RELACIÓN DE EJERCICIOS Nº 3

INTEGRACION COMPLEJA

1º Hallar el valor de la integral $I = \int_c \bar{z}\, dz$

cuando $z(t) = 2 \cdot e^{it} \quad \forall t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Si $z(t) = 2 \cdot e^{it}$ y $f(z) = \bar{z} \Rightarrow f[z(t)] = 2 \cdot \overline{e^{it}} \Rightarrow$

$\Rightarrow f[z(t)] = 2 \cdot \overline{(\cos t + i \operatorname{sen} t)} = 2(\cos t - i \operatorname{sen} t) =$

$2[\cos(-t) + i \operatorname{sen}(-t)] = 2 \cdot e^{-it}$

Además $z'(t) = 2i \cdot e^{it}$. Entonces:

$$\int_c \bar{z}\, dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cdot e^{-i \cdot t} \cdot 2i e^{it} dt = 4i \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} dt = 4\pi i$$

2º Calcular la integral $\int_c z\, dz$

a) Cuando C es una curva continua en $[a, b]$

b) Cuando C es unión de dos curvas continuas en $[a, b]$

c) Cuando C es una curva continua en $[a, b]$ y cerrada

a) $f(z) = z$ es holomorfa en el dominio que encierra C (aún más, es holomorfa en todo $\mathbb{C}$) por lo que, según hemos visto en los apuntes de teoría, existe $F \in H(\mathbb{C})$ tal que $\forall z \in \mathbb{C}$ $F'(z) = f(z)$, es decir que F es una integral indefinida. Entonces la integral $\int_C f(z)dz$ no depende del camino sino de los puntos inicial y final.

Si $z : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ es la curva
$t \longmapsto z(t)$

al ser $F(z) = \dfrac{z^2}{2}$

$$\int_C f(z)\,dz = F(z(b)) - F(z(a)) = \frac{z^2(b)}{2} - \frac{z^2(a)}{2}$$

b) Si la curva C es disyunción de dos caminos C_1 y C_2, $C = C_1 \cup C_2$, sabemos que:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz$$

Con $z_1 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ la curva cuya parametrización es C_1

Sea $z_2 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ la curva con parametrización c_2.

Como $F(z) = \dfrac{z^2}{2}$ es la integral indefinida de $f(z) = z$ tenemos:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz = \left[\frac{F(z_1(t))}{2}\right]_a^b + \left[\frac{F(z_2(t))}{2}\right]_a^b$$

$$= \frac{1}{2}\left[F(z_1(b)) + F(z_2(b)) - F(z_1(a)) - F(z_2(a))\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[z_1^2(b) + z_2^2(b) - z_1^2(a) - z_2^2(a)\right]$$

c) Al ser $f(z) = z \in H(\mathbb{C})$ la integral a lo largo de la curva cerrada C es cero, es decir:

$$\int_C f(z)\,dz = \oint_C f(z)\,dz = 0.$$

3º Calcular la integral

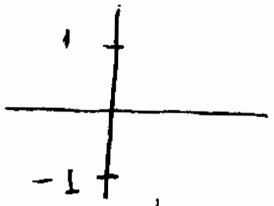
$$\int_c |z|\,dz$$

siendo c la curva

a) segmento de extremos $-i$ y i

b) semicircunferencia unitaria de $-i$ a i

c) semicircunferencia unitaria de $-i$ a i mediante el camino opuesto.

a) 

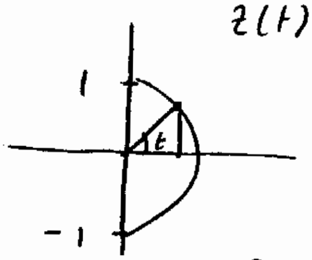
$z(t) = it \quad / -1 \le t \le 1$

$c = \{ it / -1 \le t \le 1 \}$ esta es la parametrización del segmento de extremos $-i$ e i

$z'(t) = i$ por lo que si $f(z) = |z| \Rightarrow f(z(t)) = t$

Luego:

$$\int_c |z|\,dz = \int_{-1}^{1} t \cdot i\,dt = i \cdot \left[\frac{t^2}{2} \right]_{-1}^{1} = 0$$

b) 

$z(t) = \cos t + i \operatorname{sen} t = e^{it} \quad / -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$

La parametrización de la curva es

$c = \{ e^{it} / -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2} \}$

$f(z) = |z| = 1$

$z'(t) = i \cdot e^{it} = i \cdot z$

Entonces:

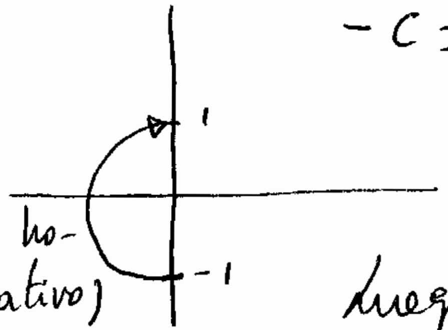
$$\int_c |z|\, dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} i \cdot e^{it} = i \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} e^{it} dt$$

Como $F(t) = \frac{1}{i} \cdot e^{it}$ es una integral indefinida de e^{it} ya que $F'(t) = e^{it}$ se tiene que:

$$\int_c |z|\, dz = \cancel{i} \left[\frac{1}{\cancel{i}}\, e^{it}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} = e^{\frac{\pi}{2} i} - e^{-\frac{\pi}{2} i} = 2i\, \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2i.$$

c) El camino en este caso sería el opuesto al anterior:

$$-C = \left\{ e^{it} \,/\, \frac{3\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$



Sentido horario (negativo)

luego $\int_{-c} f(z)\, dz = -\int_c f(z)\, dz = -2i.$

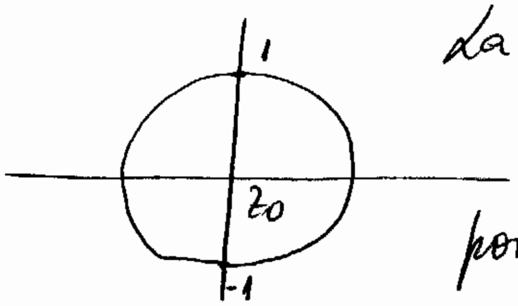
4º Calcular la integral $\int_c Re(z)dz$ sobre los siguientes caminos

a) Circunferencia unitaria

b) Circunferencia de centro z_0 y radio r

c) Segmento de z_1 a z_2.

a)



La circunferencia de centro z_0 y radio 1 viene parametrizado por

$c = \{z_0 + e^{it} / 0 \leq t \leq 2\pi\}$ que es una curva cerrada y de Jordan, regular a trozos.

Como la función $f(z) = Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ es holomorfa en $\mathbb{C}$ se tiene que:

$$\int_c Re(z)\, dz = 0.$$

b) Lo mismo ocurre en este caso que en el apartado a), $\int_c Re(z)\, dz = 0$.

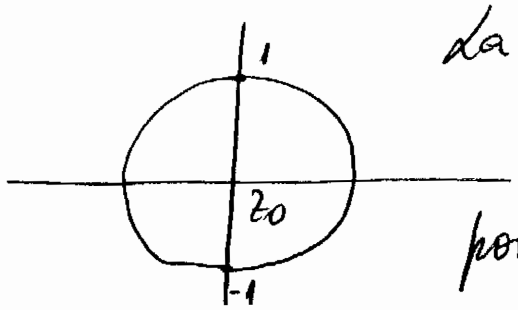
4º Calcular la integral $\int_c Re(z)dz$ sobre los siguientes caminos

a) Circunferencia unitaria

b) Circunferencia de centro z_0 y radio r

c) Segmento de z_1 a z_2.

a)



La circunferencia de centro z_0 y radio 1 viene parametrizado por

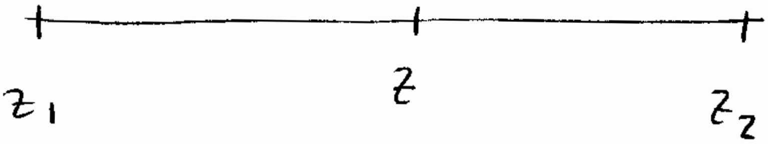
$C = \{ z_0 + e^{it} / 0 \leq t \leq 2\pi \}$ que es una curva cerrada y de Jordan, regular a trozos.

Como la función $f(z) = Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ es holomorfa en $\mathbb{C}$ se tiene que:

$$\int_c Re(z)\, dz = 0.$$

b) Lo mismo ocurre en este caso que en el apartado a), $\int_c Re(z)\, dz = 0.$

c) Veamos que curva sería el segmento de extremos z_1 y z_2 $\sigma(z_1, z_2)$



$$\forall z \in \sigma(z_1, z_2) \Rightarrow z - z_1 = t \cdot (z_2 - z_1) \;/\; 0 \le t \le 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma(z_1, z_2) = \{ t z_2 + (1-t) z_1 \;/\; 0 \le t \le 1 \}$$

Si $z(t) = t z_2 + (1-t) z_1$, como $f(z) = Re(z) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(z(t)) = t\,Re(z_2) + (1-t)\,Re(z_1)$ y además

$z'(t) = z_2 - z_1$. Por tanto:

$$\int_c Re(z)\,dz = \int_0^1 \left[t\,Re(z_2) + (1-t)\,Re(z_1) \right] (z_2 - z_1)\,dt =$$

$$= (z_2 - z_1) \cdot \left[Re(z_2) \int_0^1 t\,dt + Re(z_1) \int_0^1 dt - Re(z_1) \int_0^1 t\,dt \right] =$$

$$= (z_2 - z_1) \cdot \left[\frac{Re(z_2)}{2} + Re(z_1) - \frac{Re(z_1)}{2} \right].$$ Luego:

$$\int_c Re(z) = \frac{1}{2} \left[Re(z_2) + Re(z_1) \right].$$

5) Si C es la circunferencia unitaria de centro 0, calcular las integrales:

a) $\oint_C \frac{dz}{z}$ b) $\oint_C \frac{dz}{|z|}$ c) $\oint_C \frac{|dz|}{z}$

d) $\oint \frac{dz}{z^2}$ e) $\oint \frac{dz}{|z^2|}$ f) $\oint \frac{|dz|}{z^2}$

Solución

a) Una parametrización de la circunferencia de centro 0 y radio 1 es:

$$C = \{ z(t) = e^{it} / 0 \leq t \leq 2\pi \}$$

$$f(z(t)) = \frac{1}{z(t)} = \frac{1}{e^{it}} \quad ; \; z'(t) = i \cdot e^{it}. \text{ Entonces:}$$

$$\oint_C \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cancel{e^{it}}} \cdot i \cdot \cancel{e^{it}} dt = i \cdot \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

Otra forma de hacer este apartado sería aplicando la fórmula integral de Cauchy:

Consideramos $f(z) = 1$, $z_0 = 0$. Es obvio que $f \in H(\mathbb{C})$ y que $z_0 = 0$ pertenece al interior del recinto que limita la curva C.

Aplicando la fórmula integral de Cauchy:

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz \Rightarrow \oint_C \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i\, f(0) =$$

$$= 2\pi i \cdot 1 = 2\pi i.$$

b) $\displaystyle\oint_C \frac{dz}{|z|}$.

Recordemos que según hemos visto en el apartado anterior, una parametrización de la curva es:

$C = \{ z(t) = e^{it} \,/\, 0 \leq t \leq 2\pi \}$. Tenemos que la función es:

$$f(z) = \frac{1}{|z|} \Rightarrow f(z(t)) = \frac{1}{|z(t)|} = \frac{1}{|e^{it}|} = 1$$

$z'(t) = i \cdot e^{it}$. Por tanto:

$$\oint_C \frac{1}{|z|}\,dz = \int_0^{2\pi} i \cdot e^{it} dt = i \cdot \int_0^{2\pi} e^{it} dt =$$

$$= i \cdot \left[\frac{1}{i}\, e^{it} \right]_0^{2\pi} = e^{2\pi i} - e^{0} = 0$$

c) $\oint_c \frac{|dz|}{z}$

Como $z(t) = e^{it} \Rightarrow dz(t) = i \cdot e^{it} dt \Rightarrow$

$\Rightarrow dz = i \cdot (\cos t + i \operatorname{sen} t)\, dt = (-\operatorname{sen} t + i \cos t)\, dt \Rightarrow$

$\Rightarrow |dz| = \sqrt{(-\operatorname{sen} t\, dt)^2 + (\cos t\, dt)^2} = dt$

Entonces:

$$\oint_c \frac{|dz|}{z} = \oint_0^{2\pi} \frac{dt}{e^{it}} = \int_0^{2\pi} e^{-it} dt =$$

$$= \left[-\frac{1}{i} e^{-it} \right]_0^{2\pi} = -\frac{1}{i} \left(e^{-2\pi i} - e^0 \right) = 0$$

d) $\oint \frac{dz}{z^2}$

Consideramos $f(z) = 1 \in H(\mathbb{C})$ y $z_0 = 0 \in$ interior del dominio que limita c. Entonces:

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

Luego:

$$f''(0) = \frac{2!}{2\pi i} \oint_c \frac{1}{z^2}\,dz \Rightarrow \oint_c \frac{1}{z^2}\,dz = \pi i \cdot f''(0)$$

Como $f(z) = 1 \Rightarrow f'(z) = 0 \Rightarrow f''(z) = 0$ con lo

que:

$$\oint_c \frac{dz}{z^2} = 0.$$

e) $\displaystyle\oint_c \frac{dz}{|z^2|}$

se tiene que $f(z) = \dfrac{1}{|z^2|} = \dfrac{1}{(|z|)^2} =$

Como $z(t) = e^{it} \Rightarrow z'(t) = i \cdot e^{it}$

$f(z(t)) = \dfrac{1}{|e^{it}|^2} = 1.$ Entonces:

$$\oint_c \frac{dz}{|z^2|} = \int_0^{2\pi} i \cdot e^{it}\,dt = \cancel{i}\left[\frac{1}{\cancel{i}} e^{it}\right]_0^{2\pi} = 0$$

f) $\displaystyle\oint_c \frac{|dz|}{z^2}$

$z(t) = e^{it} \Rightarrow z'(t) = i \cdot e^{it}$; $dz = z'(t)\,dt$

$dz = i \cdot e^{it} dt \Rightarrow |dz| = dt$

$$\oint_c \frac{|dz|}{z^2} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{2it}} dt = \int_0^{2\pi} e^{-2it} dt = \left[-\frac{1}{2i} e^{-2it} \right]_0^{2\pi}$$

$= 0$

6º) Calcular las integrales

a) $\int_C (3z^2 + 2z)\, dz$ siendo C el segmento desde $(1-i)$ a $(2+i)$

$z_1 = 1-i \quad z_2 = 2+i.$

Según hemos visto en el ejercicio 4-c) el segmento de extremos z_1 y z_2 viene dado por la parametrización:

$\sigma(z_1, z_2) = \{ t z_2 + (1-t) z_1 \,/\, 0 \le t \le 1 \}$

$t z_2 + (1-t) z_1 = t(1-i) + (1-t)(2+i) = (2-t) + (1-2t)i$

luego:

$\sigma(z_1, z_2) = \{ (2-t) + (1-2t)i \,/\, 0 \le t \le 1 \}$

Acabo de darme cuenta que nada de esto sirve para algo, no necesitamos la parametrización.

La función $f(z) = 3z^2 + 2z$ es holomorfa en $\mathbb{C}$, por lo que la integral de esta función no depende del camino, tan sólo depende de los extremos del camino. Una integral indefinida de $f(z) = 3z^2 + 2z$ es

$F(z) = z^3 + z^2$ ya que $F'(z) = 3z^2 + 2z = f(z)$.

Luego:

$$\int_c (3z^2 + 2z)\,dz = F(2+i) - F(1-i) = (2+i)^3 - (1-i)^3 =$$

$$= 8 + 12i + 6\cdot(-i)^2 + i^3 - (1 - 3i + 3\cdot(-i)^2 - i^3) =$$

$$= (8+6) + 11i - [(1-3) - 2i] = 2 + 11i + 2 + 2i = 4 + 13i$$

b) $\int_c (a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n)\,dz$ siendo c una curva cualquiera que una dos puntos cualesquiera z_1 y z_2

La función $f(z) = \sum_{i=0}^{n-} a_i \cdot z^{n-i}$ es holomorfa, una integral indefinida de esta función es:

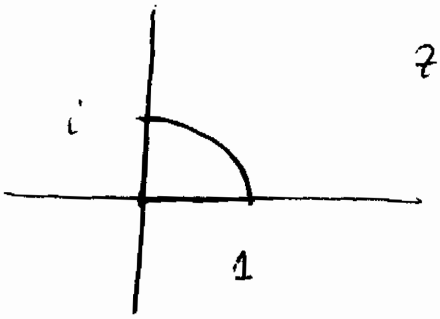
$F(z) = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{n-i+1} \cdot z^{n-i+1}$. Por ser f holomorfa la integral no depende del camino tan solo de los extremos

Luego:

$$\int_C (a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n)\, dz = \left[\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{n-i+1} \cdot z^{n-i+1} \right]_{z_1}^{z_2}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{n-i+1} \left[z_2^{\,n-i+1} - z_1^{\,n-i+1} \right]$$

7) Calcular la integral $\oint_C \frac{(\ln z)^3}{z}\, dz$ a lo largo de la circunferencia unitaria desde 1 hasta i, donde $\ln z$ es la determinación principal del logaritmo.



$z(t) = e^{it} \,/\, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

La parametrización de la curva es

$c \equiv \{ e^{it} / 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \} \quad z'(t) = i \cdot e^{it}$

$f(z) = (\ln z)^3 \Rightarrow f(z(t)) = e^{3it}$.

Luego:

$$\oint_c \frac{(\ln z)^3}{z}\, dz = \int_0^{\pi/2} \frac{e^{3it}}{\cancel{e^{it}}} \cdot i \cdot \cancel{e^{it}}\, dt = i \cdot \int_0^{\pi/2} e^{3it}\, dt =$$

$$i \cdot \int_0^{\pi/2} e^{3it}\,dt = i \cdot \left[\frac{1}{3i} \cdot e^{3it} \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}\left[e^{\frac{3\pi}{2} i} - e^0 \right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[-i - 1 \right] = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} i$$

8º) Calcular la integral $\oint \frac{2}{z^2-1}\,dz$

cuando:

a) C es la circunferencia de centro el origen y radio 2

b) C es la circunferencia de centro el origen y radio $\frac{1}{2}$

c) C es la circunferencia de centro el punto 1 y radio 1.

La descomposición de $\frac{2}{z^2-1}$ en fracciones simples es la siguiente:

$$\frac{2}{z^2-1} = \frac{2}{(z+1)(z-1)} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-1} = \frac{A(z-1)+B(z+1)}{(z+1)(z-1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(z-1)+B(z+1) = 2 \Rightarrow (A+B)z + (-A+B) = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} A+B=0 \\ -A+B=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow B = 1 \Rightarrow A = -1$$

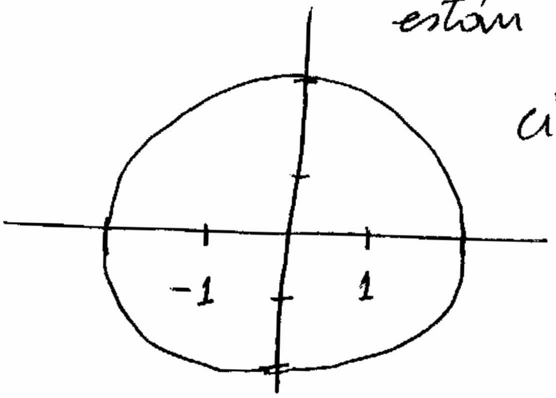
Luego:

$$\frac{2}{z^2-1} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}$$

a) Por tanto tenemos que

$$\int_C \frac{2}{z^2-1}\,dz = \int_C \frac{1}{z-1}\,dz - \int_C \frac{1}{z+1}\,dz$$

La funcion $f(z) = 1 \in H(\mathbb{C})$ y $z_0=-1$, $z_0=1$ están en el interior de la circunferencia.



Entonces:

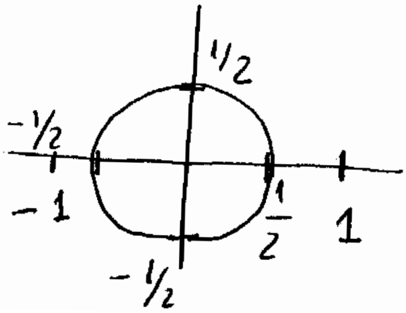
$$\int_C \frac{1}{z-1}\,dz = 2\pi i\, f(1) = 2\pi i$$

$$\int_C \frac{1}{z+1}\,dz = 2\pi i\, f(-1) = 2\pi i$$

Por tanto:

$$\int_C \frac{2}{z^2-1}\,dz = 2\pi i - 2\pi i = 0.$$

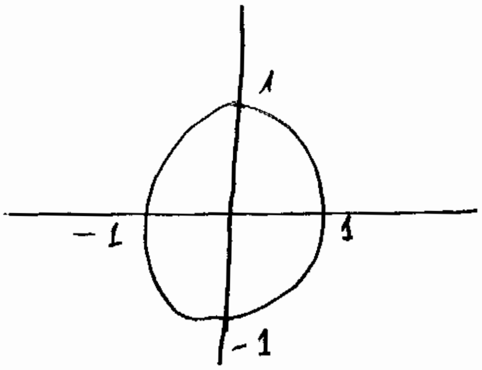
b)



Si Ω es el recinto que limita la circunferencia de centro 0 y radio $\frac{1}{2}$ entonces $f(z) = \frac{2}{z^2-1} \in H(\Omega)$ ya que en los únicos puntos en donde f no es holomorfa son $z=1$, $z=-1$ que no pertenecen al dominio simplemente conexo Ω. Como la línea es cerrada la integral vale cero, es decir:

$$\oint \frac{2}{z^2-1}\,dz = 0 .$$

c)



El problema que nos surge es que tanto $z=-1$ como $z=1$ no pertenecen al interior del dominio simplemente conexo $\Omega = \{ z(t) = e^{it} / 0 \leq t \leq 2\pi \}$. Veamos la forma de resolver esto. En primer lugar descompongamos en fracciones simples $\frac{2}{z^2-1}$

$$\frac{2}{z^2-1} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-1} = \frac{A(z-1)+B(z+1)}{(z+1)(z-1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (A+B)z + (-A+B) = 2 \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -A+B=2 \end{cases} \Rightarrow B=1,\ A=-1$$

Luego:

$$\int_C \frac{2}{z^2-1}\,dz = \underbrace{\int_C \frac{1}{z-1}\,dz}_{(*)} - \underbrace{\int_C \frac{1}{z+1}\,dz}_{(**)}$$

Veamos como podemos resolver $(*)$ y $(**)$

$f(z)=1$ es continua y por tanto la función permuta con límites, es decir:

$\lim\limits_{z\to a} f(z) = f\left(\lim\limits_{z\to a} z\right) = f(a)$. Entonces:

$$\int_C \frac{1}{z-1}\,dz = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_C \frac{1}{z-(1-\varepsilon)}\,dz.$$

$z_0 = 1-\varepsilon$ está en el interior de Ω por lo que podemos aplicar la fórmula integral de Cauchy

$$f(1-\varepsilon) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{z-(1-\varepsilon)}\,dz \Rightarrow \int_C \frac{1}{z-(1-\varepsilon)}\,dz = 2\pi i\, f(1-\varepsilon)$$

Como $f(1-\varepsilon) = 1$:

$$\int_c \frac{1}{z-(1-\varepsilon)} dz = 2\pi i \Rightarrow \int_c \frac{1}{z-1} dz = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_c \frac{1}{z-(1-\varepsilon)} dz$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} 2\pi i = 2\pi i.$$

de igual forma obtendríamos que:

$$\int_c \frac{1}{z+1} dz = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_c \frac{1}{z-(-1+\varepsilon)} dz$$, de nuevo

$f(z) = 1$ y $z_0 = -1+\varepsilon$ está en el interior de Ω.

Luego:

$$\int_c \frac{1}{z+1} dz = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_c \frac{1}{z-(-1+\varepsilon)} dz = \lim_{\varepsilon \to 0} 2\pi i \cdot f(-1+\varepsilon) = 2\pi i$$

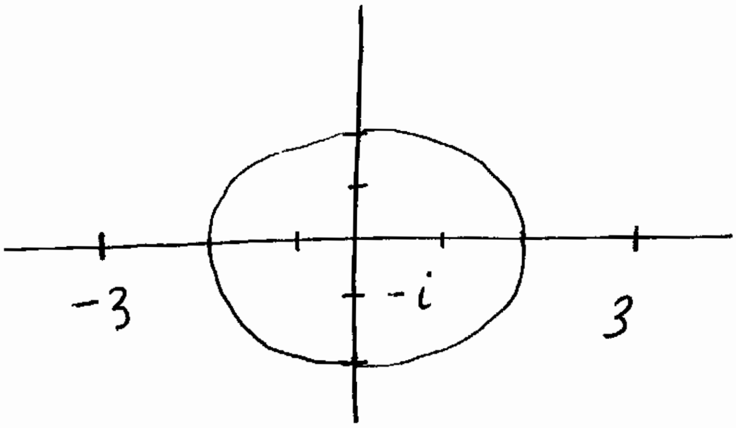
Por tanto:

$$\int_c \frac{2}{z^2-1} dz = \int_c \frac{1}{z-1} dz - \int_c \frac{1}{z+1} dz = 2\pi i - 2\pi i = 0$$

9) Calcular

$$\oint_{|z|=2} \frac{z}{(9-z^2)(z+i)}$$

$|z| = 2$ es la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio



El problema que nos surge es que $z=-3$ y $z=3$ no están en el dominio

$$\Omega = \{ z \in \mathbb{C} \ / \ |z| < 3 \}$$

Consideramos la integral:

$$\oint_{|z|=2} \frac{\frac{z}{9-z^2}}{z+i} \, dz$$

La función $f(z) = \dfrac{z}{9-z^2}$ es holomorfa en Ω, además $z=-i$ está en el interior de Ω.

Aplicando la formula integral de Cauchy:

$$f(-i) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\frac{z}{9-z^2}}{z+i}\, dz \Rightarrow \int \frac{z}{(9-z^2)(z+i)}\, dz = 2\pi i f(-i)$$

$$\Rightarrow \int \frac{z}{(9-z^2)(z+i)}\, dz = 2\pi i \cdot \frac{-i}{9-(-i)^2} = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$$

10º) Sea α un número complejo con $|\alpha| \neq 1$. Calcular

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1-2\alpha \cos t + \alpha^2}$$ integrando $(z-\alpha)^{-1} \cdot \left(z - \frac{1}{\alpha}\right)^{-1}$ a

lo largo de la circunferencia unidad.

Una parametrización de la circunferencia unidad es:

$$C = \{ e^{it} / 0 \leq t \leq 2\pi \} \quad z(t) = e^{it} \Rightarrow z'(t) = i \cdot e^{it}$$

$$f(z(t)) = [z(t) - \alpha]^{-1} \cdot \left[z(t) - \frac{1}{\alpha}\right]^{-1} = \frac{1}{(e^{it}-\alpha)\left(e^{it}-\frac{1}{\alpha}\right)} =$$

$$= \frac{1}{e^{2it} - \frac{1}{\alpha} e^{it} - \alpha e^{it} + 1}.$$

Luego:

$$\int_{|z|=1} (z-\alpha)^{-1} \cdot (z-\tfrac{1}{\alpha})^{-1} dz = \int_0^{2\pi} \frac{i \cdot e^{it}}{e^{2it} - \frac{1}{\alpha} e^{it} - \alpha e^{it} + 1} dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} \cdot i}{e^{it}\left(e^{it} - \frac{1}{\alpha} - \alpha + \frac{1}{e^{it}}\right)} dt = \int_0^{2\pi} \frac{i\,dt}{e^{it} - \alpha - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{e^{it}}}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{i\,dt}{e^{it} - \frac{\alpha^2+1}{\alpha} + e^{-it}} \quad (*)$$

Al ser $e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t$ $\quad e^{-it} = \cos(-t) + i \operatorname{sen}(-t) =$
$= \cos t - i \operatorname{sen} t$

tenemos que $e^{it} + e^{-it} = 2 \cos t$. Luego:

$$(*) = \int_0^{2\pi} \frac{i\,dt}{2\cos t - \frac{\alpha^2+1}{\alpha}} = \int_0^{2\pi} \frac{\alpha i\,dt}{2\alpha \cos t - (\alpha^2+1)} =$$

$$= -i\alpha \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\alpha^2 - 2\alpha \cos t + 1}.$$ Entonces:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\alpha^2 - 2\alpha \cos t + 1} = \frac{-1}{\alpha i} \int_{|z|=1} (z-\alpha)^{-1} \cdot (z-\tfrac{1}{\alpha})^{-1} dz.$$

Vamos a calcular ahora la integral:

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{(z-\alpha)\left(z-\frac{1}{\alpha}\right)}\, dz.$$

Se pueden dar dos casos:

i) Que α sea interior a la circunferencia, es decir que $|\alpha|<1$. En este caso $\frac{1}{\alpha}$ es exterior a la circunferencia, es decir $\frac{1}{\alpha}>1$ ó bien $\frac{1}{\alpha}<-1$

Consideramos $f(z)=\dfrac{1}{z-\frac{1}{\alpha}}$ que es holomorfa en la circunferencia de centro 0 y radio 1 (su único punto singular es $z=\frac{1}{\alpha}$). Aplicando la formula integral de Cauchy:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{\frac{1}{z-\frac{1}{\alpha}}}{z-\alpha} = f(\alpha) \Rightarrow \int_{|z|=1} \frac{\frac{1}{z-\frac{1}{\alpha}}}{z-\alpha} = 2\pi i \cdot f(\alpha) =$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{1}{\alpha-\frac{1}{\alpha}} = \frac{2\pi\alpha i}{\alpha^2-1}$$

luego, si $|\alpha|<1 \Rightarrow \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\alpha^2-2\alpha\cos t+1} = \frac{-1}{\alpha i}\,\frac{2\pi\alpha i}{\alpha^2-1} = \frac{-2\pi}{\alpha^2-1}$

ii) Si $|\alpha| > 1$, es decir si α es exterior a la circunferencia de centro 0 y radio 1, $\frac{1}{\alpha}$ es interior a esta circunferencia. Consideramos:

$f(z) = \dfrac{1}{z-\alpha}$ que es holomorfa en la circunferencia unitaria. Aplicando de nuevo la fórmula integral de Cauchy:

$$f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-\frac{1}{\alpha}}\,dz \Rightarrow \int_{|z|=1} \frac{\frac{1}{z-\alpha}}{z-\frac{1}{\alpha}} = 2\pi i f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{1}{\frac{1}{\alpha}-\alpha} = \frac{2\pi\alpha i}{1-\alpha^2}$$

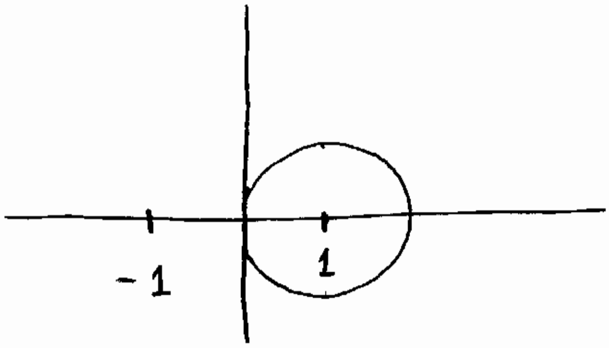
Luego, si $|\alpha| > 1$, se cumple:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\alpha^2 - 2\alpha\cos t + 1} = -\frac{1}{\cancel{\alpha} i}\cdot\frac{2\pi\cancel{\alpha} i}{1-\alpha^2} = \frac{-2\pi}{1-\alpha^2}$$

11) Calcular la integral:

$$\oint_{|z-1|=1} \frac{\operatorname{sen} \pi z}{z^2-1}\, dz.$$

La curva es una circunferencia de centro $(1,0)$ y radio 1



Consideramos la función $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} \pi z}{z+1}$, que es holomorfa en la circunferencia de centro $(0,1)$ y radio 1. ya que su único punto singular $z = -1$ no pertenece al interior de esta curva. Además $z = 1$ es un punto interior a la circunferencia, por lo que podemos aplicar la fórmula integral de Cauchy:

$$\oint_{|z-1|=1} \frac{\operatorname{sen} \pi z}{z^2-1}\, dz = \oint_{|z-1|=1} \frac{\frac{\operatorname{sen} \pi z}{z+1}}{z-1}\, dz$$ y se verifica:

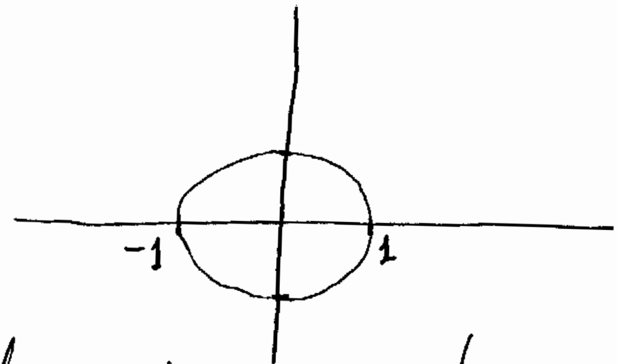
$$f(1) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-1|=1} \frac{\frac{\operatorname{sen} \pi z}{z+1}}{z-1} \Rightarrow \oint_{|z-1|=1} \frac{\operatorname{sen} \pi z}{z^2-1} = 2\pi i\, f(1) =$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{\operatorname{sen} \pi}{2} = 0$$

Este ejercicio no está en la hoja de problemas pero me parece interesante, fue puesto en el examen del /1/03:

12) Calcular $\int_c \frac{\cos \pi z}{z^2-1}\, dz$ siendo c la circunferencia de centro 0 y radio 1.

La pega que nos surge es que $z=1$, $z=-1$ no están en el interior de la circunferencia de centro 0 y radio 1.



Vamos a descomponer en fracciones simples la fracción $\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{(z+1)(z-1)} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-1}$

$$\frac{1}{\cancel{z^2-1}} = \frac{A(z-1)+B(z+1)}{\cancel{(z-1)(z+1)}}$$

$$(A+B)z + (-A+B) = 1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ -A+B=1 \end{array}\right\} \Rightarrow B = \frac{1}{2} \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$$

Luego:

$$\int_c \frac{\cos \pi z}{z^2-1}\,dz = \frac{1}{2}\underbrace{\int_c \frac{\cos \pi z}{z-1}\,dz}_{(*)} - \frac{1}{2}\underbrace{\int_c \frac{\cos \pi z}{z+1}\,dz}_{(*)}$$

Vamos a calcular $(*)$ y $(**)$.

$f(z) = \cos \pi z$ es continua y holomorfa en $\mathbb{C}$ y tenemos que $\displaystyle\int_c \frac{\cos \pi z}{z-1}\,dz = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_c \frac{\cos \pi z}{z-(1-\varepsilon)}\,dz$

y $z_0 = 1-\varepsilon$ es interior a c, aplicando el teorema de la formula integral de Cauchy:

$$f(1-\varepsilon) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{\cos \pi z}{z-(1-\varepsilon)}\,dz \Rightarrow \int \frac{\cos \pi z}{z-(1-\varepsilon)}\,dz = 2\pi i\, f(1-\varepsilon)$$

$= 2\pi i \cdot \underline{\cos \pi(1-\varepsilon)}$. Luego:

$$\int_c \frac{\cos \pi z}{z-1}\,dz = \lim_{\varepsilon \to 0} 2\pi i \cos \pi(1-\varepsilon) = 2\pi i \cos \pi = -2\pi i$$

Del mismo modo calculamos

$$\int_C \frac{\cos \pi z}{z+1} dz = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_C \frac{\cos \pi z}{z-(-1+\varepsilon)} dz$$, ahora si que

$z_0 = -1+\varepsilon$ está en el interior de la curva. Por la fórmula integral de Cauchy:

$$f(-1+\varepsilon) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\cos \pi z}{z-(-1+\varepsilon)} dz \Rightarrow \int_C \frac{\cos \pi z}{z-(-1+\varepsilon)} dz = 2\pi i f(-1+\varepsilon)$$

$$= 2\pi i \cdot \cos \pi(-1+\varepsilon) \Rightarrow \int_C \frac{\cos \pi z}{z+1} dz = \lim_{\varepsilon \to 0} 2\pi i \cos \pi(-1+\varepsilon) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} 2\pi i \cos(-\pi) = -2\pi i.$$

Luego:

$$\int_C \frac{\cos \pi z}{z^2-1} dz = \frac{1}{2} \cdot (-2\pi i) - \frac{1}{2} (-2\pi i) = 0$$