2ª Relación de Problemas.

1º Supongamos que

$$f(z) = \frac{(z-i)(z-1)}{z(z^2+1)}$$

Determinar en qué punto o puntos de los siguientes dominios no está definida $f(z)$.

(a) $|z| < \frac{3}{4}$

Este recinto se trata del interior de un círculo de centro $(0,0)$ y radio $\frac{3}{4}$ ya que:

$$z = x+iy \Rightarrow |z| = \sqrt{x^2+y^2} < \frac{3}{4} \Rightarrow x^2+y^2 < \frac{9}{16}$$

Los puntos singulares de la función son aquellos que anulan al denominador

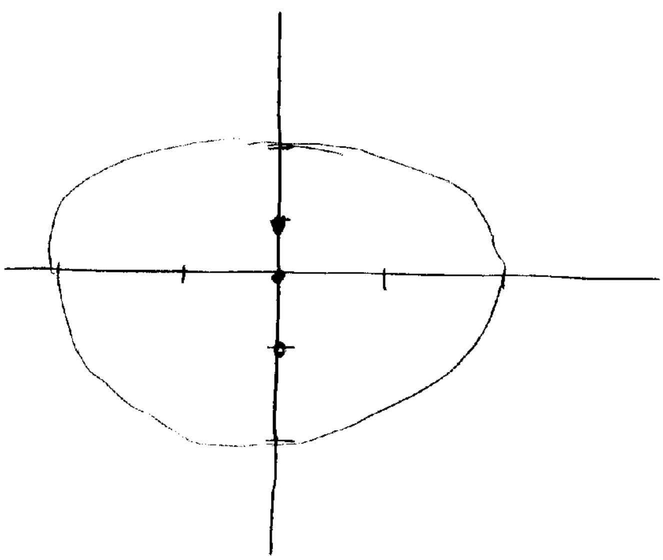
$$z(z^2+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \Rightarrow x = y = 0 \\ z^2 = -1 \Rightarrow x = 0,\ y = 1 \text{ ó } x = 0,\ y = -1 \end{cases}$$

El punto $(0,0)$ está en el dominio aunque no lo están los puntos $(0,1)$ y $(0,-1)$.

Luego:

En el punto $(0,0) \in \{ z \in \mathbb{C} \,/\, |z| < \frac{3}{4} \}$ no está definida la función $f(z)$.

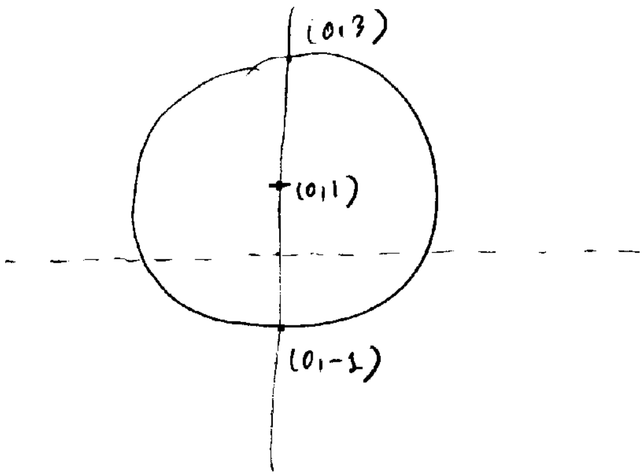
b) $|z| < 2$ esto es el interior de un círculo de centro $(0,0)$ y radio 2. Teniendo en cuenta lo anterior $f(z)$ no está definida ni en $(0,0)$ ni en $(0,1)$ ni en $(0,-1)$ que son puntos de este dominio.



c) $|z-i| < 2$ se trata de un círculo de centro $(0,1)$ y radio 2 ya que:

Si $z = x+iy \Rightarrow z-i = x+(y-1)i \Rightarrow$

$|z-i| = \sqrt{x^2 + (y-1)^2} < 2 \Rightarrow x^2 + (y-1)^2 < 4$ esto es el interior de un circulo de centro $(0,1)$ y radio 2



Luego $f(z)$ no está definida ni en $(0,0)$ ni en $(0,1)$ pertenecientes a este dominio (el punto $(0,-1)$ no pertenece a este dominio)

2°) Sea $f(z) = z^2 + 1$. Determinar:

a) $f(f(i))$

$f(i) = i^2 + 1 = 0 \Rightarrow f(f(i)) = f(0) = 0^2 + 1 = 1$

b) $f\left(f\left(\frac{1}{1+i}\right)\right)$

$f\left(\frac{1}{1+i}\right) = \left(\frac{1}{1+i}\right)^2 + 1 = \frac{1}{1+i^2+2i} + 1 = \frac{1}{2i} + 1 =$

$= \frac{i}{-2} + 1 = \frac{i-2}{-2} = \frac{2-i}{2} \Rightarrow f\left(f\left(\frac{1}{1+i}\right)\right) = f\left(\frac{2-i}{2}\right)$

$\Rightarrow f\left(f\left(\frac{1}{1+i}\right)\right) = f\left(\frac{2-i}{2}\right) = \left(\frac{2-i}{2}\right)^2 + 1 = \frac{4+i^2-4i}{4} + 1$

$\Rightarrow f\left(f\left(\frac{1}{1+i}\right)\right) = \frac{7-4i}{4} = \frac{7}{4} - i$

c) $f(f(z))$ en la forma $u(x,y) + i \cdot v(x,y)$

Sea $z = x+iy$. Entonces:

$f(z) = z^2+1 = (x+iy)^2+1 = (x^2-y^2+1) + 2xyi$, es decir

que $u(x,y) = x^2-y^2+1$ $\quad v(x,y) = 2xy$

3º Estudiar la continuidad de las funciones:

a) $f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^2+1}{z-i} & \text{si } z \neq i \\ 3i & \text{si } z = i \end{cases}$

El punto crítico es $z=i$, es decir que de momento tan sólo podemos afirmar que la función es continua $\forall z \neq i$. Veamos qué para si $z=i$.

$\exists f(i) = 3i$

$$\exists \lim_{z\to i} f(z) = \lim_{z\to i} \frac{z^2+1}{z-i} = \frac{\cancel{(z-i)}(z+i)}{\cancel{(z-i)}} = 2i$$

Como $\lim_{z\to i} f(z) \neq f(i)$ la función no es continua en $z=i$.

b) $$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^2+9}{z-3i} & \text{si } z\neq 3i \\ 6i & \text{si } z=3i \end{cases}$$

El punto crítico es $z=3i$. La función es continua $\forall z\neq 3i$. Veamos qué pasa en $z=3i$

$\exists f(3i) = 6i$

$$\exists \lim_{z\to 3i} f(z) = \lim_{z\to 3i} \frac{z^2+9}{z-3i} = \lim_{z\to 3i} \frac{\cancel{(z-3i)}(z+3i)}{\cancel{(z-3i)}} = 6i$$

Como $\lim_{z\to 3i} f(z) = f(3i)$ la función es también continua en $z=3i$. Luego $f(z)$ es continua $\forall z\in\mathbb{C}$

4º ¿Para qué valores de z es diferenciable la función $f(z) = x^2 + i y^2$?

Sea $u = x^2$ $v = y^2$. Para que la función sea diferenciable han de verificarse las condiciones de Cauchy-Riemann:

$$u'_x = v'_y \qquad u'_y = -v'_x$$

$$u'_x = 2x = 2y = v'_y \Rightarrow x = y$$

$$u'_y = 0 = -v'_x$$

Luego la función $f(z)$ es diferenciable en

$$M = \{ z \in \mathbb{C} \ / \ Re(z) = Im(z) \}$$

5º ¿Para qué valores de z es diferenciable la función $f(z) = \dfrac{z^3+2}{z^2+1}$?

Se trata de una función racional. Los puntos donde no es derivable son aquellos que anulan al denominador.

$z^2+1=0 \Rightarrow z=\pm i$

luego f es diferenciable en $\mathbb{C}-\{-i, i\}$

6º ¿En qué región del plano complejo son diferenciables las siguientes funciones? Si la función posee derivada sobre un dominio, encuentre una expresión para $f'(z)$ en términos de z o de x e y. Si existe $f'(1+i)$ escribir su valor numérico.

a) $f(z)=2z^2+3$ es una función entera, es decir, diferenciable $\forall z \in \mathbb{C}$ ya que es polinómica.

$f'(z)=4z \Rightarrow f'(1+i)=4(1+i)$

b) $f(z)=z+z^{-1}=z+\frac{1}{z}$

f es diferenciable $\forall z \in \mathbb{C}^*=\mathbb{C}-\{0\}$

$f'(z)=1-\frac{1}{z^2} \Rightarrow f'(1+i)=1-\frac{1}{(1+i)^2}=1-\frac{1}{1+i^2+2i}$

$f'(1+i)=\frac{2i-1}{2i}=\frac{-2-i}{-2}=\frac{2+i}{2}=1+\frac{1}{2}i$

c) $f(z) = -xy + \frac{i}{2}(x^2 - y^2)$

Se tiene que $u(x,y) = -xy$ $\quad v(x,y) = \frac{1}{2}(x^2-y^2)$

$u'_x = -y \qquad v'_y = \frac{1}{2}\cdot(-2y) = -y \Rightarrow u'_x = v'_y$

$u'_y = -x \qquad v'_x = x \Rightarrow u'_y = -v'_x$

Como se verifican las condiciones de Cauchy-Riemann $\forall x,y \in \mathbb{R}$, la función es diferenciable $\forall z \in \mathbb{C}$, además la diferencial vale:

$f'(z) = u'_x - i\cdot u'_y = -y + ix$

$f'(1+i) = -1+i$

d) $f(z) = (y+1)^2 + i(x+1)^2$

$u(x,y) = (y+1)^2$; $v(x,y) = (x+1)^2$

$u'_x = 0 \qquad v'_y = 0 \Rightarrow u'_x = v'_y$

$u'_y = 2(y+1) \qquad v'_x = 2(x+1)$.

Para que se cumplan las condiciones de Cauchy-Riemann, y por tanto para que f sea diferenciable, ha de verificarse que:

$u'_y = -v'_x \Rightarrow 2(y+1) = -2(x+1) \Rightarrow y = -x$

Luego f es diferenciable en el conjunto:

$H = \{ z = x+iy \,/\, y = -x \} = \{ z = x - ix = x(1-i) \}$

$f'(z) = u'_x - u'_y i = 0 - 2(y+1)i = 2(x-1)i$

$f'(x+iy) = 2(x-1)i \Rightarrow f'(1+i) = 2(1-1)i = 0$

e) $f(z) = e^{x^2-y^2}\left[\cos(2xy) + i \operatorname{sen}(2xy)\right]$

Se tiene que:

$u(x,y) = e^{x^2-y^2}\cos(2xy) \qquad v(x,y) = e^{x^2-y^2}\operatorname{sen}(2xy)$

Para que f sea diferenciable han de verificarse las condiciones de Cauchy-Riemann:

$u'_x = v'_y$

$u'_y = -v'_x$

Las condiciones de Cauchy-Riemann se verifican ya que:

$$u'_x = 2x \cdot e^{x^2-y^2} \cos(2xy) - 2y e^{x^2-y^2} \operatorname{sen}(2xy)$$

$$v'_y = -2y e^{x^2-y^2} \operatorname{sen}(2xy) + 2x \cdot e^{x^2-y^2} \cos(2xy)$$

$$\Big\} \; u'_x = v'_y$$

$$u'_y = -2y e^{x^2-y^2} \cos(2xy) - 2x \cdot e^{x^2-y^2} \operatorname{sen}(2xy)$$

$$v'_x = 2x e^{x^2-y^2} \operatorname{sen}(2xy) + 2y \cdot e^{x^2-y^2} \cos(2xy)$$

$$\Big\} \; u'_y = -v'_x$$

Entonces la derivada vale:

$$f'(z) = u'_x - u'_y i$$

$$f'(z) = 2e^{x^2-y^2}\left[x \cos(2xy) - y \operatorname{sen}(2xy)\right] + 2e^{x^2-y^2}\left[-y\cos(2xy) - x\operatorname{sen}(2xy)\right] i$$

$$f'(1+i) = 2e^0\left[\cos 2 - \operatorname{sen} 2\right] + 2e^0\left[-\cos 2 - \operatorname{sen} 2\right] i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(1+i) = 2(\cos 2 - \operatorname{sen} 2) - 2i(\cos 2 + \operatorname{sen} 2)$$

f) $f(z) = \dfrac{z^2}{e^x \cos y + i e^x \operatorname{sen} y}$; $z = x + yi$

En términos de (x,y) la función sería

$$f(z) = \frac{x^2 + y^2 + 2xyi}{e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)}$$

. En términos de z

La función sería:

$$f(z) = \frac{z^2}{e^z}$$, mejor nos quedamos con esta expre-

sión.

Los puntos singulares de f se encuentran entre los que anulan el denominador de f y como $e^z \neq 0$ $\forall z \in \mathbb{C}$, la función $f(z)$ es entera.

$$f'(z) = \frac{2z \cdot e^z - z^2 \cdot e^z}{(e^z)^2} = \frac{2z - z^2}{e^z}$$

$$f(1+i) = \frac{2(1+i) - (1+i)^2}{e^{1+i}} = \frac{2 \cancel{+2i} - 1 + 1 \cancel{-2i}}{e^{1+i}}$$

$$f(1+i) = \frac{2}{e^{1+i}} \Rightarrow f(1+i) = \frac{2}{e(\cos 1 + i \operatorname{sen} 1)}$$

7. Verificar que no existe $f'(z)$ para:

a) $f(z) = \overline{z}$

Si $z = x+iy \Rightarrow f(z) = x - iy$ $\quad u_x = x \quad v_y = -y$

$u'_x = 1 \qquad v'_y = -1 \Rightarrow u'_x \neq v'_y$ no es diferenciable.

b) $f(z) = z - \overline{z} \Rightarrow z = x+iy$

$f(z) = x+iy - (x-iy) = 2x + 2iy$

$u = 2x \quad v = 2y \; ; \; u'_x = 2 = v'_y \qquad u'_y = 2 \neq -v'_x = -2 \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ no es diferenciable

c) $f(z) = 2x + ixy^2$

$u = 2x \quad v = xy^2$

$u'_x = 2 \quad v'_y = 2xy$

$u'_y = 0 \quad v'_x = y^2$

Para que f fuera diferenciable $\left.\begin{array}{l} 2xy = 2 \Rightarrow xy = 1 \\ y^2 = 0 \Rightarrow y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 \cdot x = 1$ Imposible $\Rightarrow f$ no es diferenciable $\forall z \in \mathbb{C}$

d) $f(z) = e^x \cdot e^{-iy} \Rightarrow f(z) = e^x(\cos y - i \operatorname{sen} y)$

$u(x,y) = e^x \cos y \qquad v(x,y) = -e^x \operatorname{sen} y$

$u'_x = e^x \cos y \quad v'_y = -e^x \cos y \Rightarrow u'_x \neq v'_y$ f no es diferenciable.

8º Demostrar que $f'(z)$ existe en todas partes para:

a) $f(z) = iz + 2$. Esta función es entera por ser polinómica, además $f'(z) = i \quad \forall z \in \mathbb{C}$

b) $f(z) = e^{-x} \cdot e^{-iy} \Rightarrow f(z) = e^{-z}$ es entera y su derivada vale $f'(z) = -e^{-z} \; \forall z \in \mathbb{C}$

c) $f(z) = z^3$ es entera por ser polinómica, $\forall z \in \mathbb{C}$ su derivada vale $f'(z) = 3z^2$.

9º Comprobar que las siguientes funciones no son holomorfas en ningún punto:

a) $f(z) = xy + iy$.

Para que f fuese holomorfa debe cumplir las condiciones de Cauchy-Riemann:

$u'_x = v'_y \qquad u'_y = -v'_x$

En este caso $u(x,y) = xy$; $v(x,y) = y$

$u'_x = y \quad v'_y = 1 \Rightarrow v'_y \neq u'_x \Rightarrow f$ no es holomorfa en ningún punto.

b) $f(z) = e^{ix}e^{y} = e^{y}(\cos x + i \operatorname{sen} x) \Rightarrow \begin{cases} u(x,y) = e^{y}\cos x \\ v(x,y) = e^{y}\operatorname{sen} x \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} u'_x = -e^{y}\operatorname{sen} x \\ v'_y = e^{y}\operatorname{sen} x \end{array}\right\}$ Como $u'_x \neq v'_y$ f no es diferenciable en ningún punto.

10º) Determinar los puntos singulares de las siguientes funciones:

a) $f(z) = \dfrac{2z+1}{z(z^2+1)}$

Se trata de una función racional, los puntos singulares son aquellos que anulan al denominador

$z(z^2+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ z = i \\ z = -i \end{cases}$ estos 3 son los puntos singulares

b) $f(z) = \dfrac{z^3+i}{z^2-3z+2}$

Los puntos singulares son los valores de z tales que

$$z^2-3z+2=0 \Rightarrow z = \frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2} = \frac{3\pm 1}{2} \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

Es decir los puntos singulares de f son $z=1$, $z=2$.

c) $f(z) = \dfrac{z^2+1}{(z+2)(z^2+2z+2)}$

Los puntos singulares de f son los valores de z tales que:

$$(z+2)(z^2+2z+2)=0 \begin{cases} z=-2 \\ z = \dfrac{-2\pm\sqrt{4-8}}{2} = \dfrac{-2\pm 2i}{2} \begin{cases} -1-i \\ -1+i \end{cases} \end{cases}$$

Los puntos singulares de f son:

$z=-2$, $z=-1-i$, $z=-1+i$.

11º) En qué regiones del plano complejo son holomorfas las siguientes funciones:

a) $f(z) = \tan(z)$

Entonces podemos poner:

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}$$

f será holomorfa en aquellos valores de z tales que $\cos z \neq 0$. Veamos cuando vale $\cos z = 0$, $z \in \mathbb{C}$

$$\cos z = \cos(x+iy) = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2} = 0 \Rightarrow e^{zi} + e^{-zi} = 0$$

$$\Rightarrow (e^{zi})^2 - 1 = 0 \Rightarrow e^{zi} = \pm 1.$$

- Si $e^{zi} = 1 \Rightarrow \ln e^{zi} = \ln 1 \Rightarrow zi = \ln 1 \Rightarrow$

$zi = \ln|1| + i\arg(1) \Rightarrow zi = 2k\pi i \quad k \in \mathbb{Z}. \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{z = 2k\pi} \quad (\mathrm{I})$

- Si $e^{zi} = -1 \Rightarrow zi = \ln(-1) \Rightarrow zi = \ln|-1| + i\arg(-1)$

$\Rightarrow z = \pi + 2k\pi \Rightarrow \boxed{z = (2k+1)\cdot\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.} \quad (\mathrm{II})$

Las expresiones (I) y (II) quedan englobadas en $z = k\pi$. Luego f es holomorfa en:

$$H = \{ z \in \mathbb{C} \ / \ z \neq k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \}$$

b) $f(z) = \dfrac{1}{\cos(iz)}$

f es holomorfa en la region $\{ z \in \mathbb{C} \,/\, \cos(iz) \neq 0 \}$

Veamos cuando $\cos(iz) = 0$. Como $\cos(iz) = \cosh(z) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(z) = \dfrac{2}{e^{z} + e^{-z}}$. Tenemos que ver entonces

para qué valores de z es $\cosh(z) = 0 \Rightarrow e^{z} + e^{-z} = 0$

$\Rightarrow (e^{z})^2 + 1 = 0 \rightarrow e^{z} = \pm i$

- Si $e^{z} = i \Rightarrow z = \ln i \Rightarrow z = \ln|i| + i \cdot \arg(i) \Rightarrow$

$\Rightarrow z = i \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) \Rightarrow \boxed{z = \frac{(1+4k)\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}.}$

- Si $e^{z} = -i \Rightarrow z = \ln(-i) \Rightarrow z = \ln|-i| + i \cdot \arg(-i) \Rightarrow$

$\Rightarrow z = i \cdot \left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right) \Rightarrow \boxed{z = \frac{(3+4k)\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}}$

Luego f es holomorfa en la region:

$H = \left\{ z \in \mathbb{C} \,/\, z \neq \frac{(1+4k)\pi}{2},\ z \neq \frac{(3+4k)\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$

c) $f(z) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(iz)}$

Este ejercicio es parecido al anterior, como $\operatorname{sen}(iz) = \operatorname{sen}h(z)$, el dominio en donde f es holomorfa sera $\{z \in \mathbb{C} \,/\, \operatorname{sen}h(z) \neq 0\}$. Veamos cuando es $\operatorname{sen}h(z) = 0 \Rightarrow \dfrac{e^z - e^{-z}}{2} = 0 \Rightarrow e^z - e^{-z} = 0$

$\Rightarrow (e^z)^2 - 1 = 0 \Rightarrow e^z = \pm 1$

- Si $e^z = 1 \Rightarrow z = \ln 1 = \ln|1| + i \arg(1) \Rightarrow$

$\Rightarrow z = i(2k\pi) = 2k\pi i \quad k \in \mathbb{Z} \quad (*)$

- Si $e^z = -1 \Rightarrow z = \ln(-1) \Rightarrow z = \ln|-1| + i\arg(-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow z = i(\pi + 2k\pi) = (2k+1)\pi i \quad (**)$

Las condiciones $(*)$ y $(**)$ se engloban en $z = k\pi i$ luego la región del plano en donde f es holomorfa es: $\{z \in \mathbb{C} \,/\, z \neq k\pi i\}$

d) $f(z) = \dfrac{1}{\sqrt{3}\,\text{sen}\,z - \cos z}$

f es holomorfa en la región del plano:

$\{z \in \mathbb{C} \,/\, \sqrt{3}\,\text{sen}\,z - \cos z \neq 0\}$. Veamos para qué valores de z es: $\sqrt{3}\,\text{sen}\,z - \cos z = 0 \Rightarrow \boxed{\sqrt{3}\,\text{sen}\,z = \cos z}$ (I)

$\Rightarrow 3\,\text{sen}^2 z = \cos^2 z \Rightarrow 3(1-\cos^2 z) = \cos^2 z \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2 z = \dfrac{3}{4} \Rightarrow \cos z = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{\text{sen}\,z = \pm\dfrac{1}{2}}$

- Los valores $\cos z = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\text{sen}\,z = \dfrac{1}{2}$ y $\cos z = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\text{sen}\,z = -\dfrac{1}{2}$ verifican (I) por lo que son solución. Sin embargo los valores $\cos z = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\text{sen}\,z = \dfrac{1}{2}$ y $\cos z = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\text{sen}\,z = -\dfrac{1}{2}$ no verifican (I) por lo que no son solución.

- Si $\cos z = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ y $\text{sen}\,z = \dfrac{1}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow e^{iz} + \cancel{e^{-iz}} = \sqrt{3} \\ \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow e^{iz} - \cancel{e^{-iz}} = i \end{array}\right\}$$

$$2e^{iz} = \sqrt{3}+i \Rightarrow e^{iz} = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$$

$$e^{iz} = \frac{\sqrt{3}+i}{2} \Rightarrow iz = \ln\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right) \Rightarrow iz = \ln\left|\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right| +$$

$$+ i \cdot \arg\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right) = \ln 1 + i\cdot\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right) \Rightarrow iz = i\cdot\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{z = \frac{(1+12k)\pi}{6} \quad k \in \mathbb{Z}}$$

• Si $\cos z = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{sen} z = -\frac{1}{2}$:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \quad e^{iz}+e^{-iz} = -\sqrt{3} \\[2em] \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \quad e^{iz}-e^{-iz} = -i \end{array}\right\}$$

$$e^{iz} = -\frac{\sqrt{3}+i}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow iz = \ln\left(-\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right) = \ln|1| + i\cdot\arg\left(-\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi \Rightarrow \boxed{z = \frac{(7+12k)\pi}{6} \quad k \in \mathbb{Z}}$$

Luego la región del plano en donde f es holomorfa es:

$$H = \left\{ z \in \mathbb{C} \;/\; z \neq \frac{(1+12k)\pi}{6},\ z \neq \frac{(7+12k)\pi}{6},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

12°) Consideramos la función holomorfa:

$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ y supongamos que expresamos x e y en términos de las variables polares r y θ, donde $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$. Entonces $f(z) = u(r,\theta) + i\,v(r,\theta)$.

a) Obtener las expresiones correspondientes para $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$.

En este apartado se trata de aplicar la regla de la cadena

$$u \begin{cases} x \begin{cases} r \\ \theta \end{cases} \\ y \begin{cases} r \\ \theta \end{cases} \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \cos\theta + \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \frac{-\mathrm{sen}\,\theta}{r}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow 2r\frac{\partial r}{\partial x} = 2x \Rightarrow \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \frac{r\cos\theta}{r} = \cos\theta$$

$$\theta = \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{-y}{x^2} = \frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{-y}{r^2} = \frac{-r\,\mathrm{sen}\,\theta}{r^2} = \frac{-\mathrm{sen}\,\theta}{r}$$

b) Determinar las expresiones $\frac{\partial r}{\partial x}$, $\frac{\partial r}{\partial y}$, $\frac{\partial \theta}{\partial x}$, $\frac{\partial \theta}{\partial y}$.

Usar estas cuatro expresiones en las ecuaciones obtenidas en la sección anterior. Comprobar que u y v satisfacen las ecuaciones:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial r} \cdot \cos\theta - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial h}{\partial \theta} \cdot \operatorname{sen}\theta$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial r} \cdot \operatorname{sen}\theta + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial h}{\partial \theta} \cdot \cos\theta$$

donde h puede ser igual a u o a v.

Tenemos que $r = \sqrt{x^2+y^2}$ y que $\theta = \operatorname{arctg}(y/x)$

Luego:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{r}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{-y}{x^2} = \frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{-y}{r^2}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x+\frac{y^2}{x}} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

Supongamos que $h(x,y) = u(x,y)$ ó que $h(x,y) = v(x,y)$.

Por la regla de la cadena:

- $$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial r}\cdot\frac{x}{r} + \frac{\partial h}{\partial \theta}\cdot\frac{-y}{r^2}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial r}\cdot\frac{\cancel{r}\cos\theta}{\cancel{r}} + \frac{\partial h}{\partial \theta}\cdot\frac{-r\operatorname{sen}\theta}{r^2} = \frac{\partial h}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial \theta}\operatorname{sen}\theta$$

- $$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial r}\cdot\frac{y}{r} + \frac{\partial h}{\partial \theta}\cdot\frac{x}{r^2}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial r}\cdot\frac{r\operatorname{sen}\theta}{r} + \frac{\partial h}{\partial \theta}\cdot\frac{r\cos\theta}{r^2} = \frac{\partial h}{\partial r}\cdot\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial r}\cdot\cos\theta$$

c) Escribir las ecuaciones de Cauchy-Riemann usando las dos ecuaciones del apartado anterior. Multiplicar la primera de las ecuaciones de Cauchy-Riemann por $\cos\theta$, la segunda por $\operatorname{sen}\theta$ y sumarlas, para demostrar que:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad (1)$$

Ahora multiplicar la primera ecuación de Cauchy-Riemann por $-\operatorname{sen}\theta$, la segunda por $\cos\theta$ y sumarlas para demostrar que:

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad (2)$$

Las relaciones expresadas por las ecuaciones (1) y (2) son la forma polar de las ecuaciones de Cauchy-Riemann (Si las primeras derivadas parciales de u y v son continuas en un punto de coordenadas $r \neq 0$ y θ, las ecuaciones (1) y (2) constituyen una condición necesaria y suficiente para la existencia de la derivada en dicho punto)

Multiplicamos $\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial r} \cdot \cos\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} \cdot \operatorname{sen}\theta$ por $\cos\theta$, obteniendo:

$$\frac{\partial h}{\partial x} \cdot \cos\theta = \frac{\partial h}{\partial r} \cdot \cos^2\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} \cdot \operatorname{sen}\theta \cos\theta \quad (*)$$

Multiplicamos $\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial r} \cdot \operatorname{sen}\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} \cdot \cos\theta$ por $+\operatorname{sen}\theta$

obteniendo

$$+\frac{\partial h}{\partial y} \cdot \operatorname{sen}\theta = +\frac{\partial h}{\partial r} \cdot \operatorname{sen}^2\theta + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial h}{\partial \theta} \cdot \operatorname{sen}\theta \cos\theta \quad (**)$$

Supongamos que $h(x,y) = u(x,y)$ o que $h(x,y) = v(x,y)$.

Por la regla de la cadena:

• $$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial r} \cdot \frac{x}{r} + \frac{\partial h}{\partial \theta} \cdot \frac{-y}{r^2}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial r} \cdot \frac{\cancel{r} \cos\theta}{\cancel{r}} + \frac{\partial h}{\partial \theta} \cdot \frac{-r \operatorname{sen}\theta}{r^2} = \frac{\partial h}{\partial r} \cos\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} \operatorname{sen}\theta$$

• $$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial r} \cdot \frac{y}{r} + \frac{\partial h}{\partial \theta} \cdot \frac{x}{r^2}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial r} \cdot \frac{r \operatorname{sen}\theta}{r} + \frac{\partial h}{\partial \theta} \cdot \frac{r \cos\theta}{r^2} = \frac{\partial h}{\partial r} \cdot \operatorname{sen}\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} \cdot \cos\theta$$

c) Escribir las ecuaciones de Cauchy-Riemann usando las dos ecuaciones del apartado anterior. Multiplicar la primera de las ecuaciones de Cauchy-Riemann por $\cos\theta$, la segunda por $\operatorname{sen}\theta$ y sumarlas para demostrar que:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad (1)$$

Ahora multiplicar la primera ecuación de Cauchy-Riemann por $-\operatorname{sen}\theta$ y la segunda por $\cos\theta$ y sumarlas para demostrar que: $\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta}$ (2)

Las relaciones expresadas por las ecuaciones (1) y (2) son la forma polar de las ecuaciones de Cauchy-Riemann (Si las primeras derivadas parciales de u y v son continuas en un punto de coordenadas $r \neq 0$ y θ, las ecuaciones (1) y (2) constituyen una condición necesaria y suficiente para la existencia de la derivada en dicho punto)

Las condiciones de Cauchy-Riemann para f serían:

$u'_x = v'_y$

$u'_y = -v'_x$

Teniendo en cuenta que, según las relaciones anteriores,:

$u'_x = u'_r \cos\theta - \frac{1}{r} u'_\theta \operatorname{sen}\theta \qquad u'_y = u'_r \operatorname{sen}\theta + \frac{1}{r} u'_\theta \cos\theta$

$v'_x = v'_r \cos\theta - \frac{1}{r} v'_\theta \operatorname{sen}\theta \qquad v'_y = v'_r \operatorname{sen}\theta + \frac{1}{r} v'_\theta \cos\theta$

Las condiciones de Cauchy-Riemann serían en este caso:

$u'_r \cos\theta - \frac{1}{r} u'_\theta \operatorname{sen}\theta = v'_r \operatorname{sen}\theta + \frac{1}{r} v'_\theta \cos\theta \qquad (I)$

$u'_r \operatorname{sen}\theta + \frac{1}{r} u'_\theta \cos\theta = -v'_r \cos\theta + \frac{1}{r} v'_\theta \operatorname{sen}\theta \qquad (II)$

Si multiplicamos (I) por $\cos\theta$ y (II) por $\operatorname{sen}\theta$:

$$u'_r \cos^2\theta - \frac{1}{r} u'_\theta \operatorname{sen}\theta \cos\theta = v'_r \operatorname{sen}\theta \cos\theta + \frac{1}{r} v'_\theta \cos^2\theta$$

$$u'_r \operatorname{sen}^2\theta + \frac{1}{r} u'_\theta \operatorname{sen}\theta \cos\theta = -v'_r \operatorname{sen}\theta \cos\theta + \frac{1}{r} v'_\theta \operatorname{sen}^2\theta .$$

Si sumamos estas dos expresiones nos queda:

$$u'_r (\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) = \frac{1}{r} \cdot v'_\theta (\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) \Rightarrow u'_r = \frac{1}{r} v'_\theta$$

Si multiplicamos (I) por $-\operatorname{sen}\theta$ y (II) por $\cos\theta$:

$$-u'_r \operatorname{sen}\theta \cos\theta + \frac{1}{r} u'_\theta \operatorname{sen}^2\theta = -v'_r \operatorname{sen}^2\theta - \frac{1}{r} v'_\theta \operatorname{sen}\theta \cos\theta$$

$$u'_r \operatorname{sen}\theta \cos\theta + \frac{1}{r} u'_\theta \cos^2\theta = -v'_r \cos^2\theta + \frac{1}{r} v'_\theta \operatorname{sen}\theta \cos\theta$$

Si sumamos estas dos expresiones nos queda:

$$\frac{1}{r} u'_\theta (\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta) = -v'_r (\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta) \Rightarrow \frac{1}{r} u'_\theta = -v'_r$$

Las condiciones de Cauchy-Riemann en forma polar serían:

$$u'_r = \frac{1}{r} v'_\theta$$

$$v'_r = -\frac{1}{r} u'_\theta$$

d) Usar la expresión

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$ y las ecuaciones de Cauchy-Riemann en forma polar para demostrar que si la derivada de $f(r,\theta)$ existe, la podemos determinar por medio de la expresión:

$$f'(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial r} \right) (\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta)$$ o bien por medio de:

$$f'(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \left(-\frac{i}{r} \right) (\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta)$$

Tenemos que:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$. Teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cos\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \operatorname{sen}\theta$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r} \cdot \cos\theta - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} \operatorname{sen}\theta$$ queda que:

$$f'(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial r} \cdot \cos\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \operatorname{sen}\theta \right) + i \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial r} \cos\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \operatorname{sen}\theta \right)$$

$$f'(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial r} \right) \cos\theta - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial r} \right) \cdot \operatorname{sen}\theta$$

Por tanto:

$$f'(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial r}\right) \cdot \left(\cos\theta - \frac{1}{r}\,\text{sen}\,\theta\right) \quad (*)$$

Teniendo en cuenta que:

$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$ y que $\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$, sustituyendo en $(*)$:

$$f'(z) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{i}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\left(\cos\theta - \frac{1}{r}\,\text{sen}\,\theta\right)$$

$$f'(z) = \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - i\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) \cdot \frac{1}{r} \cdot \left(\cos\theta - \frac{1}{r}\,\text{sen}\,\theta\right)$$

13) Obtener la derivada de la función

$f(r,\theta) = \frac{1}{re^{i\theta}}$ con $r \neq 0$. Podemos poner:

$f(r,\theta) = \frac{1}{r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)} \Rightarrow f(z) = \frac{1}{z}$ $\quad z = x+iy$

$x = r\cos\theta$ $\quad y = r\,\text{sen}\,\theta$. Luego la derivada de la función es:

$$f'(z) = \frac{-1}{z^2}$$

14) Demostrar que las siguientes funciones son armónicas y hallar una armónica conjugada.

a) $u(x,y) = y^3 - 3x^2 y$

Para que $u(x,y)$ sea armónica debe cumplir la identidad de Lagrange:

$$\Delta^2 = u''_{xx} + u''_{yy} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} u'_x = -6xy \Rightarrow u''_{xx} = -6y \\ u'_y = 3y^2 - 3x^2 ; u''_{yy} = 6y \end{array}\right\} \Rightarrow u''_{xx} + u''_{yy} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ u es armónica.

Si $v(x,y)$ es la armónica conjugada de $u(x,y)$ entonces la función $f(x,y) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$ es armónica. Por tanto:

$$v'_y = u'_x \Rightarrow v = \int u'_x \, dy + \underbrace{\varphi(x)}_{\text{constante frente a } y}$$

$$v'_x = -u'_y$$

$$v = \int -6xy \, dy + \varphi(x) \Rightarrow v = -6x \int y \, dy + \varphi(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \frac{-6xy^2}{2} + \varphi(x) \Rightarrow v = -3xy^2 + \varphi(x)$$

Como $v'_x = -u'_y$

$$\varphi'(x) - 3y^2 = -3y^2 + 3x^2 \Rightarrow \varphi'(x) = 3x^2 \Rightarrow \varphi(x) = \int 3x^2 dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = x^3 + c.$$

Luego la armonica conjugada de $u(x,y)$ es:

$$v(x,y) = -3xy^2 + x^3 + c.$$

b) $u(x,y) = 2x(1-y)$

$$\left.\begin{array}{l} u'_x = 2(1-y) \Rightarrow u''_x = 0 \\ u'_y = -2x \Rightarrow u''_y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta^2 = u''_x + u''_y = 0 \Rightarrow u \text{ es}$$

armónica.

Si $v(x,y)$ es la armónica conjugada de $u(x,y)$ entonces $f(x,y) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$ es holomorfa y por tanto:

$$u'_x = v'_y \Rightarrow v = \int u'_x dy + \varphi(x) \Rightarrow v = \int 2(1-y) dy + \varphi(x)$$

$$v'_x = -u'_y$$

Luego $v = 2y - y^2 + \varphi(x)$. Entonces $v'_x = \varphi'(x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \varphi'(x) = -2x \Rightarrow \varphi(x) = \int 2x dx \Rightarrow \varphi(x) = x^2 + c.$$

Luego la armonica conjugada vale $v(x,y) = 2y - y^2 + x^2 + c$

c) $u(x,y) = \operatorname{Senh} x \cdot \operatorname{Cosh} y$

$u'_x = \operatorname{Cosh} x \cdot \operatorname{Cosh} y \Rightarrow u''_{xx} = \operatorname{Senh} x \cdot \operatorname{Cosh} y$

$u'_y = \operatorname{Senh} x \cdot \operatorname{Senh} y \Rightarrow u''_{yy} = \operatorname{Senh} x \cdot \operatorname{Cosh} y$

$u''_{xx} + u''_{yy} = 2 \operatorname{Senh} x \cdot \operatorname{Cosh} y \neq 0 \Rightarrow$ la funcion no es armónica.

d) $u(x,y) = 2x - x^3 + 3xy^2$

$u'_x = 2 - 3x^2 + 3y^2 \Rightarrow u''_{xx} = -6x$

$u'_y = 6xy \Rightarrow u''_{yy} = 6x$

$\Delta^2 = u''_{xx} + u''_{yy} = 0 \Rightarrow u$ es armónica.

Sea $v(x,y)$ la armónica conjugada de $u(x,y)$. Como $f(x,y) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$ es holomorfa, entonces:

$u'_x = v'_y \Rightarrow v = \int u'_x \, dy + \varphi(x) \Rightarrow v = \int 2 - 3x^2 + 3y^2 \, dy + \varphi(x)$

$v'_x = -u'_y$

Luego $v = 2y - 3x^2 y + y^3 + \varphi(x)$. Como $v'_x = -u'_y \Rightarrow$

$\Rightarrow -6xy + \varphi'(x) = -6xy \Rightarrow \varphi'(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = C$

La armónica conjugada de $u(x,y)$ es:

$v(x,y) = 2y - 3x^2 y + y^3 + C$, $C \in \mathbb{R}$ constante

15) Sea $f(z) = u(r,\theta) + i\cdot v(r,\theta)$ una función holomorfa en un conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ que no incluye el origen. Mediante las ecuaciones de Cauchy-Riemann en polares y supuestas continuas las derivadas parciales, demostrar que la función $u(r,\theta)$ satisface en Ω la ecuación diferencial:

$$r^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial r^2} u(r,\theta) + r \cdot \frac{\partial}{\partial r} u(r,\theta) + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} u(r,\theta) = 0.$$

Las condiciones de Cauchy-Riemann en polares son:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

Si derivamos respecto a r la primera condición:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta}$$

Entonces se cumple:

$$(*)\ r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} u(r,\theta) + r \cdot \frac{\partial}{\partial r} u(r,\theta) + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} u(r,\theta) =$$

$$= r^2 \left(-\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} \right) + r \cdot \frac{\partial}{\partial r} u(r,\theta) + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} u(r,\theta)$$

$$= -\frac{\partial v}{\partial \theta} + r \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} + r \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} u(r,\theta)$$

como $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \Rightarrow r \cdot \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial \theta}$ y sustituyendo en la anterior ecuación nos queda:

$$-\cancel{\frac{\partial v}{\partial \theta}} + r \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} + \cancel{\frac{\partial v}{\partial \theta}} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = (*)$$

teniendo en cuenta que se verifica el teorema de Schwarz de la igualdad de las derivadas cruzadas, ya que nos dicen que son continuas estas derivadas primeras:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta}\right) = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(-\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta}\right)$$

$$= -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \Rightarrow r \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} = r \cdot \left(-\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

Sustituyendo en $(*)$ nos queda:

$$r^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

Si se sustituye en la expresión de la ecuación de Laplace $r^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$, u por v sigue siendo valiendo la expresion, es decir que:

$$r^2 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + r \cdot \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = 0.$$

16) Demostrar que la función $u(r,\theta) = r^2 \cos 2\theta$ es una función armónica. Determinar una armónica conjugada.

Se supone que hemos hecho un cambio a coordenadas polares:

$$x = r\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$y = r\,\text{sen}\,\theta \Rightarrow \text{sen}\,\theta = \frac{y}{r}$$

Como $\cos 2\theta = \cos(\theta+\theta) = \cos\theta \cdot \cos\theta - \text{sen}\,\theta \cdot \text{sen}\,\theta \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta \Rightarrow \cos 2\theta = (\cos\theta + \text{sen}\,\theta)(\cos\theta - \text{sen}\,\theta)$

$$\Rightarrow \cos 2\theta = \left(\frac{x}{r} + \frac{y}{r}\right)\left(\frac{x}{r} - \frac{y}{r}\right) = \frac{x^2-y^2}{r^2}$$

Luego $u(x,y) = r^2 \cdot \dfrac{x^2-y^2}{r^2} \Rightarrow \boxed{u(x,y) = x^2-y^2}$

Veamos que u es armónica:

$$\left.\begin{array}{l} u'_x = 2x \Rightarrow u''_{xx} = 2 \\ u'_y = -2y \Rightarrow u''_{yy} = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta^2 = u''_{xx} + u''_{yy} = 2-2 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow u$ es armónica.

Si $v(x,y)$ es la armónica conjugada de $u(x,y)$, al ser holomorfa la función:

$f(x,y) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$ entonces, según las ecuaciones de Cauchy-Riemann, se verifica

$u'_x = v'_y \Rightarrow v = \int u'_x \, dy + \varphi(x)$

$-u'_y = v'_x$

$v = \int 2x \, dy + \varphi(x) \Rightarrow v = 2xy + \varphi(x)$

$v'_x = 2y + \varphi'(x) = +2y \Rightarrow \varphi'(x) = 0 \quad \Rightarrow \varphi(x) = C$ (Const.)

Entonces la armónica conjugada de $u(x,y)$ es:

$v = 2xy + C$

OTRA FORMA DE HACER EL EJERCICIO 16

17) Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $e^z = -1 \Rightarrow \ln e^z = \ln(-1) \Rightarrow z = \ln(-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow z = \ln|-1| + i\cdot \arg(-1) \Rightarrow z = i\cdot(\pi + 2k\pi) \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{z = i(2k+1)\cdot\pi} \quad k \in \mathbb{Z}$.

b) $e^{2z-1} = 1 \Rightarrow \ln e^{2z-1} = \ln 1 \Rightarrow (2z-1) = \ln 1$

$\Rightarrow 2z-1 = \ln|1| + i \arg(1) \Rightarrow 2z-1 = i\, 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \boxed{z = \frac{1}{2} + k\pi i} \quad k \in \mathbb{Z}$

c) $e^z = 1+\sqrt{3}i \Rightarrow \ln e^z = \ln(1+\sqrt{3}i) \Rightarrow z = \ln(1+\sqrt{3}i)$

$|1+\sqrt{3}i| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

$\arg(1+\sqrt{3}i) = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{3}}{1} = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{3} = 60° = \frac{\pi}{3}$

Luego:

$z = \ln 2 + i\cdot\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) \Rightarrow z = \ln 2 + \frac{(\pi + 6k\pi)}{3} i$

$\Rightarrow \boxed{z = \ln 2 + \frac{(1+6k)}{3}\pi i \quad k \in \mathbb{Z}}$

18) Calcular:

a) $\ln e$ y $Ln\, e$

No sé que entiende tu profesor por $\ln e$ y por $Ln\, e$, para mi son la misma cosa. Tal vez cuando pone $Ln\, e$ se refiera al logaritmo principal de e, con la notación $\ln e$ intuyo que se refiere al logaritmo complejo.

$$\ln e = \ln|e| + i\arg(e) \Rightarrow \ln e = 1 + i(2k\pi) \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ln e = 1 + 2k\pi i \quad k \in \mathbb{Z}}$$

El logaritmo principal es para $k=0$ por tanto:

$$\boxed{Ln\, e = 1 + 0i}$$

b) $\ln(ei) = \ln|ei| + i\arg(ei) = \ln|e| + i\cdot\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$

$$\Rightarrow \ln(ei) = 1 + \frac{(1+2k)\pi}{2} i \quad k \in \mathbb{Z}$$

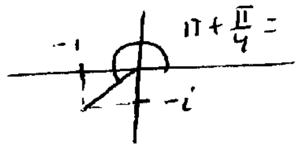
El logaritmo principal es:

$$Ln(ei) = 1 + \frac{\pi}{2} i$$

c) $\ln(-1-i) = \ln|-1-i| + i \arg(-1-i)$

$|-1-i| = \sqrt{2}$

$\pi + \frac{\pi}{4} = 180 + 45° = \frac{5\pi}{4}$



$\arg(-1-i) = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi = \frac{(5+8k)\pi}{4}$

Luego:

$\ln(-1-i) = \ln\sqrt{2} + i \cdot \frac{(5+8k)\pi}{4}$

El logaritmo principal se da en $k=0$

$\mathrm{Ln}(-1-i) = \ln\sqrt{2} + \frac{5\pi}{4} i$

d) $\ln(-10) = \ln|-10| + i \arg(-10)$

$\ln(-10) = \ln 10 + i \cdot (\pi + 2k\pi) i$

$\ln(-10) = \ln 10 + (1+2k)\pi i$

El logaritmo principal es para $k=0$:

$\mathrm{Ln}(-10) = \ln 10 + \pi i$

e) $\ln(e^{1+3\pi i}) = (1+3\pi i) \cdot \ln(e)$ y como hemos calculado anteriormente $\ln e = 1 + 2k\pi i$, se tiene que:

$\ln(e^{1+3\pi i}) = (1+3\pi i)(1+2k\pi i)$

$\ln(e^{1+3\pi i}) = (1-6k\pi^2) + (2k\pi + 3\pi) i$

$\ln(e^{1+3\pi i}) = (1-6k\pi^2) + (3+2k)\pi i$

El logaritmo principal vale $(k=0)$

$Ln(e^{1+3\pi i}) = 1 + 3\pi i$

19) Determinar

(a) arc cos 2

Sea $z = \arccos 2 \Rightarrow \cos z = 2 \Rightarrow \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow e^{iz} + e^{-iz} = 4 \Rightarrow (e^{iz})^2 + 1 = 4e^{iz} \Rightarrow (e^{iz})^2 - 4e^{iz} + 1 = 0$

$\Rightarrow e^{iz} = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = \dfrac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$

- Si $e^{iz} = 2+\sqrt{3} \Rightarrow iz = \ln(2+\sqrt{3}) = \ln|2+\sqrt{3}| + i\arg(2+\sqrt{3})$

$iz = \ln|2+\sqrt{3}| + 2k\pi i \quad k \in \mathbb{Z}$

$z = 2k\pi - i\ln|2+\sqrt{3}|$

• si $e^{iz} = 2-\sqrt{3} \Rightarrow iz = \ln(2-\sqrt{3}) \Rightarrow iz = \ln|2-\sqrt{3}| + i\arg(2-\sqrt{3})$

$\Rightarrow iz = \ln|2-\sqrt{3}| + 2k\pi i \Rightarrow z = 2k\pi - i\ln|2-\sqrt{3}|$

b) $\arg \operatorname{senh}(i\sqrt{3}) = z \Rightarrow i\sqrt{3} = \operatorname{senh}(z) \Rightarrow$

$$\Rightarrow i\sqrt{3} = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \Rightarrow e^z - e^{-z} = 2\sqrt{3}i$$

$$(e^z)^2 - 1 = 2\sqrt{3}ie^z \Rightarrow (e^z)^2 - 2\sqrt{3}ie^z - 1 = 0$$

$$e^z = \frac{2\sqrt{3}i \pm \sqrt{-12+4}}{2} = \frac{2\sqrt{3}i \pm 2\sqrt{2}i}{2} = (\sqrt{3} \pm \sqrt{2})i$$

• si $e^z = (\sqrt{3}+\sqrt{2})i \Rightarrow z = \ln[(\sqrt{3}+\sqrt{2})i] \Rightarrow$

$\Rightarrow z = \ln|\sqrt{2}+\sqrt{3}| + i\arg[(\sqrt{3}+\sqrt{2})i] \Rightarrow$

$\Rightarrow z = \ln(\sqrt{2}+\sqrt{3}) + i\cdot\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \Rightarrow z = \ln(\sqrt{2}+\sqrt{3}) + \frac{(1+4k)}{2}\pi i$

• si $e^z = (\sqrt{3}-\sqrt{2})i \Rightarrow \ln e^z = \ln[(\sqrt{3}-\sqrt{2})i] \Rightarrow$

$\Rightarrow z = \ln|\sqrt{3}-\sqrt{2}| + i\cdot\arg[(\sqrt{3}-\sqrt{2})i] \Rightarrow$

$\Rightarrow z = \ln|\sqrt{3}-\sqrt{2}| + i\cdot\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow z = \ln(\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \frac{1+4k}{2}\cdot\pi i$

c) arg Cosh i (creo que quiere decir esto)

Sea $z = \arg \cosh i \iff \cosh z = i \iff \dfrac{e^z + e^{-z}}{2} = i \Rightarrow$

$\Rightarrow e^z + e^{-z} = 2i \Rightarrow (e^z)^2 + 1 = 2ie^z \Rightarrow$

$\Rightarrow (e^z)^2 - 2ie^z + 1 = 0$

$$e^z = \frac{2i \pm \sqrt{-4-4}}{2} = \frac{2i \pm 2\sqrt{2}i}{2} = \begin{cases} i + \sqrt{2}i \\ i - \sqrt{2}i \end{cases}$$

• Si $e^z = i + \sqrt{2}i \Rightarrow z = \ln(i + \sqrt{2}i)$

$$|i + \sqrt{2}i| = |i + \sqrt{2}i| = 1 + \sqrt{2}$$

$$\arg(i + \sqrt{2}i) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{\pi + 4k\pi}{2} = \frac{1 + 4k}{2} \cdot \pi$$

Entonces:

$$z = \ln(1 + \sqrt{2}i) = \ln(1 + \sqrt{2}) + i \cdot \left(\frac{1 + 4k}{2} \cdot \pi\right)$$

• Si $e^z = i - \sqrt{2}i \Rightarrow z = \ln(i - \sqrt{2}i)$. Se tiene que:

$$|i - \sqrt{2}i| = |1 - \sqrt{2}|$$

$\arg(i-\sqrt{2}i) = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi = \frac{3+4k}{2}\pi$ (hay que tener en cuenta que $1-\sqrt{2}$ es negativo)

Luego:

$$z = \ln(i-\sqrt{2}i) = \ln|1-\sqrt{2}| + \frac{3+4k}{2}\pi i$$

d) $\arccos i$

Sea $z = \arccos i \iff \cos z = i \Rightarrow \frac{e^{zi}+e^{-zi}}{2} = i \iff$

$\iff e^{zi}+e^{-zi} = 2i \iff (e^{zi})^2 + 1 = 2i\,e^{zi} \iff$

$\iff (e^{zi})^2 - 2i\,e^{zi} + 1 = 0$

$$e^{zi} = \frac{2i \pm \sqrt{-4-4}}{2} = \frac{2i \pm 2\sqrt{2}i}{2} \begin{cases} i+\sqrt{2}i \\ i-\sqrt{2}i \end{cases}$$

• Si $e^{zi} = i(1+\sqrt{2}) \Rightarrow zi = \ln[(1+\sqrt{2})i] \Rightarrow$

$\Rightarrow zi = \ln(1+\sqrt{2}) + i\cdot\frac{1+4k}{2}\pi \Rightarrow -z = -\frac{1+4k}{2}\pi + i\ln(1+\sqrt{2})$

$\Rightarrow z = \frac{1+4k}{2}\pi - i\ln(1+\sqrt{2})$

• Si $e^{zi} = (1-\sqrt{2})i \Rightarrow zi = \ln[(1-\sqrt{2})i] \Rightarrow$

$\Rightarrow zi = \ln|1-\sqrt{2}| + i\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow zi = \ln|1-\sqrt{2}| + \frac{3+4k}{2}\pi i \Rightarrow z = \frac{3+4k}{2}\pi - i\ln|1-\sqrt{2}|$