EXAMEN EBAU MURCIA 2019 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

Miguel Galo Fernández

Índice de Contenidos

1. Opción A

1.1. A1

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcule A^{-1} (1 punto)

b) Calcule el valor del parámetro a para que $B + C = A^{-1}$ (1 punto)

c) Calcule el valor del parámetro a para que $A+B+C = 3I$, donde I es la matriz identidad de orden 2. (1 punto)

Solución:

a) Como $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, la matriz A tiene inversa. Sea $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. Entonces $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, de aquí obtenemos dos sistemas de ecuaciones:

$\left.\begin{array}{c} 2x+y=1 \\ x+y=0 \end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{c} 2z+t=0 \\ z+t=1 \end{array}\right\}$, Que si resolvemos obtenemos como solución x=1, y=-1, z=-1, t=2. Luego $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $B + C = A^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a-1 \\ a-1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 0$

c) $A + B + C = 3I \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & a \\ a & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 0$

1.2. A2

Una empresa, que vende un cierto artículo al precio unitario de 40 euros, tiene por función de coste, $C(x) = 2x^2 + 4x + 98$, donde x es el número de unidades producidas del artículo. Calcular el número de unidades que debe vender para que el beneficio de la empresa sea máximo. Obtener el beneficio (ingresos menos los costes) máximo obtenido. (2 puntos)

Solución:

La función de beneficio es $B(x) = 40x - 2x^2 - 4x - 98 \Rightarrow B(x) = 36x - 2x^2 - 98$. Si esta función alcanza un extremo en el punto de abcisa x, ha de ser $B'(x) = 0 \Rightarrow 36-4x = 0 \Rightarrow x = 9$. Como $B''(x) = -4 \Rightarrow B''(9) = -4 < 0 \Rightarrow x = 9$ es un máximo. El beneficio es máximo cuando vende 9 unidades y este beneficio es B=64.

1.3. A3

Dada la función $f(x) = \begin{cases} x+a & \text{si} \quad x<1 \\ x^2 & \text{si} \quad 1\leq x \leq 3 \\ x+b & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$

a) Determinar a y b para que la función sea continua en todo R.(1 punto)

b) Hallar $\int_1^3 f(x)dx$. (1 punto)

Solución:

a) $f(x)$ es continua $\forall x \neq 1, 3$. Para que sea continua en x = 1 debe cumplir:

i) $\exists\ f(1) = 1^2 = 1$

ii) $\exists \lim\limits_{x\to 1} f(x) \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} x+a = 1+a \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} x^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow 1+a = 1 \Rightarrow a = 0$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 3$ debe cumplir:

iii) $\exists\ f(3) = 3^2 = 9$

iv) ii) $\exists \lim\limits_{x\to 3} f(x) \begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} x^2 = 9 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} x+b = 3+b \end{cases} \Rightarrow 9 = 3+b \Rightarrow b = 6$

b) $\int_1^3 f(x)dx = G(3) - G(0)$ donde $G(x) = \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \Rightarrow \begin{cases} \text{G(3)=9} \\ \text{G(0)=0} \end{cases}$

Luego $\int_1^3 f(x)dx = 9$

1.4. A4

En el coro universitario el 65 % de sus componentes son mujeres. El 30 % de las mujeres y el 25 % de los hombres son bilingües. Si elegimos al azar a un componente del coro: a) ¿Cuál es la probabilidad que sea bilingüe? (0,75 puntos)

b) Sabiendo que es bilingüe, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? (0,75 puntos)

Solución:

Sea $M \equiv$ ser mujer, $H \equiv$ ser hombre, $B \equiv$ ser bilingüe . Entonces el conjunto $\{M, H\}$ es una partición del espacio muestral en sucesos elementales ya que $M \cup H = E$ (suceso seguro) y $M \cap H = \emptyset$. Además $P(M) = 0{,}65$, $P(H) = 0{,}35$ $P(B/M) = 0{,}30$ $P(B/H) = 0{,}25$

a) Según el teorema de la probabilidad total $P(B) = P(M)\cdot P(B/M) + P(H)\cdot P(B/H) = 0{,}65\cdot 0{,}30 + 0{,}35\cdot 0{,}25 = 0{,}2825$

b) Según el teorema de Bayes $P(M/B) = \dfrac{P(M) \cdot P(B}{P(M) \cdot P(B/M) + P(H) \cdot P(B/H)}$ y sustituyendo valores obtenemos que $P(M/B) = \dfrac{0{,}65 \cdot 0{,}30}{0{,}2825} = \dfrac{0{,}195}{0{,}2825} = 0{,}6903$

1.5. A5

El tiempo, en años, de renovación de un ordenador portátil se puede aproximar mediante una distribución normal con desviación típica de 0,9 años. Si tomamos al azar a 900 usuarios, se obtiene una media muestral de 3,5 años. Hallar el intervalo de confianza al 95 % para el tiempo medio de renovación de un ordenador portátil. (1,5 puntos)

Solución:

El intervalo de confianza que nos piden viene dado por la expresión:

$$I = \left(\overline{X} - Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

Sabemos que el nivel de significación es $\alpha = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 \Rightarrow Z_{\alpha/2} = Z_{0{,}025} = 1{,}96$ (este valor lo podemos obtener de una tabla de la Distribución Normal N(0,1)). Del enunciado se obtiene que $\overline{X} = 3{,}5$, $\sigma = 0{,}9$. Por tanto $\overline{X} - Z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 3{,}5 - 1{,}96 \cdot \dfrac{0{,}9}{\sqrt{900}} = 3'4412$, $\overline{X} + Z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 3{,}5 + 1{,}96 \cdot \dfrac{0{,}9}{\sqrt{900}} = 3'5588$. El intervalo de confianza es $I = (3'4412, 3'5588)$.

2. Opción B

2.1. B1

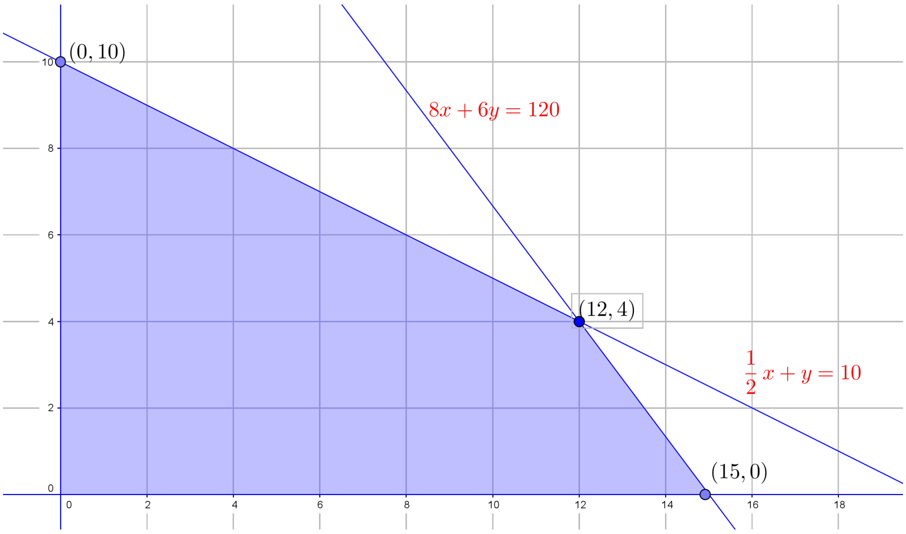
En un obrador se elaboran dos tipos de dulces distintos: A y B, siendo sus precios unitarios de 15 euros y 12 euros, respectivamente. Para elaborar un dulce del tipo A se necesitan $\frac{1}{2}$ kilo de azúcar y 8 huevos, mientras que para los del tipo B se requieren 1 kilo de azúcar y 6 huevos. En el obrador solo tienen 10 kilos de azúcar y 120 huevos. ¿Cuántos dulce deben elaborar de cada tipo para que el ingreso obtenido sea máximo? Razone la respuesta. (3 puntos).

Solución:

Resumimos en una tabla la información que nos da el texto:

	Cantidad	Precio unitario	Restricciones
Tipo A	x	15	$\frac{1}{2}x + y \leq 10$
Tipo b	y	12	$8x + 6y \leq 120$

La función a optimizar (maximizar) es $I(x,y) = 15x + 12y$ Si representamos gráficamente las restricciones nos da la región siguiente, señalada en azul:



Según podemos observar en la figura anterior los puntos críticos se alcanzan en los puntos A(10,0), B(12,4) y C(15,0). Se tiene que I(A)= 150, I(B)= 228, I(C) = 225. Por tanto la solución óptima se alcanza en B, debe elaborar 12 dulces de tipo A y 4 de tipo B

2.2. B2

a) Sea la función $f(x) = ax^3 + bx$, calcular los valores de a y b para que la gráfica de la función pase por el punto $(1, 1)$ y que en este punto la pendiente de la recta tangente vale -3. (1 punto)

b) Si en la función anterior $a = 1$ y $b = -12$, determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus puntos extremos. (1 punto)

Solución:

a) Como la función pasa por el punto $(1, 1) \Rightarrow a + b = 1$. La derivada de la función vale $f'(x) = 3ax^2 + b \Rightarrow f'(1) = 3a + b = -3$. Tenemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} a + b = 1 \\ 3a + b = -3 \end{array}\right\}$$

Si restamos a la segunda ecuación la primera se tiene que $2a = -4 \Rightarrow a = \dfrac{-4}{2} = -2 \Rightarrow b = 3$

b) La función es$f(x) = x^3 - 12x$. La derivada de esta función es $f'(x) = 3x^2 - 12$. Estudiamos el signo de la derivada $3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 3(x + 2)(x - 2)$. Si la función es creciente su derivada ha de ser positiva con lo que $(x + 2)(x - 2) > 0$. Se pueden dar dos casos:

i) $\left\{\begin{array}{c} \text{x+2 >0} \Rightarrow x > -2 \\ \text{x-2} > 0 \Rightarrow x > 2 \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{x > -2}$

ii) $\left\{\begin{array}{c} \text{x+2 <0} \Rightarrow x < 2 \\ \text{x-2} < 0 \Rightarrow x < 2 \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{x < 2}$

La función es entonces creciente en el intervalo $] - 2, 2[$

Si la función tiene un extremo en x, ha de ser $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$. La derivada segunda vale $f''(x) = 6x \left\{\begin{array}{c} \text{f''(2)=12} \\ \text{f''(-2)=-12} \end{array}\right.$

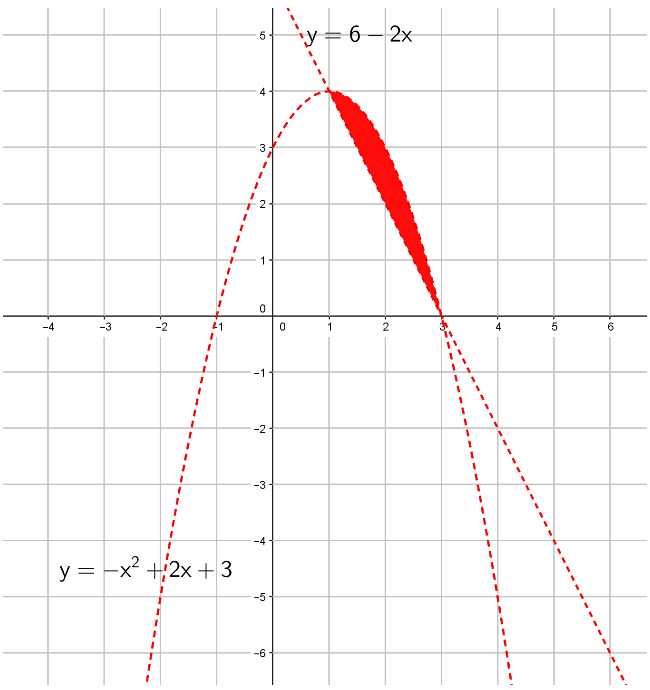
Al ser $f''(2) > 0 \Rightarrow$ se alcanza un mínimo en $x = 2$ y el punto mínimo es $(2, -16)$

Como $f''(-2) < 0 \Rightarrow$ se alcanza un máximo en $x = -2$ y el punto máximo es $(-2, 16)$

2.3. B3

Representar gráficamente el recinto del plano limitado por la recta $y = 6 - 2x$ y la parábola $y = -x^2 + 2x + 3$. Calcular su área. (2 puntos)

Solución:



El área del recinto limitado por las dos funciones (en rojo) viene dada por la integral $\int_1^3 (-x^2+2x+3)-(6-2x)dx = \int_1^3 -x^2+4x-3dx = G(3)-G(1)$ siendo:

$$G(x) = \int -x^2+4x-3dx = -\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x \begin{cases} \text{G(3)=0} \\ \text{G(1)= - } \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

El área del recinto es $A = \frac{4}{3}\ u^2$

2.4. B4

Dados dos sucesos A y B de un experimento aleatorio, se sabe que P(A)=0,3, P(B)=0,2 y P(A/B)=0,5. Calcular $P(A \cap B)\ y\ P(A \cup B)$. (1,5 puntos)

Solución:

Por definición de probabilidad condicionada:

$P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B) = 0'5 \cdot 0'2 = 0'1$. Según se desprende de los axiomas de Kolmogorov:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0'3 + 0'2 - 0'1 = 0'4$$

2.5. B5

El tiempo en minutos de conexión a Internet de los estudiantes de un centro de secundaria, sigue una distribución normal con una desviación típica de 10 minutos. Para poder estimar la media del tiempo de conexión, se construye un intervalo de confianza con un error menor o igual a 5 minutos, con un nivel de confianza del 95 %. Determine cuál es el tamaño mínimo de la muestra que es necesario observar. (1,5 puntos)

Solución:

Sea ϵ el error cometido, n el tamaño de la muestra y σ la desviación típica. Entonces se verifica que $Z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} < \epsilon \Rightarrow n > \left(Z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\epsilon}\right)^2$. Como $\alpha = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 \Rightarrow \alpha/2 = 0{,}025 \Rightarrow Z_{\alpha/2} = 1{,}96$. Luego $n > \left(1{,}96 \cdot \dfrac{10}{2}\right)^2 \Rightarrow n > 3{,}92$. El tamaño mínimo de la muestra es n=4.