cdot \frac{1}{(z-z_0)^\alpha} \cdot \sum_{n \geq 0} b_n \cdot (z - z_0)^n$$

donde $\sum_{m \geq 0} a_m (z-z_0)^m$ es el desarrollo de Taylor de $f(z)$ y $\sum_{n \geq 0} b_n (z-z_0)^n$ es el desarrollo de Taylor de $\dfrac{1}{G(z)}$, siendo $G(z) = \dfrac{g(z)}{(z-z_0)^r}$

Volvemos al ejercicio, queremos estudiar el tipo de singularidad de $\cot z$

Los puntos singulares de $\cot z$ son $z_0 = k\pi$ ya que:

$$\cot z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z} \Rightarrow \operatorname{sen} z = 0 \Rightarrow \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i} = 0 \Rightarrow$$

$$e^{zi} - \frac{1}{e^{zi}} = 0 \Rightarrow (e^{zi})^2 - 1 = 0 \Rightarrow e^{zi} = \pm 1$$

$$e^{zi} = 1 \Rightarrow \ln e^{zi} = \ln 1 \Rightarrow zi = 0 + k\pi i \Rightarrow z = k\pi$$

$$e^{zi} = -1 \Rightarrow \ln e^{zi} = \ln(-1) \Rightarrow zi = \pi + k\pi i \Rightarrow z = k\pi$$

Por el teorema anterior $\cot z$ tiene desarrollo en serie de Laurent en $A(k\pi; 0, +\infty)$. Según este teorema $\cot z$ tendrá un desarrollo de Laurent en la forma:

$$\cot z = \sum_{m \geq 0} a_m (z - k\pi)^m \cdot \frac{1}{(z - k\pi)} \cdot \sum_{n \geq 0} b_n \cdot (z - k\pi)^n$$

donde $\sum a_m (z - k\pi)^n$ es el desarrollo de Taylor de $\cos z$ y $\sum_{n \geq 0} a_n (z - k\pi)^n$ es el desarrollo de Taylor de $\frac{1}{G(z)}$, siendo $G(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z - k\pi}$

Por tanto podremos expresar $\cot z$ como:

$$\cot z = \frac{a_0 b_0}{z - k\pi} + \sum_{m \geq 1} a_m (z - k\pi)^{m-1} \cdot \sum_{n \geq 0} b_n (z - k\pi)^n$$

Por tanto la serie de Laurent tiene la parte principal con un nº finito de sumandos (uno exactamente) y la singularidad es de tipo polo, es decir que $\cot z$ tiene un polo de orden 1 en $z = k\pi$.

b) $z + \frac{1}{z}$

La función $f(z) = \frac{1}{z} + z$ tiene una singularidad tipo polo de orden 1 en $z = 0$ evidentemente.

c) $\frac{\cos 4z}{(z^4+1)^3}$

Vamos a ver que puntos singulares se obtienen.

$(z^4+1)^3 = 0 \Rightarrow z^4 + 1 = 0 \Rightarrow z^4 = -1 \Rightarrow z^4 = 1_{180} \Rightarrow$

$$\Rightarrow z = \sqrt[4]{1_{180}} \left\{ \begin{array}{l} z_1 = 1_{45°} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \\ z_2 = 1_{135°} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \\ z_3 = 1_{225°} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i \\ z_4 = 1_{315°} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i \end{array} \right.$$

$$\beta_K = \frac{\alpha + 2K\pi}{n} \quad K = 0,1,2,3 \Rightarrow \beta_K = \frac{180 + 2k\pi}{4} = \begin{cases} \beta_0 = 45° \\ \beta_1 = 135° \\ \beta_2 = 225° \\ \beta_3 = 315° \end{cases}$$

Si consideramos el anillo $A(z_j; 0, \sqrt{2})$ se tiene

$z_i \notin A(z_j; 0, \sqrt{2})$ si $i \neq j$ (z_1, z_2, z_3, z_4 son las raices de $z^4 + 1 = 0$). Si aplicamos el teorema del apartado anterior:

$$\frac{\cos 4z}{(z^4+1)^3} = \sum_{m \geq 0} a_m (z - z_1) \cdot \frac{1}{(z-z_1)^3} \sum_{n \geq 0} b_n (z - z_1)^n$$

y en $z = z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$ tiene un polo de orden 3.

Por la misma razón $z = z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$, $z = z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i$, $z = z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i$ $f(z)$ tiene polos de orden 3.

d) $\dfrac{e^{\pi z}}{(z^2 - iz + 2)^2}$

Calculamos en primer lugar los puntos singulares

$$z^2 - iz + 2 = 0 \Rightarrow z = \frac{i \pm \sqrt{-1-8}}{2} = \frac{i \pm 3i}{2} \begin{cases} 2i = z_1 \\ -i = z_2 \end{cases}$$

Los puntos singulares son $z_1 = 2i$, $z_2 = -i$

Si tomamos la corona $A(z_i; 0, 1)$ $i = 1, 2$ se tiene que $f \in H[A(z_i; 0, 1)]$ con lo que f admite un desarrollo en serie de Laurent en este anillo. Remitiéndonos de nuevo al teorema anterior:

$$f(z) = \frac{e^{\pi z}}{(z^2 - iz + 2)^2} = \sum_{m \geq 0} a_m (z - z_i)^m \cdot \frac{1}{(z - z_i)^2} \cdot \sum_{n \geq 0} b_n (z - z_i)^n$$

para $i = 1, 2$, donde $\sum_{m \geq 0} a_m (z - z_i)^m$ es el desarrollo de Taylor de $e^{\pi z}$, $\sum_{n \geq 0} b_n (z - z_i)^n$ es el desarrollo de Taylor de $\frac{1}{G(z)}$ donde $G(z) = \frac{(z^2 - iz + 2)^2}{(z - z_i)^2}$

Por tanto $z = z_1 = 2i$ y $z = z_2 = -i$ son polos de orden 2 de $f(z) = \frac{e^{\pi z}}{(z^2 - iz + 2)^2}$

8) Determinar la ubicación y el orden de los ceros de las siguientes funciones.

a) $(z^4 - 16)^2$

$(z^4 - 16)^2 = 0 \Rightarrow z^4 - 16 = 0 \Rightarrow z^4 = 16 \Rightarrow z = \sqrt[4]{16} \Rightarrow$

$\Rightarrow z = \sqrt[4]{16_0}$

- $z_0 = 2$
- $z_{90^\circ} = 2i$
- $z_{180^\circ} = -2$
- $z_{270^\circ} = -2i$

$\beta_K = \frac{2K\pi}{4} \quad K = 0, 1, 2, 3$

$\beta_0 = 0$ $\qquad \beta_2 = 180°$

$\beta_1 = 90°$ $\qquad \beta_3 = 270°$

Si $f(z) = (z^4 - 16)^2$ podemos escribir:

$$f(z) = (z-2)^2 (z+2)^2 (z-2i)^2 (z+2i)^2$$

$z = 2$, $z = -2$, $z = 2i$, $z = -2i$ son ceros de orden 2 de f.

b) $z \cdot \operatorname{sen}^2 \pi z$

$$f(z) = z \operatorname{sen}^2 \pi z = 0 \begin{cases} z_0 = 0 \Rightarrow \\ \operatorname{sen}^2 \pi z = 0 \Rightarrow \pi z = K\pi \quad K \in \mathbb{Z} \Rightarrow z_0 = K \end{cases}$$

$K \in \mathbb{Z}$.

Los ceros de $f(z) = z \operatorname{sen}^2 \pi z$ son $z_0 = K$, $K \in \mathbb{Z}$.

$$f'(z) = \operatorname{sen}^2 \pi z + 2z \operatorname{sen} \pi z \cos \pi z \cdot \pi$$

$$f'(K) = 0$$

$$f''(z) = 2\pi \operatorname{sen} \pi z \cos \pi z + 2\pi \operatorname{sen} \pi z \cos \pi z + 2\pi^2 z \cos^2 \pi x - 2\pi^2 z \operatorname{sen}^2 \pi z$$

$$f''(z) = 2\pi \operatorname{sen} 2\pi z + 2\pi^2 z \cos 2\pi z \Rightarrow f''(K) = 0$$

$$f'''(z) = 4\pi^2 \cos 2\pi z + 2\pi^2 \cos 2\pi z - 4\pi^3 z \operatorname{sen} 2\pi z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'''(K) = 4\pi^2 \cos 2K\pi + 2\pi^2 \cos 2K\pi - 4\pi^3 K \cdot \operatorname{sen} 2K\pi = 6\pi^2 \neq 0$$

f presenta en $z_0 = K$, $K \in \mathbb{Z}$ un cero de orden 3

c) $f(z) = \dfrac{3z^2-1}{(z^2-2iz+3)^2}$

$$\frac{3z^2-1}{(z^2-2iz+3)^2} = 0 \Rightarrow 3z^2-1=0 \Rightarrow z^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow z = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow z = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)_0} \left\langle \begin{array}{l} \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)_0 = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)_{180} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{array} \right.$$

$$\beta_0 = \frac{\alpha + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{2} = \frac{0+0}{2} = 0^\circ$$

$$\beta_1 = \frac{\alpha + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{2} = \frac{0+2\pi}{2} = \pi = 180^\circ$$

Los ceros de f son $z_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$f(z_0) = f(z_1) = 0$$

$$f'(z) = \frac{6z(z^2-2iz+3)^2 - (3z^2-1)\cdot 2(z^2-2iz+3)\cdot(2z-2i)}{(z^2-2iz+3)^2}$$

$$f'(z) = \frac{6z(z^2-2iz+3) - (3z^2-1)(2z-2i)}{(z^2-2iz+3)^2}$$

$$f'(z_0) = \frac{6\sqrt{3}/3}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2\sqrt{3}}{3}i+3\right)} \neq 0 \qquad f'(z_1) = \frac{-\frac{6\sqrt{3}}{3}}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2\sqrt{3}}{3}i+3\right)} \neq 0.$$

Luego $z_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $z_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ son ceros de orden 1 de la función $f(z) = \dfrac{3z^2 - 1}{(z^2 - 2iz + 3)^2}$.