COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT

COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

SISTEMA UNIVERSITARI VALENCIÀ
SISTEMA UNIVERSITARIO VALENCIANO

PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA: JUNY 2019	CONVOCATORIA: JUNIO 2019
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II

BAREM DE L'EXAMEN:
Cal elegir sols UNA de les dues OPCIONS, A o B, i s'han de fer els tres problemes d'aquesta opció.
Cada problema puntua fins a 10 punts.
La qualificació de l'exercici és la suma de les qualificacions de cada problema dividida entre 3, i aproximada a les centèsimes.
Es permet l'ús de calculadores sempre que no siguen gràfiques o programables, i que no puguen realitzar càlcul simbòlic ni emmagatzemar text o fórmules en memòria. S'use o no la calculadora, els resultats analítics, numèrics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.

BAREMO DEL EXAMEN:
Se elegirá solamente UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓ A

Problema A.1. Es donen la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{pmatrix}$, que depèn del paràmetre real a, i una matriu quadrada B d'ordre 3 tal que $B^2 = \frac{1}{3} I - 2B$, sent I la matriu identitat d'ordre 3.

Obtingueu **<u>raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat</u>:**

a) El rang de la matriu A en funció del paràmetre real a i el determinant de la matriu $2A^{-1}$ quan $a = 1$. (2 + 2 *punts*)

b) Totes les solucions del sistema d'equacions $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ quan $a = -1$. (3 *punts*)

c) La comprovació que B és invertible, trobant m i n tals que $B^{-1} = mB + nI$. (3 *punts*)

Problema A.2. Considerem en l'espai les rectes $r: \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases}$ i $s: x = y + 1 = \frac{z-2}{2}$.

Obtingueu **<u>raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat</u>:**

a) L'equació del pla que conté les rectes r i s. (3 *punts*)

b) La recta que passa per $P = (0, -1, 2)$ i talla perpendicularment la recta r. (4 *punts*)

c) El valor que han de tenir els paràmetres reals a i b perquè la recta s estiga continguda en el pla $\pi :\ x - 2y + az = b$. (3 *punts*)

Problema A.3. Es considera la funció $f(x) = xe^{-x^2}$.

Obtingueu **<u>raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat</u>:**

a) Les asímptotes, els intervals de creixement i de decreixement, així com els màxims i mínims relatius de la funció $f(x)$. (3 *punts*)

b) La representació gràfica de la corba $y = f(x)$. (2 *punts*)

c) El valor del paràmetre real a perquè es puga aplicar el teorema de Rolle en l'interval $[0,1]$ a la funció $g(x) = f(x) + ax$. (1 *punt*)

d) El valor de les integrals indefinides $\int f(x)\, dx$, $\int xe^{-x}\, dx$. (4 *punts*)

OPCIÓ B

Problema B.1. Es dona el sistema $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 3x + 4y + 5z = 5 \\ 7x + 9y + 11z = \alpha \end{cases}$, on α és un paràmetre real.

Obtingueu **raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:**

a) Els valors de α per als quals el sistema és compatible i els valors de α per als quals el sistema és incompatible. (4 *punts*)

b) Totes les solucions del sistema quan siga compatible. (4 *punts*)

c) La discussió de la compatibilitat i determinació del nou sistema deduït de l'anterior en canviar el coeficient 11 per qualsevol altre número diferent. (2 *punts*)

Problema B.2. Siga π el pla d'equació $9x + 12y + 20z = 180$.

Obtingueu **raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:**

a) Les equacions dels dos plans paral·lels a π que disten 4 unitats de π. (4 *punts*)

b) Els punts *A*, *B* i *C*, intersecció del pla π amb els eixos OX, OY i OZ i l'angle que formen els vectors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$. (4 *punts*)

c) El volum del tetraedre els vèrtexs del qual són l'origen O de coordenades i els punts *A*, *B* i *C* . (2 *punts*)

Problema B.3. Les coordenades inicials dels mòbils A i B són (0, 0) i (250, 0), respectivament, i 1 km és la distància des de l'origen de coordenades fins a cadascun dels punts (1, 0) i (0, 1).

El mòbil A es desplaça sobre l'eix OY des de la posició inicial fins al punt $\left(0, \frac{375}{2}\right)$ amb una velocitat de 30 km/h i, simultàniament, el mòbil B es desplaça sobre l'eix OX des de la seua posició inicial fins a l'origen de coordenades amb una velocitat de 40 km/h.

Obtingueu **raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:**

a) La distancia $f(t)$ entre els mòbils A i B durant el desplaçament, en funció del temps t en hores des que van començar a desplaçar-se. (2 *punts*)

b) El temps T que tarden els mòbils en desplaçar-se des de la seua posició inicial a la seua posició final, i els intervals de creixement i de decreixement de la funció f al llarg del trajecte. (4 *punts*)

c) Els valors de t per als quals la distància dels mòbils és màxima i mínima durant el desplaçament, i aquestes distàncies màxima i mínima. (4 *punts*)

OPCIÓN A

Problema A.1. Se dan la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{pmatrix}$, que depende del parámetro real a, y una matriz cuadrada B de orden 3 tal que $B^2 = \frac{1}{3}I - 2B$, siendo I la matriz identidad de orden 3.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El rango de la matriz A en función del parámetro a y el determinante de la matriz $2A^{-1}$ cuando $a = 1$. (2+2 *puntos*)

b) Todas las soluciones del sistema de ecuaciones $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ cuando $a = -1$. (3 *puntos*)

c) La comprobación de que B es invertible, encontrando m y n tales que $B^{-1} = mB + nI$. (3 *puntos*)

Problema A.2. Consideramos en el espacio las rectas $r: \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases}$ y $s: x = y + 1 = \frac{z-2}{2}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La ecuación del plano que contiene las rectas r y s. (3 *puntos*)

b) La recta que pasa por $P = (0, -1, 2)$ y corta perpendicularmente a la recta r. (4 *puntos*)

c) El valor que deben tener los parámetros reales a y b para que la recta s esté contenida en el plano $\pi: x - 2y + az = b$. (3 *puntos*)

Problema A.3. Se considera la función $f(x) = xe^{-x^2}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Las asíntotas, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, así como los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$. (3 *puntos*)

b) La representación gráfica de la curva $y = f(x)$. (2 *puntos*)

c) El valor del parámetro a para que se pueda aplicar el teorema de Rolle en el intervalo $[0,1]$ a la función $g(x) = f(x) + ax$. (1 *punto*)

d) El valor de las integrales indefinidas $\int f(x)\,dx$, $\int xe^{-x}\,dx$. (4 *puntos*)

OPCIÓN B

Problema B.1. Se da el sistema $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 3x + 4y + 5z = 5 \\ 7x + 9y + 11z = \alpha \end{cases}$, donde α es un parámetro real.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Los valores de α para los que el sistema es compatible y los valores de α para los que el sistema es incompatible. (4 *puntos*)

b) Todas las soluciones del sistema cuando sea compatible. (4 *puntos*)

c) La discusión de la compatibilidad y determinación del nuevo sistema deducido del anterior al cambiar el coeficiente 11 por cualquier otro número diferente. (2 *puntos*)

Problema B.2. Sea π el plano de ecuación $9x + 12y + 20z = 180$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Las ecuaciones de los dos planos paralelos a π que distan 4 unidades de π. (4 *puntos*)

b) Los puntos *A*, *B* y *C* intersección del plano π con los ejes OX, OY y OZ y el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. (4 *puntos*)

c) El volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen O de coordenadas y los puntos *A*, *B* y *C*. (2 *puntos*)

Problema B.3. Las coordenadas iniciales de los móviles A y B son (0, 0) y (250, 0), respectivamente, siendo 1km la distancia del origen de coordenadas a cada uno de los puntos (1, 0) y (0, 1).

El móvil A se desplaza sobre el eje OY desde su posición inicial hasta el punto $\left(0, \frac{375}{2}\right)$ con velocidad de 30 km/h y, simultáneamente, el móvil B se desplaza sobre el eje OX desde su posición inicial hasta el origen de coordenadas con velocidad de 40 km/h.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La distancia *f*(*t*) entre los móviles A y B durante el desplazamiento, en función del tiempo *t* en horas desde que comenzaron a desplazarse. (2 *puntos*)

b) El tiempo T que tardan los móviles en desplazarse desde su posición inicial a su posición final, y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función *f* a lo largo del trayecto. (4 *puntos*)

c) Los valores de *t* para los que la distancia de los móviles es máxima y mínima durante su desplazamiento y dichas distancias máxima y mínima. (4 *puntos*)

SOLUCIÓN AL EXAMEN EBAU JUNIO COMUNIDAD VALENCIANA 2019
MATEMÁTICAS II

Miguel Galo Fernández

Índice de Contenidos

1. Opción A

1.1. A1

Solución:

a) En primer lugar calculamos el determinante de A, $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{vmatrix} = (a+1)^2 = 0$

$\Rightarrow a = -1$ En este caso:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Rango de A = 2. resumimos la solución en la siguiente tabla:

a	Rango de A
-1	2
$\neq -1$	3

$|2A^{-1}| = 2^3 \cdot |A^{-1}| = 8 \cdot \dfrac{1}{|A|} = \dfrac{8}{(a+1)^2}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. De aquí se obtiene el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} \text{x-z=-1} \Rightarrow x = -1 \\ \text{z=0} \end{array}\right\} \text{La solución de la ecuación es } (-1, y, 0)\ \forall y \in \mathbb{R}$$

c) Como $B^2 = \dfrac{1}{3}I - 2B \Rightarrow 3(B^2 + 2B) = I \Rightarrow 3(B + 2I) \cdot B = I$ y esto también lo podemos expresar como $B \cdot [3(B+2I)] = I$. Luego $B^{-1} = 3(B+2I) = 3B + 6I$. Por tanto $m = 3$ y $n = 6$

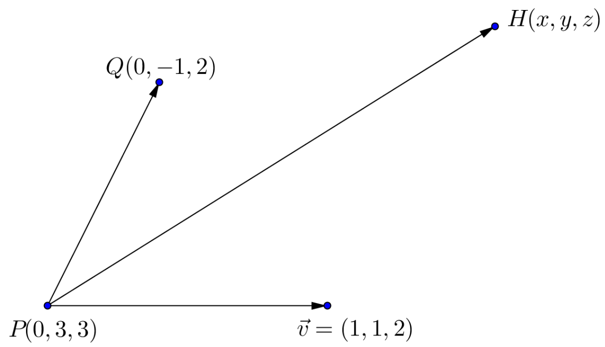
1.2. A2

Solución:

a) Ponemos las rectas en forma paramétrica $\quad r : \begin{cases} \text{x=}\ \lambda \\ \text{y=3+}\ \lambda \\ \text{z=3+ 2}\ \lambda \end{cases} \qquad s : \begin{cases} \text{x=}\ \mu \\ \text{y=-1+}\ \mu \\ \text{z=2+ 2}\ \mu \end{cases}$

Estas rectas son paralelas ya que tienen el mismo vector director $\vec{v} = (1,1,2)$. El plano que nos piden contiene a los puntos de las rectas $P((0,3,3)$ y $Q(0,-1,2)$ y al vector $\vec{v} = (1,1,2)$

El plano sería el que muestra la siguiente figura



Como los vectores $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PH}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes, su determinante vale cero. La ecuación del plano sería:

$$\pi : \begin{vmatrix} \text{x} & \text{y-3} & \text{z-3} \\ 0 & \text{-4} & \text{-1} \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\pi : 7x + y - 4z + 9 = 0}$$

b) Sea π_1 el plano que pasa por el punto $P(0,-1,2)$ y es perpendicular a la recta $r : \begin{cases} \text{x= } \lambda \\ \text{y=3+ } \lambda \\ \text{z=3+ 2 } \lambda \end{cases}$. Sea π_2 el plano que contiene al punto P y a la recta r. Entonces la recta que nos piden es la intersección de los planos π_1 y π_2

Al ser π_1 perpendicular a r, el vector normal de π_1 coincide con el vector director de la recta $\vec{v} = (1,1,2)$. Por tanto la ecuación de este plano es $\pi_1 : x + y + 2z + D = 0$. Como este plano pasa por el punto $P(0,-1,2) \Rightarrow -1 + 4 + D = 0 \Rightarrow D = -3$. Luego $\pi_1 : x + y + 2z - 3 = 0$.

π_2 contiene a los puntos $(0,-1,2)$ y $(0,3,3)$ y al vector $\vec{v} = (1,1,2)$. Su ecuación es, según hemos visto en el apartado a), $\pi_2 : 7x + y - 4z + 9 = 0$

La ecuación de la recta que nos piden es $t : \begin{cases} \text{x+y+2z-3=0} \\ \text{7x+y-4z+9=0} \end{cases}$. Estas dos ecuaciones forman un sistema compatible indeterminado que vamos a resolver en función de z

$t : \begin{cases} \text{x+y=3-2z} \\ \text{7x+y=-9+4z} \end{cases}$. Si a la segunda ecuación le restamos la primera nos queda $6x = -12 + 6z \Rightarrow x = -2 + z$. Si sustituimos este valor en la primera ecuación $-2 + z + y = 3 - 2z \Rightarrow y = 5 - 3z$. La recta que nos piden es $t : \begin{cases} \text{x=-2+ } \lambda \\ \text{y=5-3 } \lambda \\ \text{z= } \lambda \end{cases}$

c) Si la recta s está contenida en $\pi : x - 2y + az = b$, $(0,-1,2) \in \pi \Rightarrow \boxed{2 + 2a = b}$ y también se verifica que el vector director de la recta $\vec{v} = (1,2,1)$ es perpendicular al vector normal al plano $\vec{n}=(1,-2,a)$ con lo que $\vec{v}\cdot\vec{n}=0 \Rightarrow 1-4+a=0 \Rightarrow \boxed{a=3} \Rightarrow \boxed{b=8}$

1.3. A3

Solución:

Vamos a calcular las asíntotas de la función $f(x)=x\cdot e^{-x^2}=\dfrac{x}{e^{x^2}}$

i) Asíntotas verticales: no tiene ya que si $\lim_{x\to a}\dfrac{x}{e^{x^2}}=\dfrac{a}{e^{a^2}}=\infty \Rightarrow e^{a^2}=0$ y esto no es posible

ii) Asíntotas horizontales: una asíntota horizontal es la recta $y=0$ ya que $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x}{e^{x^2}}=\dfrac{\infty}{\infty}$(indeterminado). Si aplicamos la regla de L'Hôpital $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x}{e^{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{2xe^{x^2}}=\dfrac{1}{\infty}=0$

iii) Asíntotas oblícuas: no tiene. Las asíntotas oblícuas son de la forma $y=mx+n$, donde $m\neq 0$ siendo $m=\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{e^{x^2}}=\dfrac{1}{\infty}=0$.

Veamos la monotonía de la función. Su derivada primera vale $f'(x)=\dfrac{e^{x^2}-x\cdot 2x\cdot e^{x2}}{e^{x2}}=1-2x^2=(1+\sqrt{2}\cdot x)\cdot(1-\sqrt{2}\cdot x)$. Si f es creciente se pueden dar dos casos:

- $\left\{\begin{array}{l} 1+\sqrt{2}x>0\Rightarrow x>-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1-\sqrt{2}x>0\Rightarrow x<\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right. \Rightarrow x\in\left]\dfrac{-\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right[$
- $\left\{\begin{array}{l} 1+\sqrt{2}x<0\Rightarrow x<-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1-\sqrt{2}x<0\Rightarrow x>\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$ Esto es imposible

Luego f es creciente $\forall x\in\left]\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$, y será decreciente $\forall x\in\left]-\infty,\frac{-\sqrt{2}}{2}\right[\cup\left[\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right[$

Si hay un extremo de la función en un punto de abcisa x ha de ser $f'(x)=0\Rightarrow 1-2x^2=0\Rightarrow x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. La derivada segunda de la función es $f''(x)=-4x\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} \text{f''}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-2\sqrt{2}<0 \\ \text{f''}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)=2\sqrt{2}>0\end{array}\right.$.
Se alcanza un máximo en $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ y un mínimo en $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c) El Teorema de Rolle exige que la función g sea continua en [0,1] y derivable en]0,1[, esto es así por serlo las funciones f y $a\cdot x$ (la suma de funciones contínuas es contínua y la suma de funciones derivable también es derivable). Este Teorema también exige que $g(0)=g(1)\Rightarrow 0=$ $=\dfrac{1}{e}+a\Rightarrow a=-\dfrac{1}{e}$

d) $$\int x\cdot e^{-x^2}dx\left\{\begin{array}{l} t=-x^2 \\ dt=-2xdx \\ dx=\dfrac{-1}{2x}dt\end{array}\right\}=\int x\cdot e^t\cdot\frac{-1}{2x}dt=-\frac{1}{2}\int e^t dt=-\frac{1}{2}\cdot e^t+c\quad\forall c\in\mathbb{R}$$

$$\int x\cdot e^{-x}dx \left\{ \begin{array}{l} u=x\Rightarrow du=dx \\ \text{dv= e}^{-x}dx\Rightarrow v=-e^{-x} \end{array} \right\} = -xe^{x}+\int e^{-x}dx=-x\cdot e^{-x}-e^{-x}+c \quad \forall c\in\mathbb{R}$$

2. Opción B

2.1. B1

a) $\left\{ \begin{array}{l} \text{x+y+z=4} \\ \text{3x+4y+5z=5} \\ \text{7x+9y+11z=}\ \alpha \end{array} \right.$. La matriz ampliada es $A|B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 7 & 9 & 11 & \alpha \end{array} \right)$

La matriz de los coeficientes $\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \end{array} \right)$ verifica que la tercera de sus filas es igual a la primera más dos veces la segunda. Su rango no es tres, tiene un menor de orden 2 distinto de cero $\left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{array} \right| = 1\neq 0$. Por tanto rango (A)=2. Veamos el rango de la matriz ampliada

$$A|B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 7 & 9 & 11 & \alpha \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & \text{-7} \\ 0 & 2 & 4 & \alpha-28 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & \text{-7} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-14 \end{array} \right)$$

Si $\alpha=14\Rightarrow rango(A)=rango(A|B)=2<$ nº de incógnitas, según el Teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

Si $\alpha\neq 14\Rightarrow rango(A)=2\neq rango(A|B)=3<$, según el Teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es incompatible, no tiene solución.

b) El sistema tiene solución (infinitas soluciones) en el caso de que $\alpha=14$. El sistema es $\left\{ \begin{array}{l} \text{x+y+z=4}\Rightarrow x=-3+z \\ \text{y+2z=7}\Rightarrow y=7-2z \end{array} \right.$ La solución del sistema es $x=-3+\mu$, $y=7-2\mu$, $z=\mu$ $\forall\mu\in\mathbb{R}$

c) el sistema que tenemos que discutir es $\left\{ \begin{array}{l} \text{x+y+z=4} \\ \text{3x+4y+5z=5} \\ \text{7x+9y+bz=}\ \alpha \end{array} \right.$. La matriz ampliada es

$$A|B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 7 & 9 & \text{b} & \alpha \end{array} \right)$$

La matriz de los coeficientes $A=\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & \text{b} \end{array} \right)$ tiene por determinante $|A|=b-11$.

Entonces si b=11 el rango de A es 2, ya que el menor de orden 2 de A $\left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{array} \right| = 1\neq 0$

Veamos el rango de la matriz ampliada:

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 7 & 9 & \text{b} & \alpha \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & \text{-7} \\ 0 & 2 & \text{b-7} & \alpha - 28 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & \text{-7} \\ 0 & 0 & \text{b-11} & \alpha - 14 \end{array}\right)$$

La discusión del sistema se da el la siguiente tabla:

b	α	Rango de A	Rango de $A\|B$	Sistema
$\neq 11$	$\forall\alpha$	3	3	Compatible determinado
11	14	2	2	Compatible indeterminado
11	$\neq 14$	2	3	Incompatible

2.2. B2

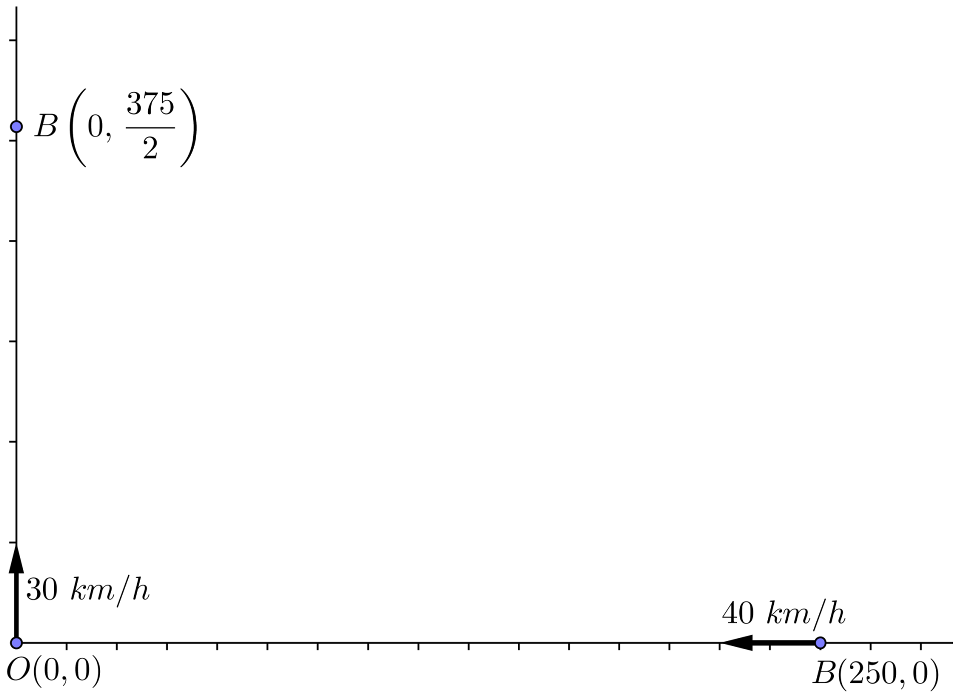
a) La ecuación general del plano π es $\pi : 9x+12y+20z-180 = 0$. Todos los palnos paralelos a π tienen de ecuación $\pi_1 : 9x+12y+20z+D = 0$. Un punto del plano π es $P(20,0,0)$. Entonces $d(\pi,\pi_1) = \dfrac{|180+D|}{\sqrt{9^2+12^2+20^2}} = 4 \Rightarrow \dfrac{|180+D|}{25} = 4 \Rightarrow |180+D| = 100$. Se pueden dar dos casos:

- $180 + D = 100 \Rightarrow D = -80$, el plano es $\pi_1 : 9x + 12y + 20z - 80 = 0$
- $180 + D = -100 \Rightarrow D = -280$, el plano es $\pi_1 : 9x + 12y + 20z - 280 = 0$

b) El plano π corta al eje OX cuando $y = 0,\ z = 0 \Rightarrow x = 20$. Por tanto $\pi \cap OX = A(20,0,0)$. Corta al eje OY cuando $x = 0, z = 0 \Rightarrow y = 15$. Por tanto $\pi \cap OY = B(0,15,0)$. Corta al eje OZ cuando $x = 0, y = 0 \Rightarrow y = 9$. Por tanto $\pi \cap OZ = C(0,0,9)$. Por tanto $\overrightarrow{AB} = (-20,15,0)$, $\overrightarrow{AC} = (-20,0,9)$. Si $\alpha = \sphericalangle \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC} \Rightarrow cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|} = \dfrac{400}{\sqrt{625}\cdot\sqrt{481}} = \dfrac{400}{25\cdot\sqrt{481}} = \dfrac{16}{\sqrt{481}} \Rightarrow \alpha = arcos\dfrac{16}{\sqrt{481}}$

c) El volumen del tetraedro es $V = \dfrac{1}{3}A_b \cdot h$ donde A_b es el área de la base y h es la altura del tetraedro. Se tiene que $A_b = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}| = \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} \text{i} & \text{j} & \text{k} \\ \text{-20} & 15 & 0 \\ \text{-20} & 0 & 9 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{2}|135i + 180j + 300k| \Rightarrow$ $A_b = \dfrac{1}{2}\sqrt{135^2+180^2+300^2} = \dfrac{375}{2}$. como la altura es $h = d[(0,0,0),\pi] = \dfrac{|-180|}{25} = \dfrac{36}{5}$, el volumen del tetraedro vale $V = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{375}{2}\cdot\dfrac{36}{5} = 450\ u^3$

2.3. B3



a) A las t horas el móvil A se encuentra en el punto $A_t(0, 30t)$ y el móvil B se encuentra en $B_t(250-40t, 0)$. La función distancia entre los dos móviles a las t horas de iniciar el movimiento es $f(t) = d(A_t, B_t) = \sqrt{(250-t)^2 + (30t)^2} = \sqrt{2500t^2 - 20000t + 62500}$

b) $30t = \frac{375}{2} \Rightarrow t = \frac{375}{60} = \frac{25}{4}$ *horas*. El móvil A tarda $\frac{25}{4}$ horas en llegar a su destino.
$250 - 40t = 0 \Rightarrow t = \frac{25}{4}$ *horas*. El móvil B tarda $\frac{25}{4}$ horas en llegar a su destino.

c) $f'(t) = \frac{2500t - 10000}{\sqrt{2500t^2 - 20000t + 62500}} = 0 \Rightarrow t = 4$ horas. $f''(t) = \frac{450}{(t^2 - 8t + 25)^{3/2}}$. Como $f''(4) = \frac{50}{9} > 0 \Rightarrow$ en t=4 se alcanza un mínimo, la distancia mínima es $f(4) = 150$. No hay distancia máxima.