El lamentable estado de las matemáticas en España Trigonometría

Miguel Galo Fernández

14 de febrero de 2019

Índice de Contenidos

1. Introducción

En la mayoría de los libros de texto se hace una exposición de la trigonometría de manera muy pobre, en el sentido de la superficialidad de los contenidos. A parte de la superficialidad otro inconveniente, por fraudulento, es el enunciado de propiedades sin justificación. Hemos de hacer un acto de fe y memorizarlas. Se prepara a los alumnos para que apliquen ese estudio memorístico y a eso se reduce la actividad matemática, por llamarle de algún modo.

Me propongo hacer un desarrollo extenso de la trigonometría básica, haciendo todas las demostraciones de las propiedades que se enuncien.

El término trigonometría proviene de las palabras griegas trígonon (triángulo) y métron (medida) y podemos considerar que es la parte de la geometría que trata de establecer y estudiar las relaciones métricas entre los lados y ángulos de los triángulos. Esta disciplina surgió con la necesidad de resolver problemas relacionados con los elementos de un triángulo (lados y ángulos) tanto planos como esféricos. Tanto Aristarco de Samos como Hiparco, astrónomos griegos anteriores a Cristo, establecieron una relación entre los lados y los ángulos de un triángulo, lo que llamamos razones trigonométricas , que constituyen la base de la trigonometría. La trigonometría, tanto plana como esférica, es de especial importancia y útil en topografía, cartografía, navegación marítima y aérea, astronomía, construcción, mecánica, diseños gráficos, etc. Es un ejemplo claro de la aplicación de la ciencia matemática a la resolución de problemas reales.

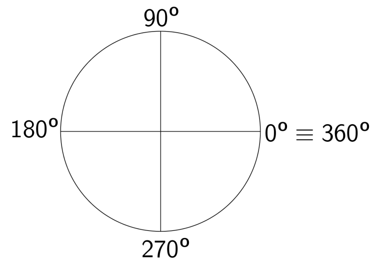
La trigonometría, al igual que cualquier otra rama de la matemática, no fue el resultado de la labor de un solo hombre ni de una sola nación. Ya los antiguos egipcios y babilonios conocían y habían utilizado propiedades o teoremas relativos a las razones entre los lados de triángulos semejantes, sin formularlos de una manera explícita, naturalmente. Dado que no nos encontramos con ningún concepto de medida de ángulos en el mundo prehelénico, tales estudios y consideraciones podrían quizás llamarse "trilaterometría" o medida de los polígonos de tres lados, mejor que trigonometría o medida de las distintas partes de un triángulo.

La mayoría de los problemas de geometría que aparecen en los papiros hacen referencia a fórmulas de medición necesarias para evaluar el área de figuras planas y de ciertos volúmenes. Los geómetras egipcios parecen estar en condiciones de comprender la semejanza y la proporcionalidad. En el siglo III a.C. dos figuras similares, aunque de dimensiones diferentes, fueron dibujadas en las paredes de la habitación donde se encuentra la tumba de Seti I. El problema 56 del Papiro Rhind presenta un interés especial porque contiene lo que podríamos llamar unos rudimentos de trigonometría y de una teoría de triángulos semejantes. En la construcción de las pirámides un problema esencial era el de mantener una pendiente uniforme en cada cara y la misma en las cuatro, y puede hacer sido este problema el que llevó a los egipcios a introducir un concepto equivalente al de la cotangente de un ángulo. En la tecnología moderna se acostumbra medir la pendiente de una línea recta por medio de la razón entre "la subida" y "el avance"; en Egipto, en cambio, se solía utilizar la inversa de esta razón, denominándola por la palabra "seqt" y que significa la separación horizontal de un recta oblicua del eje vertical por unidad de variación en la altura. Así pues, el seqt correspondía, salvo en lo que se refiere a las unidades de medida, al "desplome" que hoy usan los arquitectos para medir la pendiente hacia el interior de un muro.

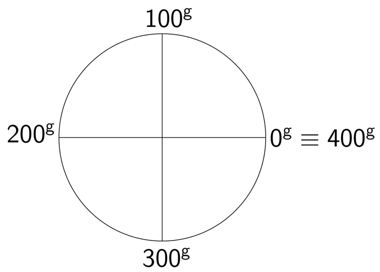
2. Ángulos

En geometría, el ángulo puede ser definido como la parte del plano determinada por dos semirrectas llamadas lados que tienen el mismo punto de origen llamado vértice del ángulo. Los ángulos se pueden situar sobre la circunferencia, el vértice estaría en el centro siendo sus lados las semirectas que contienen a dos radios.

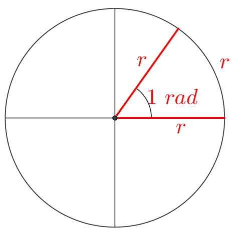
Los Sumerios pensaban que el año estaba dividido en 360 días, que correspondía a la circunferencia que describía la Tierra en dar una vuelta alrededor de Sol. Dividían esta circunferencia en 360 partes, a cada una de las cuales les llamarosn grados (grados sexagesimales). Cada grado se divide en 60 minutos (1º=60') y cada minuto en 60 segundos (1'=60"). En esto consisten los grados sexagesimales, una forma de medir ángulos. La circunferencia queda dividida en cuatro cuadrantes, cada uno de 90º tal y como se observa en la figura siguiente:



Entre los ingenieros es común que los ángulos se midan en grados centesimales, dividiendo la circunferencia en 400 partes a cada una de las cuales se le llama grado centesimal. Cada grado centesimal se divide en 100 minutos ($1^g = 100^m$ o también $1^g = 100^c$) y un minuto centesimal equivale a 100 segundos ($1^m = 1^c = 100^s = 100^{cc}$). La siguiente figura indica como se divide la circunferencia en grados centesimales:



Ninguna de las dos formas descritas para medir ángulos es la mejor, la manera más eficaz de medir los ángulos es en radianes. Si un ángulo de sime en radianes entonces la longitud del arco es igual al producto de radio por el ángulo, por esto es la mejor forma de medir los ángulos. Un radián es la amplitud de un ángulo central (el que tiene su vértice en el centro de la circunferencia) cuyo arco es igual al radio:



En una circunferencia hay $\dfrac{2\pi r}{r} = 2\pi$ radianes, de modo que la equivalencia entre grado sexagesimal y radián es 2π radianes $\equiv 360^o$ o lo que es lo mismo π $radianes \equiv 180^o$

Si el ángulo es de α radianes, como a cada radián le corresponde un arco r, la longitud del arco del ángulo α es $\alpha \cdot r$

3. Razones trigonométricas

Las razones trigonométricas se definen en un triángulo rectángulo. Sea la configuración que describe la siguiente figura:

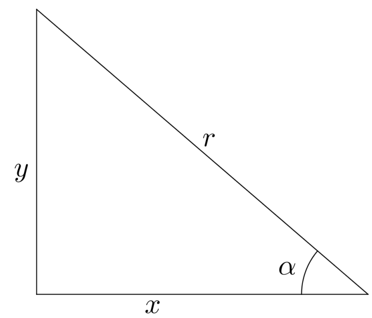


Figura 1: Razones trigonométricas

Se define:

a) **seno** $\boxed{sen(\alpha) = \dfrac{Cateto\ opuesto}{Hipotenusa} = \dfrac{y}{r}}$

b) **coseno** $\boxed{cos(\alpha) = \dfrac{Cateto\ adyacente}{Hipotenusa} = \dfrac{x}{r}}$

c) **tangente** $\boxed{tg(\alpha) = \dfrac{Cateto\ opuesto}{Cateto\ adyacente} = \dfrac{y}{x}}$

A continuación definimos las razones trigonemétricas inversas:

- La inversa del seno es la cosecante $\boxed{csc(\alpha) = \dfrac{1}{sen\alpha} = \dfrac{r}{y}}$
- La inversa del coseno es la secante $\boxed{sec(\alpha) = \dfrac{1}{cos\alpha} = \dfrac{r}{x}}$
- La inversa de la tangente es la cotangente $\boxed{cot(\alpha) = \dfrac{1}{tg\alpha} = \dfrac{x}{y}}$

Proposición 1 *Sea α un ángulo cualquiera. Entonces se verifica que $sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$*
Demostración:
Si nos fijamos en la figura1, $sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = \left(\dfrac{y}{r}\right)^2 + \left(\dfrac{x}{r}\right)^2 = \dfrac{x^2 + y^2}{r^2} = \dfrac{r^2}{r^2} = 1$

Proposición 2 *Sea alpha un ángulo cualquiera. Entonces se verifica que* $tg(\alpha) = \dfrac{sen\alpha}{cos\alpha}$
Demostración:
Si nos fijamos en la figura1 $sen(\alpha) = \dfrac{y}{r}$, $cos(\alpha) = \dfrac{x}{r}$. *Por lo tanto* $\dfrac{sen\alpha}{cos\alpha} = \dfrac{\frac{y}{\cancel{r}}}{\frac{x}{\cancel{r}}} = \dfrac{y}{x} = tg\alpha$

Proposición 3 *Sea alpha un ángulo cualquiera. Entonces se verifica que* $1+tg^2\alpha = \dfrac{1}{cos^2\alpha} = sec^2\alpha$

Demostración:

Como $tg(\alpha) = \dfrac{sen\alpha}{cos\alpha} \Rightarrow 1+tg^2\alpha = 1+\dfrac{sen^2\alpha}{cos^2\alpha} = \dfrac{sen^2\alpha+cos^2\alpha}{cos^2\alpha} = \dfrac{1}{cos^2\alpha} = sec^2\alpha$

La representación gráfica de las razones trigonométricas se hace utilizando la circunferencia goniométrica, que es una circunferencia de radio unidad. Consideremos la circunferencia goniométrica con la configuración que muestra la figura:

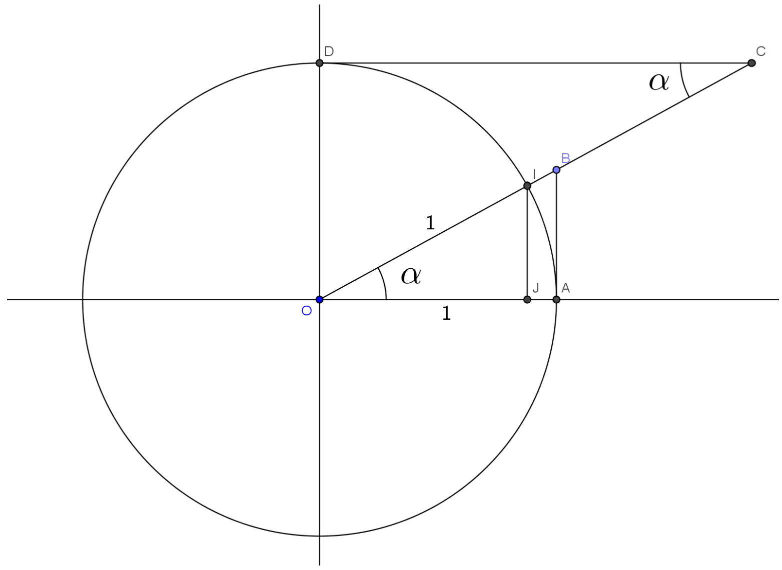


Figura 2: representación gráfica de las razones trigonométricas

A la vista de los segmentos que se han tenido en cuenta en la anterior circunferencia goniométrica:

- $sen(\alpha) = \dfrac{\overline{IJ}}{1} = \overline{IJ}$
- $cos(\alpha) = \dfrac{\overline{OA}}{1} = \overline{OA}$
- $tg(\alpha) = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \dfrac{\overline{AB}}{1} = \overline{AB}$
- $csec(\alpha) = \dfrac{\overline{OC}}{\overline{OD}} = \dfrac{\overline{OC}}{1} = \overline{OC}$
- $sec(\alpha) = \dfrac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \dfrac{\overline{OB}}{1} = \overline{OB}$
- $cot(\alpha) = \dfrac{\overline{DC}}{\overline{OD}} = \dfrac{\overline{DC}}{1} = \overline{DC}$

  A continuación vamos a calcular las razones trigonométricas de los ángulos que se utilizan con mucha frecuencia (ángulos fundamentales). Estos ángulos son 0º, 30º, 45º, 60º y 90º. Si situamos sobre la circunferencia goniométrica un ángulo α*, ponemos el vértice en el origen de coordenadas O, uno de sus lados es el eje de abcisas y el otro lado cortará a la circunferencia en un punto* $P(x, y)$ *tal y como indica la figura:*

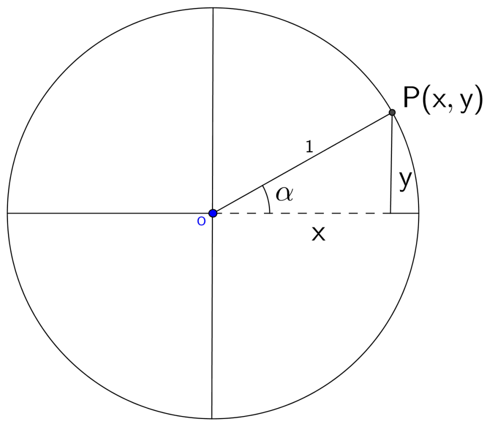


Figura 3: El seno es la ordenada (y), el coseno es la abcisa (x)

1. *Ángulo de cero grados: el lado del ángulo que marca la amplitud de cero grados respecto al eje de abcisas (es el propio eje de abcisas en este caso) corta a la circunferencia en el punto* $P(1,0)$*, por tanto* $cos(0) = 1,\ sen(0) = 0,\ tg(0) = \dfrac{sen(0)}{cos(0)} = \dfrac{0}{1} = 0$

2. *Ángulo de 30º. Lo podemos obtener como la bisectriz de un ángulo del triángulo equilatero de lado 1*

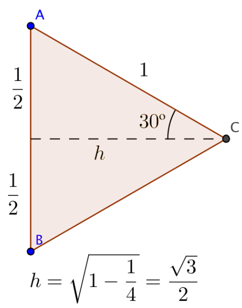


Figura 4: Ángulo de 30º

De la observación de la figura obtenemos $sen(30^o) = \dfrac{1}{2},\ cos(30^o) = \dfrac{\sqrt{3}}{2},$

$$tg(30^o) = \dfrac{\dfrac{1}{\cancel{2}}}{\dfrac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$$

3. *Ángulo de 45º. Este ángulo es el que forma la diagonal de un cuadrado con su lado.*

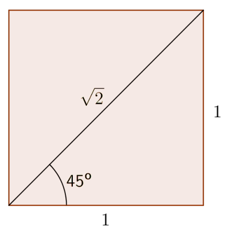


Figura 5: Ángulo de 45º

Si tomamos el cuadrado de lado 1 y trazamos su diagonal tal y como aparece en la figura anterior:

$$sen(45^o) = cos(45^o) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ tg(45^o) = \frac{1}{1} = 1$$

4. *Ángulo de 60º. Es el ángulo de un triángulo equilátero. Consideramos un triángulo equilátero de lado 1 como indica la figura a continuación:*

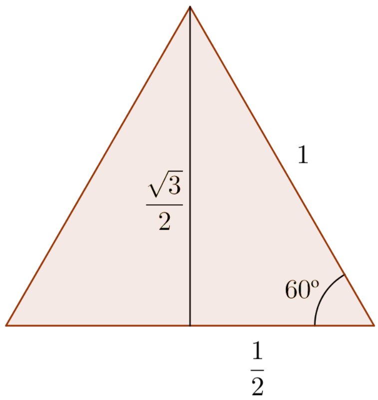


Figura 6: Ángulo de 60º

$$sen(60^o) = \frac{\sqrt{3}}{2},\ cos(60^o) = \frac{1}{2},\ tg(60^o)\frac{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}}{\frac{1}{\cancel{2}}} = \sqrt{3}$$

5. *Ángulo de 90º. El lado de este ángulo que determina esta amplitud respecto al eje de abcisas, corta al eje de ordenadas en el punto* $P(0,1)$.
   Por tanto $cos(90^o) = 0,\ sen(90^o) = 1,\ tg(90^o)$ *está indeterminado.*
6. *Ángulo de 180º. El lado de este ángulo que determina esta amplitud respecto al eje de abcisas, corta al eje de ordenadas en el punto* $P(-1,0)$.
   Por tanto $cos(180^o) = -1,\ sen(1800^o) = 0,\ tg(180^o) = 0$.
7. *Ángulo de 270º. El lado de este ángulo que determina esta amplitud respecto al eje de abcisas, corta al eje de ordenadas en el punto* $P(0,-1)$.
   Por tanto $cos(270^o) = 0,\ sen(270^o) = 1 - 1,\ tg(90^o)$ *está indeterminado.*

La siguiente tabla resume las razones trigonométricas de ángulos fundamentales

Razón trigonométrica	*0º*	*30º*	*45º*	*60º*	*90º*	*180º*	*270º*
Sen	*0*	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	*1*	*0*	*-1*
cos	*1*	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	*0*	*-1*	*0*
tg	*0*	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	*1*	$\sqrt{3}$	∞	*0*	-∞

4. El signo de las razones trigonométricas

Situamos los ángulos sobre la circunferencia goniométrica. El centro de esta circunferencia será el origen de coordenadas. Trazamos dos rectas perpendiculares que pasan por este punto, que tomaremos como ejes de coordenadas tal y como indica la siguiente figura:

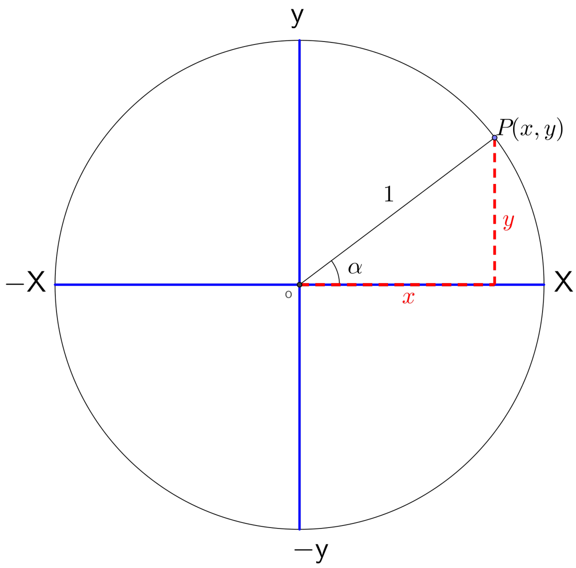


Figura 7: signo de las razones trigonométricas

Como hemos mencionado anteriormente, los ángulos los posicionamos trazando un radio y midiendo la amplitud respecto al eje de abcisas que consideramos fijo. El segmento del radio corta a la circunferencia en un punto $P(x, y)$ y ya vimos anteriormente que $x = cos(\alpha)$, $y = sen(\alpha)$. Por tanto el seno y la cosecante serán positivos cuando también lo sea la ordenada del punto $P(x, y)$, es decir en el primer y cuarto cuadrantes. El coseno y la secante serán positivos cuando también lo sea la abcisa del punto, es decir en el primer y segundo cuadrantes. Como la tangente es el cociente entre el seno y el coseno, la tangente será positiva cuando seno y coseno tengan el mismo signo, es decir el el primer y tercer cuadrantes.

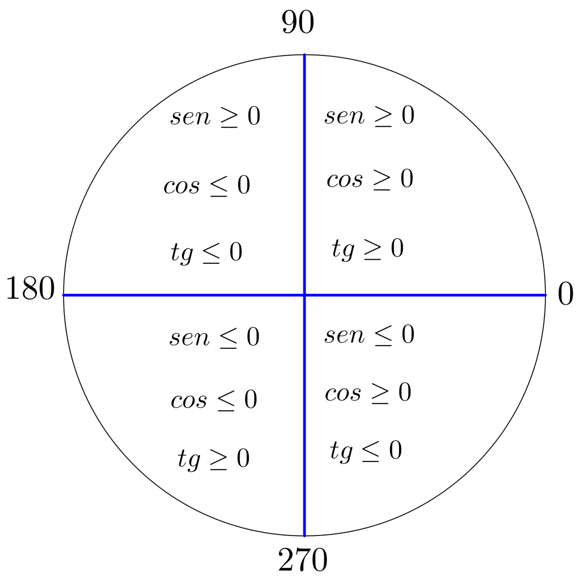


Figura 8: signo de las razones trigonométricas en los distintos cuadrantes

5. Ángulos complementarios

Los ángulos complementarios son aquellos que suman 90º. El complementario del ángulo α *es* $90 - \alpha$

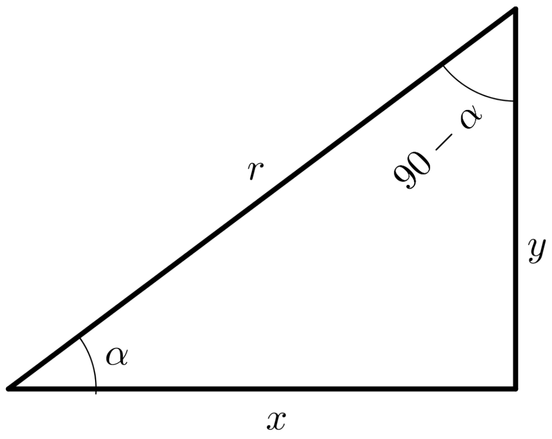


Figura 9: Ángulos complementarios

$$sen(90-\alpha) = \frac{x}{r} = cos(\alpha)$$

$$cos(90-\alpha) = \frac{y}{r} = sen(\alpha)$$

$$tg(90-\alpha) = \frac{sen(90-\alpha)}{cos(90-\alpha)} = \frac{cos(\alpha)}{sen(\alpha)} = cot(\alpha)$$

6. Ángulos en el 2º cuadrante. Suplementario de un ángulo agudo

Recordemos que dos ángulos son suplementarios cuando suman 180º. El suplementario de un ángulo α *es* $180-\alpha$. *Si* $0 \leq \alpha \leq 90$, *entonces su suplementario está en el segundo cuadrante.*

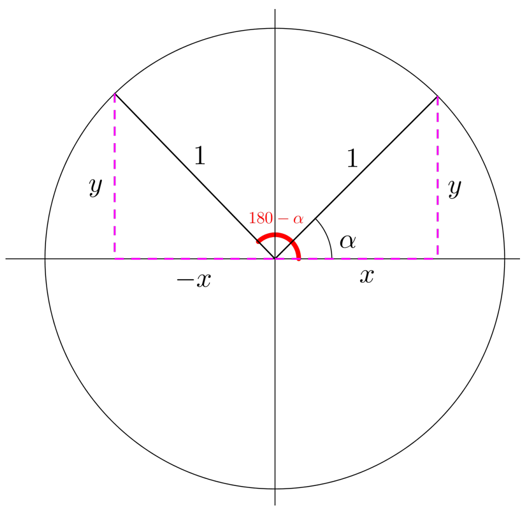


Figura 10: Ángulos en el segundo cuadrante

$$\cos(180-\alpha) = -x = -\cos(\alpha)$$

$sen(180-\alpha) = y = sen(\alpha)$
$tg(180-\alpha) = \dfrac{y}{-x} = -\dfrac{y}{x} = -tg(\alpha)$

7. Ángulos en el tercer cuadrante

Sea $0 \leq \alpha \leq 90$ *un ángulos en el primer cuadrante. Entonces* $180 \leq 180+\alpha \leq 270$*, esto quiere decir que el ángulo* $180+\alpha$ *está en el tercer cuadrante,*

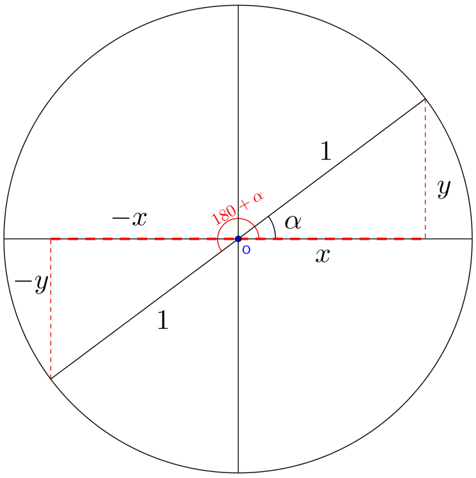


Figura 11: Ángulos en el tercer cuadrante

$cos(180+\alpha) = -x = -cos(\alpha)$
$sen(180+\alpha) = -y = -sen(\alpha)$
$tg(180+\alpha) = \dfrac{-y}{-x} = \dfrac{y}{x} = tg(\alpha)$

8. Ángulos en el cuarto cuadrante

Sea el ángulo en el primer cuadrante $0 \leq \alpha \leq 90$*. Entonces el ángulo* $360-\alpha$ *está en el cuarto cuadrante, es decir* $270 \leq 360-\alpha \leq 360$

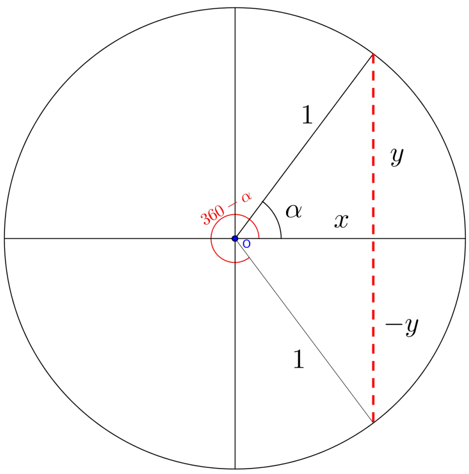


Figura 12: Ángulos en el cuarto cuadrante

$cos(360-\alpha) = x = cos(\alpha)$

$sen(360-\alpha) = -y = -sen(\alpha)$
$tg(360-\alpha) = \dfrac{-y}{x} = -\dfrac{y}{x} = -tg(\alpha)$

9. Ángulo suma

Proposición 4 *Sean α y β dos ángulos cualesquiera. Entonces:*

$$\boxed{sen(\alpha+\beta) = sen(\alpha)cos(\beta) + cos(\alpha)sen(\beta)}$$

Demostración

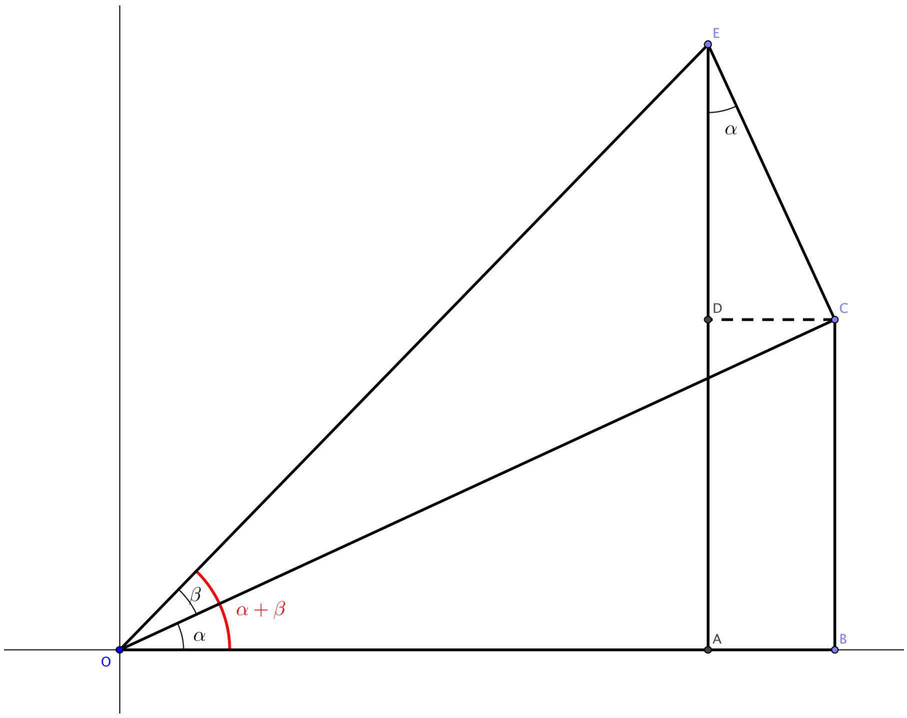


Figura 13: Ángulo suma

La configuración que representa la figura anterior se ha construido de forma que, los triángulos OAE, OBC, OCE y ECD son rectángulos. Ángulos comprendidos entre lados perpenciculares son iguales. Como $\overline{AE} \perp \overline{OA}$ y $\overline{EC} \perp \overline{OC}$, el ángulo comprendido entre $\overline{OC}$ y $\overline{OA}$, que es α, es igual al ángulo comprendido entre $\overline{DE}$ y $\overline{EC}$. Se tiene que:

$Sen(\alpha+\beta) = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{OE}} = \dfrac{\overline{ED}+\overline{CB}}{\overline{OE}} = \dfrac{\overline{ED}}{\overline{OE}} + \dfrac{\overline{CB}}{\overline{OE}}$ *(I). Como se dan las igualdades*

$$\left.\begin{array}{l} \overline{ED} = \overline{EC}cos(\alpha) \\ \overline{EC} = \overline{OE}sen(\beta) \end{array}\right\} \Rightarrow ED = \overline{OE}cos(\alpha)sen(\beta)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{CB} = \overline{OC}sen(\alpha) \\ \overline{OC} = \overline{OE}cos(\beta) \end{array}\right\} \Rightarrow ED = \overline{OE}sen(\alpha)cos(\beta)$$

Sustituyendo estos valores en (I) obtenemos $sen(\alpha+\beta) = \dfrac{\cancel{\overline{OE}}cos(\alpha)sen(\beta)}{\cancel{\overline{OE}}} + \dfrac{\cancel{\overline{OE}}sen(\alpha)cos(\beta)}{\cancel{\overline{OE}}}$, *es decir que* $sen(\alpha+\beta) = sen(\alpha)cos(\beta) + cos(\alpha)sen(\beta)$.

Proposición 5 *Sean* α *y* β *dos ángulos cualesquiera. Entonces:*

$$\boxed{cos(\alpha+\beta) = cos(\alpha)cos(\beta) - sen(\alpha)sen(\beta)}$$

Demostración

Según hemos visto en el apartado de ángulos complementarios se verifica que $cos(\alpha+\beta) = sen[90-(\alpha+\beta)] = sen[(90-\alpha)+(-\beta)]$. *Aplicando la fórmula del seno del ángulo suma obtenemos:*

$cos(\alpha+\beta) = sen(90-\alpha)cos(-\beta)+cos(90-\alpha)sen(-\beta)$. *Teniendo en cuenta que* $sen(90-\alpha) = cos(\alpha)$ *y que* $cos(90-\alpha) = sen(\alpha)$, *nos queda* $cos(\alpha+\beta) = cos(\alpha)cos(-\beta) + +sen(\alpha)sen(-\beta)$. *Los ángulos son positivos recorren la circunferemcia en sentido antihorario. Los negativos la recorren en el sentido horario de modo que,* $-\beta = 360-\beta$ *y* $-\alpha = 360-\alpha$. *Según hemos visto en el apartado de los ángulos en el cuarto cuadrante,* $sen(-\beta) = -sen(\beta)$ *y* $cos(-\alpha) = cos(\alpha)$. *Finalmente , sustituyendo estos valores en la expresión anterior tenemos que* $cos(\alpha+\beta) = cos(\alpha)cos(\beta) - sen(\alpha)sen(\beta)$

Proposición 6 *Sean* α *y* β *dos ángulos cualesquiera. Entonces:*

$$\boxed{tg(\alpha+\beta) = \frac{tg(\alpha)+tg(\beta)}{1-tg(\alpha)tg(\beta)}}$$

Demostración

$tg(\alpha+\beta) = \dfrac{sen(\alpha+\beta)}{cos(\alpha+\beta)} = \dfrac{sen(\alpha)cos(\beta)+cos(\alpha)sen(\beta)}{cos(\alpha)cos(\beta)-sen(\alpha)sen(\beta)}$. *Si dividimos todo por* $cos(\alpha)cos(\beta)$ *nos queda:*

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{\dfrac{sen(\alpha)\cancel{cos(\beta)}}{cos(\alpha)\cancel{cos(\beta)}} + \dfrac{\cancel{cos(\alpha)}sen(\beta)}{\cancel{cos(\alpha)}cos(\beta)}}{1-\dfrac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)}\cdot\dfrac{sen(\beta)}{cos(\beta)}} \Rightarrow tg(\alpha+\beta) = \frac{tg(\alpha)+tg(\beta)}{1-tg(\alpha)tg(\beta)}$$

10. Ángulo diferencia

Proposición 7 *Sean* α *y* β *dos ángulos cualesquiera. Entonces:*

$$\boxed{sen(\alpha-\beta) = sen(\alpha)cos(\beta) - cos(\alpha)sen(\beta)}$$

Demostración

$sen(\alpha-\beta) = sen[\alpha+(-\beta)] = sen(\alpha)cos(-\beta) + cos(\alpha)sen(-\beta)$. *Como* $cos(-\beta) = cos(\beta)$ *y* $sen(-\beta) = -sen(\beta)$ *se verifica lo que queremos demostrar.*

Proposición 8 *Sean* α *y* β *dos ángulos cualesquiera. Entonces:*

$$\boxed{cos(\alpha-\beta)=cos(\alpha)cos(\beta)-sen(\alpha)sen(\beta)}$$

Demostración

$cos(\alpha-\beta)=cos[\alpha+(-\beta)]=cos(\alpha)cos(-\beta)-sen(\alpha)sen(-\beta)$. *Como* $cos(-\beta)=cos(\beta)$ *y* $sen(-\beta)=-sen(\beta)$, *si sustuimos queda* $cos(\alpha-\beta)=cos(\alpha)cos(\beta)-sen(\alpha)sen(\beta)$.

Proposición 9 *Sean* α *y* β *dos ángulos cualesquiera. Entonces:*

$$\boxed{tg(\alpha-\beta)=\frac{tg(\alpha)-tg(\beta)}{1+tg(\alpha)tg(\beta)}}$$

Demostración

$tg(\alpha-\beta)=tg[\alpha+(-\beta)]=\dfrac{tg(\alpha)+tg(-\beta)}{1-tg(\alpha)tg(-\beta)}=\dfrac{tg(\alpha)-tg(\beta)}{1+tg(\alpha)tg(\beta)}$ *ya que* $tg(-\alpha)=-tg(\alpha)$ *y* $tga(-\beta)=-tg(\beta)$

11. Ángulo doble

Proposición 10 *Sea* α *ángulo cualquiera. Entonces:*

$$\boxed{sen(2\alpha)=2sen(\alpha)cos(\alpha)}$$

Demostración

Según la expresión del águlo suma (cuando $\alpha=\beta$*):*

$sen(2\alpha)=sen(\alpha+\alpha)=sen(\alpha)cos(\alpha)+cos(\alpha)sen(\alpha)=2sen(\alpha)cos(\alpha)$

Proposición 11 *Sea* α *ángulo cualquiera. Entonces:*

$$\boxed{cos(2\alpha)=cos^2(\alpha)-sen^2(\alpha)}$$

Demostración

Según la expresión del águlo suma (cuando $\alpha=\beta$*):*

$cos(2\alpha)=cos(\alpha+\alpha)=cos(\alpha)cos(\alpha)-sen(\alpha)sen(\alpha)=cos^2(\alpha)-sen^2(\alpha)$

Proposición 12 *Sea α ángulo cualquiera. Entonces:*

$$\boxed{tg(2\alpha) = \frac{2tg(\alpha)}{1 - tg^2(\alpha)}}$$

Demostración

Según la expresión del águlo suma (cuando $\alpha = \beta$):

$$tg(2\alpha) = tg(\alpha + \alpha) = \frac{tg(\alpha) + \mathrm{tg}(\alpha)}{1 - tg(\alpha)tg(\alpha)} = \frac{2tg(\alpha)}{1 - tg^2(\alpha)}$$

12. Ángulo mitad

Proposición 13 *Sea α ángulo cualquiera. Entonces:*

$$\boxed{sen\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - cos(\alpha)}{2}}}$$

Demostración

Se tiene que $cos(\alpha) = cos\left(2 \cdot \frac{\alpha}{2}\right) = cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow 1 - 2sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = cos(\alpha) \Rightarrow$ $sen\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - cos(\alpha)}{2}}$

Proposición 14 *Sea α ángulo cualquiera. Entonces:*

$$\boxed{cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + cos(\alpha)}{2}}}$$

Demostración

$$cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{1 - sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \sqrt{1 - \frac{1 - cos(\alpha)}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1 + cos(\alpha)}{2}}$$

Proposición 15 *Sea α ángulo cualquiera. Entonces:*

$$\boxed{tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - cos(\alpha)}{1 + cos(\alpha)}}}$$

Demostración

El resultado se obtiene, de manera obvia, de la expresión $tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$

13. Transformación de sumas en productos: fórmulas de Mendoza

Proposición 16 $\boxed{sen(A)+sen(B)=2sen\left(\frac{A+B}{2}\right)cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}$

Demostración

$$\left.\begin{array}{lcccc} sen(a+b) & = & senacosb & + & \cancel{cosasenb} \\ sen(a-b) & = & senacosb & - & \cancel{cosasenb} \\ \hline Sen(a+b)+sen(a-b) & = & 2sen\ a\ cos\ b & (*) & \end{array}\right\}$$

Hacemos la siguiente transformación:

$$\left.\begin{array}{lcl} A & = & a+\cancel{b} \\ B & = & a-\cancel{b} \\ \hline A+B & = & 2a \end{array}\right\} \Rightarrow a=\frac{A+B}{2} \Rightarrow b=\frac{A-B}{2}.$$ *Sustituyendo en (*) nos queda:*

$$sen(A)+sen(B)=2sen\left(\frac{A+B}{2}\right)cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Proposición 17 $\boxed{sen(A)-sen(B)=2cos\left(\frac{A+B}{2}\right)sen\left(\frac{A-B}{2}\right)}$

Demostración

$$\left.\begin{array}{lcccc} sen(a+b) & = & \cancel{senacosb} & + & cosasenb \\ -sen(a-b) & = & -\cancel{senacosb} & + & cosasenb \\ \hline Sen(a+b)-sen(a-b) & = & & & 2cos\ a\ sen\ b\quad (**) \end{array}\right\}$$

Haciendo la misma transformación anterior y sustituyendo en (**) queda:

$$sen(A)-sen(B)=2cos\left(\frac{A+B}{2}\right)sen\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Proposición 18 $\boxed{cos(A)+cos(B)=2cos\left(\frac{A+B}{2}\right)cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}$

Demostración

$$\left.\begin{array}{lcccc} cos(a+b) & = & cosacosb & - & \cancel{senasenb} \\ cos(a-b) & = & cosacosb & + & \cancel{senasenb} \\ \hline cos(a+b)+cos(a-b) & = & 2cos\ a\ cosb & & (***) \end{array}\right\}$$

Haciendo la misma transformación anterior y sustituyendo en (***) queda:

$$cos(A) + cos(B) = 2cos\left(\frac{A+B}{2}\right)cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Proposición 19 $\boxed{cos(A) - cos(B) = -2sen\left(\frac{A+B}{2}\right)sen\left(\frac{A-B}{2}\right)}$

Demostración

$$\left.\begin{array}{llccc} cos(a+b) & = & \cancel{cosacosb} & \text{-} & senasenb \\ -cos(a-b) & = & \text{-}\cancel{cosacosb} & \text{-} & \cancel{senasenb} \\ \hline cos(a+b) - cos(a-b) & = & & & \text{-2sen a sednb} \quad (*v) \end{array}\right\}$$

*Haciendo la misma transformación anterior y sustituyendo en (*v) queda:*

$$cos(A) - cos(B) = -2sen\left(\frac{A+B}{2}\right)sen\left(\frac{A-B}{2}\right)$$