Vectores - 1º Bachiller: Ciencias

Miguel Galo Fernández

6 de febrero de 2019

Índice de Contenidos

1. Definición de vector fijo

Un vector fijo se define a partir de dos puntos dados en un cierto orden. Sean $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$ dos puntos del plano. Cuando nos referimos al vector $\overrightarrow{AB}$ estamos indicando tres conceptos:

1. Módulo del vector, que se representa por $|\overrightarrow{AB}|$ y que indica la longitud del segmento de origen A y extremo B.

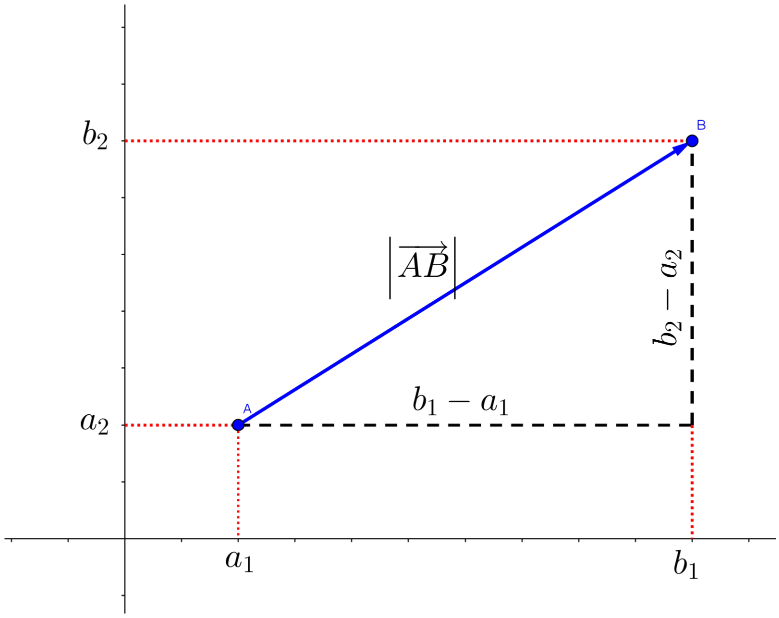


Figura 1: Módulo de un vector

   Si nos fijamos en esta figura y aplicamos el Teorema de Pitágoras se obtiene el valor del módulo del vector $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$

2. Dirección del vector, que es la recta que pasa por los puntos A y B.

3. Sentido del vector, que es orden en el que se recorre la recta que pasa por A y B. En este caso va de A hasta B, tal y como indica la flecha el sentido va de A hacia B.

2. Coordenadas de un vector fijo

Sean $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$ dos puntos del plano, consideremos el vector $\overrightarrow{AB}$. Las coordenadas de este vector se obtienen restando a las coordenadas del extremo las cooordenadas del origen, es decir $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$. Por ejemplo si $A(2, 3)$ y $B(4, 1)$, entonces $\overrightarrow{AB} = (4-2, 1-3) =$ $= (2, -2)$ y también podemos poner que $\overrightarrow{BA} = (2 - 4, 3 - 1) = (-2, 2)$

3. Vectores equipolentes

Dos vectores son equipolentes si tienen el mismo módulo, la dirección paralela y el mismo sentido. Los vectores equipolentes se caracterizan por tener las mismas coordenadas. Por ejemplo si $A(2, 1)$, $B(5, 3)$, $C(7, 2)$ y $D(10, 4)$, entonces los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son equipolentes ya que sus coordenadas son $\overrightarrow{AB} = (5 - 2, 3 - 1) = (3, 2)$, $\overrightarrow{CD}(10 - 7, 4 - 2) = (3, 2)$

4. Vector libre del plano

Llamamos vector libre del plano al conjunto infinito formado por un vector fijo y todos sus equipolentes. El representante canónico, que es el que más se utiliza, de un vector libre es el que tiene su origen en el origen de coordenadas. Por ejemplo, vectores equipolentes a $\overrightarrow{A,B}$, siendo $A(2,1)$ y $B(5,3)$ hay infinitos, todos tienen en común que sus coordenadas son $(3,2)$. El representante canónico de este vector libre es $\overrightarrow{OP}$, siendo las coordenadas de los punto $O(0,0)$ y $P(3,2)$.

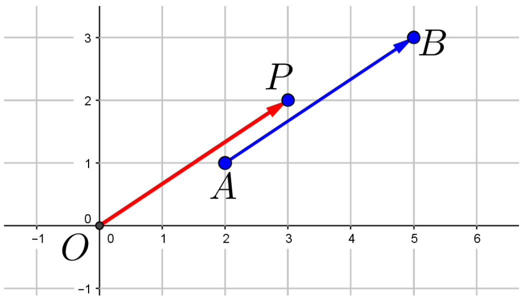


Figura 2: Representante canónico

5. Suma y resta de vectores

A partir de ahora, como vamos a utilizar vectores equipolentes, no haremos mención al origen y al extremo del vector, lo identificaremos por sus coordenadas y el representante del referido vector será el canónico. Sean $\vec{u} = (a,b)$, $\vec{v} = (c,d)$ dos vectores. La suma de estos vectores se puede hacer de forma analítica o de forma gráfica.

- De forma analítica $\vec{u} + \vec{v} = (a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$, es decir las coordenadas del vector suma se obtienen sumando las coordenadas de cada vector. Restar dos vectores es lo mismo que sumar a uno de ellos el opuesto del otro, $\vec{u} - \vec{v} = (a,b) - (c,d) = (a-c, b-d)$, es decir las coordenadas del vector resta se obtienen restando las coordenadas de cada vector.

- De forma gráfica, se eligen los representantes de cada vector libre que tengan un mismo origen en el punto A (da igual que punto sea A). Se forma el paralelogramo haciendo que el vector $\vec{u}$ tenga origen en el extremo de $\vec{v}$, y viceversa eligiendo el representante canónico de $\vec{v}$ que tenga su origen en el extremo de $\vec{u}$, tal y como se indica en la siguiente figura:

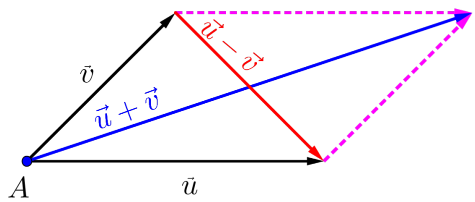


Figura 3: Suma/resta de vectores

La diagonal principal del paralelogramo representa la suma de vectores, mientras que la diagonal secundaria representa la diferencia.

6. Producto de un número real por un vector

Sea el vector $\vec{u} = (a, b)$ y sea $k \in \mathbb{R}$ un número real cualquiera. Se define el producto del número real por el vector como $k \cdot \vec{u} = (ka, kb)$. Geométricamente el vector $\vec{w} = k \cdot \vec{u}$ tendría por módulo $|\vec{w}| = |k| \cdot |\vec{u}|$, teniendo el vector $\vec{w}$ la misma dirección y sentido que $\vec{u}$.

7. Ejercicios como ejemplo de lo que se ha visto

1. Calcula el módulo de los siguientes vectores: a) $\vec{u} = (-3, 4)$, b) $\vec{v} = (-13, 0)$, c) $\vec{w} = (6, ,8)$

   Solución:

   a) $|\vec{u}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

   b) $|\vec{v}| = \sqrt{(-13)^2 + o^2} = \sqrt{169} = 13$

   c) $|\vec{w}| = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{100} = 10$

2. Hallar el valor de x para que el módulo del vector $\vec{u} = (3, x)$ sea igual a 4.

   Solución:

   $|\vec{u}| = \sqrt{(3)^2 + x^2} = 4 \Rightarrow \left(\sqrt{(3)^2 + x^2}\right)^2 = 4^2 \Rightarrow 9 + x^2 = 16 \Rightarrow x^2 = 7 \Rightarrow x = \pm\sqrt{7}$

3. Halla el valor de x para que el módulo del vector $\vec{u} = (2x, 5)$ sea 6.

   Solución:

   $|\vec{u}| = \sqrt{(2x)^2 + 5^2} = 6 \Rightarrow \left(\sqrt{(2x)^2 + 5^2}\right)^2 = 6^2 \Rightarrow 4x^2{+}25 = 36 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{11}{4}} = \frac{\pm\sqrt{11}}{2}$

4. Dados los vectores $\vec{u} = (-3, 6)$, $\vec{v} = (1, 4)$, $y\ \vec{w} = (2, -5)$, hallar:

   a)$\vec{u} + \vec{v} - \vec{w} = (-3, 6) + (1, 4) - (2, -5) = (-4, 15)$

   b)$2\vec{u} - 3\vec{v} + 4\vec{w} = 2(-3, 6) - 3(1, 4) + 4(2, -5) = (-6 - 3 + 8, \cancel{12} - \cancel{12} - 20) = (-1, -20)$

   c) $(2\vec{u} + 5\vec{v}) \cdot \vec{w} = [2(-3, 6) + 5(1, 4)] \cdot (2, -5) = (-1, 32) \cdot (2, -5) = -2 - 160 = -162$

8. Combinación lineal de vectores

Una combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es una expresión en la forma $\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$ donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Por ejemplo una combinación lineal de los vectores $\vec{u} = (2, 1)$ y $\vec{v} = (1, 3)$ podría ser $-5 \cdot \vec{u} + 7 \cdot \vec{v} = -5(2, 1) + 7(1, 3) = (-3, 16)$.
¿Se puede expresar el vector $\vec{w} = (-7, -25)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u} = (5, 2)$ y $\vec{v} = (4, 9)$. Veamos, si esto fuera posible entonces $\vec{w} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} \Rightarrow (-7, -25) =$
$= \alpha \cdot (5, 2) + \beta \cdot (4, 9) \Rightarrow (-7, -25) = (5\alpha + 4\beta, 2\alpha + 9\beta$. De aquí se genera el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcrcr} 5\alpha & + & 4\beta & = & \text{-7} \\ 2\alpha & + & 9\beta & = & \text{-25} \end{array}\right\}$$

Si multiplicamos la primera ecuación por 2 y la segunda por -5 obtenemos:

$$\left.\begin{array}{rcrcr} \cancel{10\alpha} & + & 8\beta & = & \text{-14} \\ -\cancel{10\alpha} & \text{-} & 45\beta & = & 125 \\ \hline & & -37\beta & = & 111 \end{array}\right\} \Rightarrow \beta = \frac{111}{-37} = -3 \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow \boxed{\vec{w} = \vec{u} - 3\vec{v}}$$

9. Vectores linealmente independientes o libres

Un conjunto de vectores del plano $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ se dice que es linealmente independiente o ligado si uno de los vectores se puede poner en combinación lineal del resto, es decir existe un subindice j de entre los subíndices $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$ tal que $u_j = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_{j-1} u_{j-1} +$ $+ \alpha_{j+1} u_{j+1} + \cdots \alpha_n u_n$. Si esto no es posible se dice que el conjunto de vectores es libre o linealmente independientes. Si el conjunto de vectores $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ es linealmente independiente entonces ninguno de los vectores se puede expresar como combinación lineal del resto. Por ejemplo el conjunto de vectores $\{u_1 = (1, -1),\ u_2 = (-1, -1),\ u_3 = (2, 6),\ u_4 = (1, 4)\}$ es linealmente dependiente ya que uno de los vectores del conjunto se puede expresar como combinación lineal del resto, a saber, $u_3 = -2u_1 - 4u_2 + 0u_4$

Por ejemplo los vectores $\vec{u} = (3, 1)$, $\vec{v} = (2, 0)$, $\vec{w} = (-1, 1)$ son linealmente dependientes ya que $2\vec{v} + \vec{w} = (4, 0) + (-1, 1) = (3, 1) = \vec{u}$. Es lo mismo decir que los vectores $\vec{u} = (a, b)$ y $\vec{v} = (c, d)$ son linealmente dependientes que decir que se verifica $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$

En el plano tres o más vectores son linealmente independientes. Dos vectores son linealmente dependientes si son proporcionales (uno de ellos es el otro multiplicado por un número). Por ejemplo:

- $\vec{u} = (1, 2)$, $\vec{v} = (-2, -4)$ son linealmente dependientes ya que $\vec{v} = -2\vec{u}$

- $\vec{u} = (3,6),\ \vec{v} = (-2,5)$ son linealmente independientes ya que no son proporcionales.
- $\vec{u} = (5,4),\ \vec{v} = (3,7)$ son linealmente independientes ya que no son proporcionales.
- $\vec{u} = (1,-6),\ \vec{v} = (-3,18)$ son linealmente dependientes ya que $\vec{v} = -3\vec{u}$

10. Bases del plano vectorial

Representaremos por $\mathcal{V}^2$ al conjunto de todos los vectores del plano (los que tienen dos coordenadas). Una base del plano está formada por dos vectores linealmente independientes. Sea la base del plano $\mathcal{B} = \{\vec{u_1},\ \vec{u_2}\}$. Decimos que el vector $\vec{v}$ tiene coordenadas (α, β) en esta base si $\vec{v} = \alpha\vec{u_1} + \beta\vec{u_2}$ En el plano la base más sencilla es la base canónica, que es $\mathcal{B} = \{\vec{i} = (1,0),\ \vec{j} = (0,1)\}$. Que las coordenadas del vector $\vec{u}$ son $(3,5)$ en esta base quiere decir que $\vec{u} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$

10.1. Ejercicios para aplicar la teoría

1. El vector $\vec{u}$ tiene coordenadas $(3,2)$ respecto a la base $\mathcal{B} = \{\vec{v} = (1,2),\ \vec{w} = (-3,5)\}$. Hallar las coordenadas de $\vec{u}$ en la base canónica.

   Solución:

   El vector $\vec{u}$ se puede expresar como $\vec{u} = 3\vec{v} + 2\vec{w} = 3(1,2) + 2(-3,5) = (-3,16)$. La coordenadas de $\vec{u}$ en la base canónica son $(-3,16)$ ya que $\vec{u} = -3(1,0) + 16(0,1) =$
   $= -3\vec{i} + 16\vec{j}$

2. Si el vector $\vec{u}$ tiene coordenadas $(7,-12)$ respecto a la base canónica, hallar sus coordenadas respecto a la base $\mathcal{B} = \{\vec{u} = (3,0),\ \vec{w} = (-1,6)\}$

   Solución:

   Si $\vec{u} = (x,y)$ respecto a la base $\mathcal{B}$, entonces se puede expresar como $\vec{u} = x\vec{v} + y\vec{w} \Rightarrow$ $(7,-12) = x(3,0) + y(-1,6)$. De aquí se genera el sistema:

   $$\left.\begin{array}{cccc} 3x & - & y & = & 7 \\ & & 6y & = & -12 \end{array}\right\} \Rightarrow y = -2,\ x = 3$$

   Las coordenadas de $\vec{u}$ respecto a la base $\mathcal{B}$ son $\vec{u} = (3,-2)$

3. Si $\vec{u} = (-3,4)$ en la base $\mathcal{B} = \{(2,-4),\ (1,3)\}$, halla las coordenadas de $\vec{u}$ en la base $\mathcal{B}' = \{(5,-1),\ (0,2)\}$

   Solución:

   Pasaremos de la base $\mathcal{B}$ a la base canónica y a continuación pasaremos de la base canónica a la base $\mathcal{B}'$. Se tiene que $\vec{u} = -3(2,-4) + 4(1,3) = (-2,24)$. Las coordenadas de $\vec{u}$ en la base canónica so $(-2,24)$. Sean (x,y) sus coordenadas en la base $\mathcal{B}'$. entonces

$(-2,24)=x(5,-1)+y(0,2)$. De aquí se obtiene el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{ccccc} 5x & - & y & = & -2 \\ & & 2y & = & 24 \end{array}\right\} \Rightarrow y=2,\ x=0$$

luego $\vec{u}=(0,2)$ en la base $\mathcal{B}'$

4. Página 149 nº 38. Decide si las parejas de vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes o linealmente dependientes. ¿En qué casos los dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman una base de $\mathcal{V}^2$?

   a) $\vec{u}=(-4,2)$ y $\vec{v}=\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$. Se verifica que $\frac{-4}{\frac{2}{3}}=\frac{2}{-\frac{1}{3}}=-6$, los vectores son linealmente dependientes, no forman base

   b) $\vec{u}=(16,32)$ y $\vec{v}=\left(-\frac{1}{4},-\frac{1}{2}\right)$. Se verifica que $\frac{16}{-\frac{1}{4}}=\frac{32}{-\frac{1}{2}}=-64$, los vectores son linealmente dependientes, no forman base

   c) $\vec{u}=(2,-16)$ y $\vec{v}=(-1,-8)$. Se verifica que $\frac{2}{-1}\neq\frac{-16}{-8}$, los vectores son linealmente independientes y forman una base del plano.

5. nº 39 Expresa, en cada caso, el vector $\vec{a}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

   a) $\vec{a}=(-12,-2)$, $\vec{u}=(4,-3)$ y $\vec{v}=(-1,-2)$

   Solución:

   $$\vec{a}=x\vec{u}+y\vec{v}\Rightarrow\left\{\begin{array}{ccccc} 4x & - & y & = & -12 \\ -3x & - & 2y & = & -2 \end{array}\right. \Rightarrow x=-2,\ y=4. \text{ Luego } \vec{a}=-2\vec{u}+4\vec{v}$$

   b) $\vec{a}=-\frac{1}{2},-5)$, $\vec{u}=(\frac{1}{2},-3)$, $\vec{v}=(1,-2)$

   Solución:

   $$\vec{a}=x\vec{u}+y\vec{v}\Rightarrow\left\{\begin{array}{ccccc} \frac{1}{2}x & + & y & = & -\frac{1}{2} \\ -3x & - & 2y & = & -5 \end{array}\right. \Rightarrow -3x-2(-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2})=-5\Rightarrow -3x+$$
   $x+1=-5\Rightarrow -2x=-6\Rightarrow x=3\Rightarrow y=-2$. Luego $\vec{a}=3\vec{u}-2\vec{v}$

   c) $\vec{a}=(\frac{3}{4},-\frac{7}{6})$, $\vec{u}=(\frac{1}{2},-\frac{1}{3})$, $\vec{v}=(\frac{1}{4},-\frac{5}{6})$

   Solución:

   $$\vec{a}=x\vec{u}+y\vec{v}\Rightarrow\left\{\begin{array}{ccccc} \frac{1}{2}x & - & \frac{1}{3}y & = & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{3}x & - & \frac{5}{6}y & = & -\frac{7}{6} \end{array}\right. \Rightarrow x=1,\ y=1. \text{ Luego } \vec{a}=\vec{u}+\vec{v}$$

6. nº42.- Calcula las coordenadas del origen A de un vector cuyo extremo es $B(-2,4)$ y que es equipolente al vector $\overrightarrow{CD}$, siendo $C=(5,-1)$ y $D(-2,-2)$

   Solución:

   Si dos vectores don equipolentes tienen las mismas coordenadas. Por tanto las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ serán las mismas que las del vector $\overrightarrow{CD}=(-7,-1)$. Si las coordenadas del punto A son $A(x,y)$ entonces $\overrightarrow{AB}=(-2-x,4-y)=(-7,-1$, de aquí generamos el sistema:

   $$\left.\begin{array}{r} -4-x=-7 \\ 4-y=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow x=3,\ y=5. \text{ Luego las coordenadas de A son } A(3,5).$$

7. nº 43.- Dados los puntos $A(-1,4),\ B(2,2),\ y\ C(-3,3)$ calcula:

   a) Las coordenadas del punto D, tal que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

   Solución:

   Sean (x,y) las coordenadas del punto D. Como $\overrightarrow{AB}=(3,-2)$ y $\overrightarrow{CD}=(x+3,y-3)$, se cumple que $x+3=3\Rightarrow x=0$ y que $y-3=-2\Rightarrow y=1$, las coordenadas de D son $(0,5)$

   b) Las coordenadas del punto D tal que $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AC}$

   Solución:

   Si $D(x,y)$ entonces $\overrightarrow{DB}=(2-x,2-y)$, como $\overrightarrow{AC}=(-2,1)\Rightarrow -2=2-x=4,\ 1=$
   $=2-y\Rightarrow y=1$. Luego $D(4,1)$

   c) Las coordenadas del punto D tal que $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{CD}$

   Solución:

   Si $D(x,y)$, entonces $\overrightarrow{CD}=(x+3,y-5)$. Como $\overrightarrow{AB}=(3,-2)$, de la ecuación $3(x+2,y-5)=(3,-2)$ se genera el sistema:

   $$\left.\begin{array}{r} 3(x+3)=3 \\ 3(y-5)=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow x=-2,\ y=\frac{13}{3}. \text{ Luego } D\left(-2,\frac{13}{3}\right)$$

   d) Las coordenadas de D tal que $\overrightarrow{DB}=-2\overrightarrow{AC}$

   Solución:

   Si $D(x,y)$, entonces $\overrightarrow{DB}=(2-x,2-y)$, $\overrightarrow{AC}=(-2,1)$. De la ecuación $\overrightarrow{DB}=-2\overrightarrow{AC}$ obtenemos que $(2-x,2-y)=-2(-2,1)\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2-x=-4\Rightarrow x=6 \\ 2-y=-2\Rightarrow y=4 \end{array}\right.$ *Luego* D(6,4)

8. nº 45.- Calcular, si existe, el valor de k para que se verifiquen las siguientes igualdades:

   a) $(2,-3k) = 3(3,-1)+7(-1,-3) \Rightarrow (2,-3+k) = (2,-23) \Rightarrow -3+k = -23 \Rightarrow \boxed{k=-20}$

   b) $(1,-6) = 4(k,2) - 3(1,3-k) \Rightarrow (1,-6) = (4k-3,-1+3k) \Rightarrow k = 1 \ y \ k = \dfrac{-5}{3}$, no es posible la igualdad

   c) $\left(\dfrac{2}{3}+k,\dfrac{k}{2}\right) = 2\left(\dfrac{1}{3},k\right) + k(2,-3) \Rightarrow \left(\dfrac{2}{3}+k,\dfrac{k}{2}\right) = \left(\dfrac{2}{3}+2k,-k\right) \Rightarrow \boxed{\text{k=0}}$

11. Tipos de bases en V^2

11.1. Bases ortogonales

Una base de $\mathcal{V}^2$, $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$ se dice ortogonal si los vectores que la forman son perpendiculares, es decir si $u_1 \perp u_2$.

11.2. Bases ortonormales

Una base de $\mathcal{V}^2$, $\mathcal{B} = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}\}$ se dice ortonormal si es ortogonal y además sus vectores son unitarios (de módulo 1). Si $\mathcal{B} = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}\}$ es una base ortogonal, entonces la base $\mathcal{B}' = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ es una base ortonormal, donde $\vec{v_1} = \dfrac{\vec{u_1}}{|\vec{u_1}|}$, $\vec{v_2} = \dfrac{\vec{u_2}}{|\vec{u_2}|}$. Un ejemplo de base ortonormal es la base canóniva $\mathcal{B} = \{\vec{i} = (1,0),\ \vec{j} = (0,1)\}$

12. Producto escalar de dos vectores

El producto escalar de dos vectores es un número real, se define como el producto de los modulos de cada vector por el coseno del angulo que forman, es decir $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot cos(\alpha)}$ sienso α el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Sean los vectores $\vec{v} = (a,b)$ y $\vec{w} = (c,d)$ cuyas coordenadas vienen dadas en la base $\mathcal{B} = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}\}$. Si α es el ángulo que forman los vectores $\vec{u_1}$ y $\vec{u_2}$, entonces:
$\vec{v}\cdot\vec{w} = (a\vec{u_1} + b\vec{u_2})\cdot(c\vec{u_1} + d\vec{u_2}) = ac\vec{u_1}\vec{u_1} + (bc+ad)\vec{u_1}\vec{u_2} + bd\vec{u_2}\vec{u_2} = ac|\vec{u_1}|^2 +$
$+ (bc+ad)|\vec{u_1}||\vec{u_2}|cos(\alpha) + bd|\vec{u_2}|^2 =$. Si la base fuese ortogonal, al ser $\alpha = 90º \Rightarrow cos(90) = 0$, el producto escalar sería: $\vec{v}\cdot\vec{w} = ac|\vec{u_1}|^2 + bd|\vec{u_2}|^2 =$. Si la base fuera ortonormal, al ser sus vectores unitarios y perpendiculares, $\vec{v}\cdot\vec{w} = ac + bd$

12.1. Propiedades del producto escalar

1. el producto escalar es conmutativo, es decir $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$

2. dos vectores son ortogonales si y solo si su producto escalar es cero

3. si $\vec{u} = (a,b)$, $\vec{v} = (c,d)$ están expresados en una base ortonormal, entonces $\vec{u}\cdot\vec{v} = ac + bd$

12.2. Ángulo de dos vectores

Sean los vectores del plano $\vec{u}$, $\vec{v} \in \mathcal{V}^2$ y sea α el ángulo que forman estos vectores. Su producto escalar vale $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot cos(\alpha)$ y si de aquí despejamos el coseno obtenemos: $cos(\alpha) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = a$. Si $cos(\alpha) = a \Rightarrow \alpha = arcos(a)$.

13. Argumento de un vector

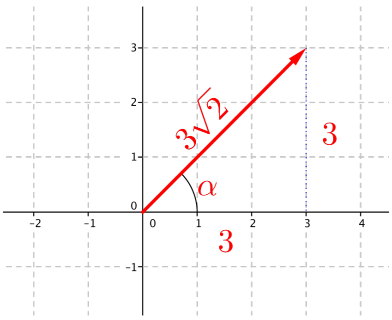
Sea el vector del plano $\vec{u}, \in \mathcal{V}^2$. El argumento de este vector es el ángulo que forma este con el eje positivo X^+ que es tanto como decir que el argumento de un vector es el ángulo que forma este con el vector $\vec{i} = (1,0)$ de la base canónica. Si las coordenadas del vector en la base canónica son $\vec{u} = (a,b)$ entonces sea α el argumento del vector, se verifica $cos(\alpha) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

13.1. Ejercicios para aplicar la teoría

1. nº 47.- Calcula el módulo y el argumento de los siguientes vectores:

   a) $\vec{u} = (3,3)$

   Solución:



   El módulo del vector es $|\vec{u}| = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2}$. Como $tg(\alpha) = \dfrac{3}{3} = 1$ y estamos en el primer cuadrante, el argumento vale $\alpha = 45^o$

   b) $\vec{u} = (12,-5)$