EXAMEN EBAU MURCIA 2019 MATEMÁTICAS II

Miguel Galo Fernández

Índice de Contenidos

1. Opción A

1.1. A1

Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & az & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & a \\ ax & + & y & + & z & = & a+3 \end{array}$$

a) [1 p.] Determine para qué valores de a el sistema tiene solución única. Si es posible, calcule dicha solución para a = 0.

b) [1 p.] Determine para qué valor de a el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

c) [0,5 p.] Determine para qué valor de a el sistema no tiene solución.

Solución:

La matriz ampliada es $A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \text{a} & 1 \\ 1 & \text{a} & 1 & \text{a} \\ \text{a} & 1 & 1 & \text{a+3} \end{array}\right)$ *y el determinante de la matriz A vale* :

$|A| = -a^3 + 3a - 2$. Este determinante vale cero cuando $a^3 - 3a + 2 = 0$ que lo resolvemos por la regla de Ruffini

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & & 1 & 2 & \\ \hline & 1 & 2 & 0 & \\ -2 & & -2 & & \\ \hline & 1 & 0 & & \end{array}$$

<u>**Si a=1**</u> la matriz ampliada es $A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$

por tanto rango de A=1 $\neq$ rango $A|B = 2$, según el Teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es incompatible.

<u>Si a=-2</u> la matriz ampliada es $A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Por tanto si $a = -2$ rango de A=2 = rango $A|B = 2$, según el Teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado.

La siguiente tabla resume la discusión del sistema según los valores de a:

a	Rango de A	Rango $A\|B$	Tipo de sistema
1	1	2	Incompatible (sin solución)
-2	2	2	Compatible indeterminado (infinitas soluciones)
$\neq$1,-2	3	3	Compatible (solución única)

Solo nos resta, para responder a todas las cuestiones que plantea el resultado, resolver el sistema cuando a=0. La matriz ampliada sería:

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \backsim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \backsim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

El sistema que obtenemos es

$$\left.\begin{array}{ccccccc} x & + & y & & & = & 1 \\ & - & y & + & z & = & -1 \\ & & & & 2z & = & 2 \end{array}\right\}$$

De este sistema se obtiene la solución, $z = 1$, $y = 2$, $x = -1$

1.2. A2

a) [1,5 p.] Calcule la integral indefinida $\int x^2 cosxdx$

b) [1 p.] Determine el área del recinto limitado por el eje OX, las rectas verticales $x = 0$ y $x = \pi$, y la gráfica de la función $f(x) = x^2 cosx$.

Solución:

a) $\int x^2 cosxdx \left\{ \begin{array}{c} u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx \\ dv = cosxdx \Rightarrow v = senx \end{array} \right\} = \mathrm{x}^2 senx - 2\int xsenxdx \left\{ \begin{array}{c} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = senxdx \Rightarrow v = -cosx \end{array} \right\}$

Por tanto $\int x^2 cosxdx = x^2 senx - 2(-xcosx + \int coxdx) = x^2 senx + 2xcosx - 2senx + c, \forall c \in \mathbb{R}$

b) Área $= \left| \int_0^\pi x^2 cosxdx \right| = |x^2 senx + 2xcosx - 2senx|_0^\pi = 2\pi$

1.3. A3

Los puntos A = (3,0,0), B = (0,3,0) y C = (0,0,3) son tres de los vértices de un tetraedro. El cuarto vértice D está contenido en la recta r que pasa por el punto P = (1,1,1) y es perpendicular al plano π que contiene a los puntos A, B y C.

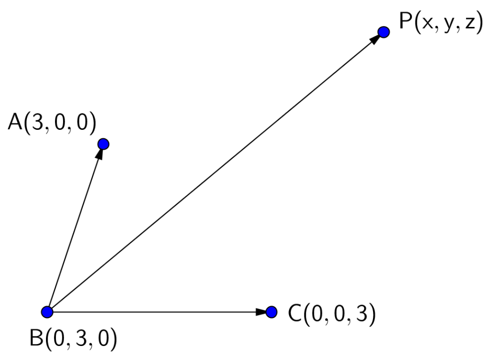
a) [0,5 p.] Calcule la ecuación del plano que contiene a los puntos A, B y C.

b) [0,5 p.] Calcule la ecuación de la recta r que pasa por el punto P = (1,1,1) y es perpendicular al plano π.

c) [1,5 p.] Calcule las coordenadas del vértice D sabiendo que el volumen del tetraedro es 18.

Solución:

a) El plano π que contiene a los puntos A, B y C, pasa por el punto B y tiene como vectores directores $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$



Los vectores $\overrightarrow{BA} = (3, -3, 0) \sim (1, -1, 0)$, $\overrightarrow{BC} = (0, -3, 3) \sim (0, -1, 1)$ y $\overrightarrow{BP} = (x, y - 3, z)$ son linealmente dependientes, por tanto su determinante vale cero:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ x & y-3 & z \end{vmatrix} = 0.$$

Desarrollando el determinante obtenemos la ecuación del plano $\pi \equiv x+y+z-3=0$

b) La recta r que pasa por el punto $P(1,1,1)$ y es perpendicular al plano π, tiene como vector director el vector normal del plano $\vec{n}=(1,1,1)$. Por lo tanto su ecuación es:

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1} \Rightarrow r \equiv x=y=z \Rightarrow D(a,a,a)$$

c) El volumen del tetraedro viene daddo por la expresión $V=\frac{1}{3}A_b \cdot h$, donde A_b es el área de la base y h es la altura del tetraedro.

La base es el triángulo de vértices A,B,C, por tanto $A_b = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC}|$. Como:

$$\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \end{vmatrix} = \text{-9i-9j-9k} \Rightarrow |\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC}| = 9\sqrt{3}$$

Luego el área de la base vale $A_b = \frac{9\sqrt{3}}{2}$

La altura del tetraedro se obtiene con la expresión $h=d(D,\pi)=\frac{a+a+a-3}{\sqrt{3}}=\frac{3|(a-1)|}{\sqrt{3}}=$

$=\sqrt{3}|a-1|$. Como el volumen es 18, se obtiene la ecuación $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{9\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot|a-1|=18 \Rightarrow$ $|a-1|=4 \Rightarrow a=5$ o bien $a=-3$. Luego hay dos posible soluciones $D(5,5,5)$, $D(-3,-3,-3)$

1.4. A4

(En este ejercicio trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal). El tiempo de duración de las bombillas de una cierta marca, medido en horas, sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ. Se sabe que el 69.50 % de las bombillas duran menos de 5061,2 horas, y que el 16.60 % de de las bombillas duran más de 5116,4 horas.

a) [1 p.] ¿Cuál es la probabilidad de que una bombilla de esta marca dure entre 5061,2 y 5116,4 horas?

b) [1,5 p.] Calcule la media y la desviación típica de esta distribución normal.

Solución:

a) Sea $X \equiv$ duración en horas de una bombilla. Sabemos que $X \rightsquigarrow N(\mu,\sigma)$. Del enunciados deducimos que $P(X<5061{,}2)=0{,}6950$, $P(5116{,}4<X)=0{,}1660 \Rightarrow P(X<5116{,}4)=0{,}8340$ (la probabilidad del suceso contrario es igual a la unidad menos la probabilidad del suceso)

Luego $P(5061{,}2<X<5116{,}4)=P(X<5116{,}4)-P(X<5061{,}2)=0{,}1390$

b) Tipificamos la variable estadística $z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$, obteniendo:

$P(z < \dfrac{5061{,}2-\mu}{\sigma}) = 0{,}6950$, $P(z < \dfrac{5164{,}4-\mu}{\sigma}) = 0{,}8340$. Si buscamos estos valores (0.6950 y 0.8340) en una tabla de la distribución normal N(0,1) obtenemos:

$\dfrac{5061{,}2-\mu}{\sigma} = 0{,}51 \Rightarrow 0{,}51\sigma + \mu = 50{,}16$ (*)

$\dfrac{5116{,}4-\mu}{\sigma} = 0{,}97 \Rightarrow 0{,}97\sigma + \mu = 5116{,}4$ (**)

Restándole a (**) la expresión (*) tenemos $0{,}46\sigma = 55{,}2 \Rightarrow \sigma = 120$ y sustituyendo este valor en (*) $\mu = 5000$ horas

2. Opción B

2.1. B1

Considere la matriz A $= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) [1 p.] Calcule las potencias sucesivas A^2, A^3 y A^4.

b) [0,5 p.] Calcule la expresión general de A^n para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$.

c) [1 p.] Determine si existe la inversa de A. En caso afirmativo, calcúlela.

Solución:

a) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{n} & \mathrm{n} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

c) La matriz A tiene inversa ya que su determinante no es nulo, vale 1. Para hallar la inversa aplicamos el método de Gauss-Seidel:

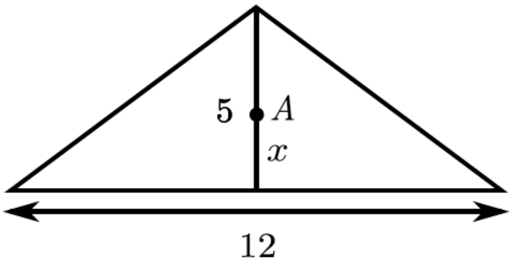
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

La primera transformación ha consistido en sustituir la primera fila por la diferencia entre la primera y segunda filas. En la segunda transformación hemos cambiado la fila 1 por la diferencia entre las filas 1 y 3 de la primera transformación. La matriz inversa de A es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.2. B2

Considere un triángulo isósceles cuya base de 12 cm es el lado desigual y cuya altura es de 5 cm. Se quiere determinar un punto A situado sobre la altura a una distancia x de la base de manera que la suma de las distancias del punto A a los tres vértices del triángulo sea mínima. Observe la figura:

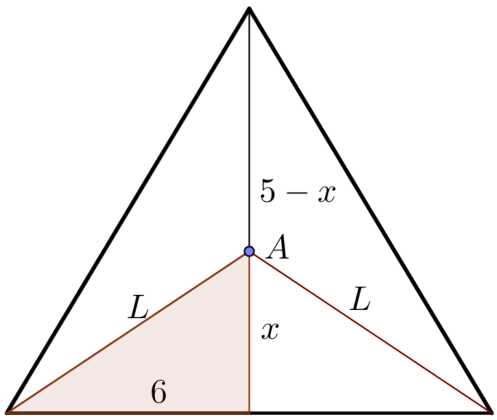


a) [0,5 p.] Demuestre que la suma de las distancias del punto A a los tres vértices del triángulo viene dada por la expresión $f(x) = 5 - x + 2\sqrt{36 + x^2}$.

b) [1,5 p.] Calcule el valor de x para que la suma de las distancias sea mínima.

c) [0,5 p.] Calcule dicha cantidad mínima.

Solución:



a) Si aplicamos el Teorema de Pitágoras al triángulo coloreado $L = \sqrt{36 + x^2}$, según podemos observar en la figura la función que nos da la suma de distancias desde el punto A hasta los vértices del triángulo es $f(x) = 5 - x + 2L \Rightarrow f(x) = 5 - x + 2\sqrt{36 + x^2}$

b) Si la función $f(x) = 5 - x + 2\sqrt{36 + x^2}$ tiene un mínimo en un punto de abcisa x, su derivada primera debe ser nula, $f'(x) = -1 + 2 \cdot \dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{36 + x^2}} = 0 \Rightarrow 2x = \sqrt{36 + x^2} \Rightarrow 4x^2 =$ $= 36 + x^2 \Rightarrow x = 2\sqrt{3}$ (la raíz negativa no tiene sentido al tratarse de una distancia), en efecto se alcanza un mínimo en $x = 2\sqrt{3}$ ya que la derivada segunda $f''(2\sqrt{3}) > 0$

c) La cantidad mínima es $f(2\sqrt{3}) = 5 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{36 - 12} = 5 - 2\sqrt{3} + 4\sqrt{6}$

2.3. B3

Considere las siguientes rectas:

$$r : \frac{x-5}{1} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+1}{1} \qquad s : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$$

a) [1 p.] Estudie la posición relativa de ambas rectas.

b) [1,5 p.] En caso de que las rectas se corten, calcule el plano que las contiene y el ángulo que forman ambas rectas. En caso de que las rectas se crucen, calcule la perpendicular común a ambas rectas.

Solución:

a) Evidentemente las rectas no son paralelas ya que sus vectores directores no son proporcionales. Ponemos las rectas en paramétricas:

$$r : \begin{cases} \text{x=5+ } \lambda \\ \text{y=6+ } \lambda \\ \text{z=-1+ } \lambda \end{cases} \qquad s : \begin{cases} \text{x=1+ } \mu \\ \text{y= } \mu \\ \text{z=-1- } \mu \end{cases}$$

Igualando lasa ecuaciones paramétricas obtenemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{c} \lambda - \mu = -4 \\ \lambda - \mu = -6 \\ \lambda + \mu = 0 \end{array}\right\}$$

Evidentemente este sistema es incompatible ($\lambda - \mu$ no puede tener 2 valores distintos). Luego las rectas se cruzan. Los vectores directores de las rectas r y s son , respectivamente, $\vec{v_r} = (1,1,1)$ y $\vec{v_s} = (1,1,-1)$. Sea el vector $\vec{n} = \vec{v_r} \wedge \vec{v_s}$. Calculemos $\vec{n}$:

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \text{i} & \text{j} & \text{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \text{-1} \end{vmatrix} = -2i + 2j \Rightarrow \vec{n} = (-2,2,0) \sim (-1,1,0)$$

Sea π_r el plano que pasa por el punto $P_r(5,6,-1)$ y tiene por vectores directores $\vec{n}$ y $\vec{v_r}$. Entonces:

$$\pi_r = \begin{vmatrix} \text{x-5} & \text{y-6} & \text{z+1} \\ 1 & 1 & 1 \\ \text{-1} & 1 & 0 \end{vmatrix} = -x - y + 2z + 13 = 0 \Rightarrow \pi_r = x + y - 2z - 13 = 0$$

Sea π_s el plano que pasa por el punto $P_s(1,0,-1)$ y tiene por vectores directores $\vec{n}$ y $\vec{v_s}$. Entonces:

$$\pi_s = \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi_r = x + y + 2z + 1 = 0$$

La perpendicular común de las rectas r y s es la recta intersección de los planos π_r y π_s

$$\left.\begin{array}{c} x+y-2z=13 \\ x+y+2z=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x-2z=13-y \\ x+2z=-1-y \end{array}\right\} \Rightarrow x = 6 - y,\ z = -\frac{7}{2}$$

La perpendicular común es la recta $t : \left\{\begin{array}{c} x=6-\lambda \\ y=\lambda \\ z=-\frac{7}{2} \end{array}\right.$.

2.4. B4

(En este ejercicio trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal).

La probabilidad de que un determinado equipo de fútbol gane cuando juega en casa es $\frac{2}{3}$, y la probabilidad de que gane cuando juega fuera es $\frac{2}{5}$

a) [1 p.] Sin saber dónde jugará el próximo partido, calcule la probabilidad de que gane.

b) [1,5 p.] Si ganó el último partido del campeonato, ¿cuál es la probabilidad de que jugara en casa?

Solución:

Tomamos la partición del espacio muestral en sucesos elementales $\mathcal{P} = \{C, F\}$, siendo F el suceso jugar fuera y C el suceso jugar en casa. G es el suceso ganar el partido de fútbol.

a) Según el Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(G) = P(F) \cdot P(G/F) + P(C) \cdot P(G/C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{8}{15}$$

b) Según el Teorema de Bayes:

$$P(C/G) = \frac{P(C) \cdot P(G/C)}{P(F) \cdot P(G/F) + P(C) \cdot P(G/C)} = \frac{3}{8}$$