# Propiedades en la geometría básica

Miguel Galo Fernández

19 de marzo de 2019

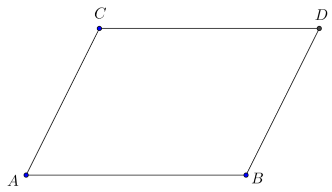
# Índice de Contenidos

# 1. Diagonales de un paralelogramo

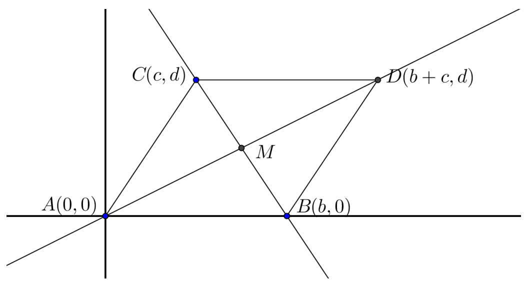
Las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio

**Demostración**

Sea el paralelogramo ABCD




La propiedad de las diagonales a la que nos referimos es independiente de la posición en el plano que pueda tener el paralelogramo. Hagamos una traslación y un giro si fuera necesario, llevemos el punto A al origen de coordenadas, el punto B sobre el eje X. Como $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, las coordenadas del paralelogramo las podemos tomar, sin pérdida de generalidad, como se muestra en la figura:




La recta r que pasa por A y por D tiene vector director $\vec{v} = \overrightarrow{AD} = (b + c, d)$. Su vector normal es $\vec{n} = (-d, b + c)$, por tanto su ecuación es $\boxed{r: \ -dx + (b + c)y = 0}$

La recta sque pasa por $B(b, 0)$ y tiene como vector director $\vec{v'} = \overrightarrow{BC} = (c - b, d)$, posee el vector normal $\vec{n} = (d, b - c)$, por lo que su ecuación es $s: \ dx + (b - c)y + k = 0$ y como pasa por $B(b, 0) \Rightarrow k = -bd$, es decir que $\boxed{s: \ dx + (b - c)y - bd = 0}$

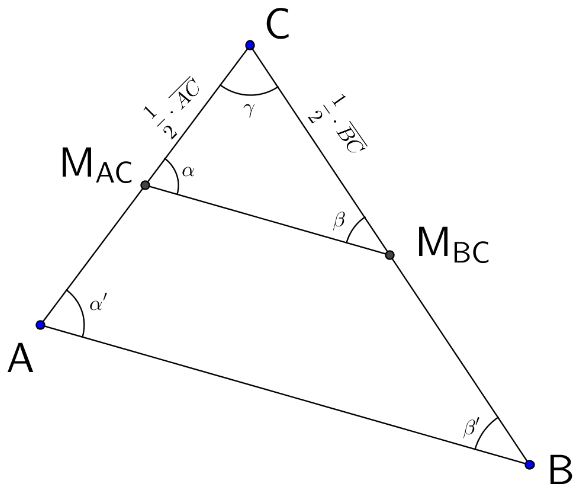
Ni que decir tiene que las rectas r y s son las diagonales de nuestro paralelogramo. Para hallar su punto de intersección resolvemos el sistema que forman sus ecuaciones. Si sumamos las ecuaciones de r y s obtenemos $2\cancel{b}y = \cancel{b}d \Rightarrow y = \dfrac{d}{2}$. Si sustituimos este valor en la ecuación de r obtenemos $-\cancel{d}x+\dfrac{(b+c)\cancel{d}}{2}=0 \Rightarrow x=\dfrac{b+c}{2}$. El punto de corte de las diagonales es $\left(\dfrac{b+c}{2},\dfrac{d}{2}\right)$, es evidente que este es el punto medio de los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

# 2. Propiedad en los triángulos

Si en un triángulo unimos los puntos medios de dos de sus lados, obtenemos un segmento paralelo al tercer lado y que mide su mitad

**Demostración**

Consideramos el triángulo ABC, siendo $M_{AC}$ $y$ $M_{BC}$ los puntos mediso, respectivamente, de los lados AC y BC tal y como muestra la gráfica.




Si aplicamos el criterio de semejanza LAL, los triángulos $A$, $M_{AC}$ $M_{BC}$ y $A, B, C$ son semejantes, con razón de semejanza $\dfrac{1}{2}$. Por tanto los ángulos verifican las igualdades $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$. Luego las recta que pasa por $M_{AC}$ $y$ $M_{BC}$ es paralela a la que pasa por $A$ y $B$, siendo la razón de semejanza $\dfrac{1}{2}$, es obvio que $\overline{M_{AC}M_{BC}} = \dfrac{1}{2}\overline{AB}$

# 3. Baricentro de un triángulo

Las medianas de un triángulo se cortan en un punto llamado baricentro que divide a cada mediana en dos partes una doble de la otra.

**Demostración**

Consideremos el triángulo ABC, elegimos un sistema de referencia en donde el origen de coordenadas está en A y la recta que pasa por A y B coincide con el eje x tal y como se indica en la figura:

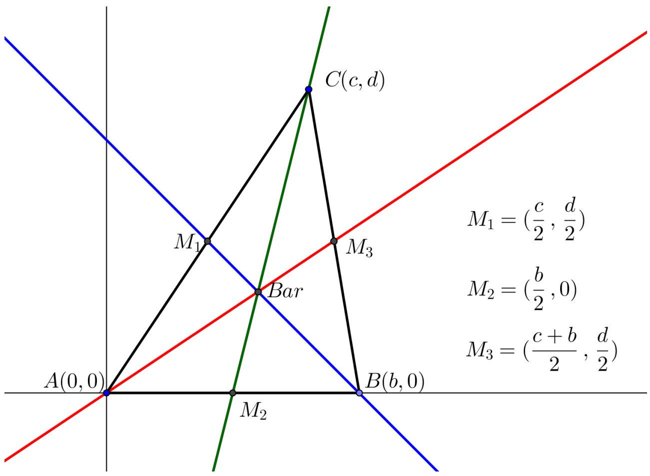



Figura 1: Baricentro

Denotamos por $M_1$, $M_2$ y $M_3$ a los puntos medios de los lados del triángulo. Las medianas del triángulo son las rectas de color rojo, azul y verde. El baricentro es el punto denotado como Bar.

La mediana roja pasa por $A(0,0)$ y tiene como vector director $\vec{v} = \left(\frac{c+b}{2}, \frac{d}{2}\right)$, por lo que su vector normal es $\vec{n_v} = \left(-\frac{d}{2}, \frac{c+b}{2}\right)$, siendo su ecuación $\boxed{-\frac{d}{2}x + \frac{c+b}{2}y = 0}$

La mediana azul pasa por $B(b,0)$ y tiene como vector director $\vec{w} = \left(\frac{c}{2} - b, \frac{d}{2}\right)$. Su vector normal es $\vec{n_w} = \left(\frac{d}{2}, b - \frac{c}{2}\right)$, siendo su ecuación $\frac{d}{2}x + \left(b - \frac{c}{2}\right)y + k = 0$. Teniendo en cuenta que pasa por el punto $B(b,0)$ se verifica $\frac{d}{2}b + k = 0 \Rightarrow k = -\frac{db}{2}$. La ecuación de la mediana azul es $\boxed{\frac{d}{2}x + \left(b - \frac{c}{2}\right)y - \frac{db}{2} = 0}$. El punto de corte de las dos medianas, roja y azul, lo obtenemos resolviendo el sistema de sus ecuaciones. Si las sumamos las ecuaciones de las dos medianas nos queda $\left(\frac{c+b}{2} + b - \frac{c}{2}\right)y = \frac{db}{2} \Rightarrow \frac{3\cancel{b}}{\cancel{2}}y = \frac{d\cancel{b}}{\cancel{2}} \Rightarrow y = \frac{d}{3}$. Si sustituimos este valor en la ecuación de la mediana roja tenemos $-\frac{\cancel{d}}{2}x+\frac{c+b}{2}\cdot\frac{\cancel{d}}{3}=0$ y multiplicando esta expresión por 6 $-3x+b+c=0 \Rightarrow x=\frac{b+c}{3}$. El baricentro es el punto $\left(\frac{b+c}{3},\frac{d}{3}\right)$. Para demostrar que las medianas se cortan en el baricentro tan solo nos queda por probar que este punto también pertenece a la mediana verde. La mediana verde pasa por el punto $C(c,d)$ y tiene como vector director $\vec{t}=\left(c-\frac{b}{2},d\right)$ lo que indica que su vector normal es $\vec{n_t}=\left(d,\frac{b}{2}-c\right)$, la ecuación general de la mediana verde será $dx+\left(\frac{b}{2}-c\right)y+l=0$ y como pasa por el punto $M_2\left(\frac{b}{2},o\right)$ se cumple que $l=-\frac{db}{2}$ con lo que la ecuación de la mediana verde es $\boxed{dx+\left(\frac{b}{2}-c\right)y-\frac{db}{2}=0}$. Si sustituimos el baricentro en esta ecuación obtenemos $\frac{d(b+c)}{3}+\frac{bd}{6}-\frac{cd}{3}-\frac{bd}{2}=\frac{2bd+2cd+bd-2cd-3bd}{6}=0$, como cumple su ecuación el baricentro pertenece también al la mediana verde, concluyendo, hemos probado que las tres medianas se cortan en un punto al que llamamos baricentro. Vamos a probar ahora que el baricentro divide a cada mediana en dos partes una doble de la otra. Vemos que se verifica la igualdad $d(A,Bar)=2d(Bar,M_3)$. Se tiene que:

$$d(A,Bar)=\sqrt{\left(\frac{c+b}{3}\right)^2+\left(\frac{d}{3}\right)^2}=\frac{1}{3}\sqrt{(c+b)^2+d^2}$$

$$d(Bar,M_3)=\sqrt{\left(\frac{c+b}{6}\right)^2+\left(\frac{d}{6}\right)^2}=\frac{1}{6}\sqrt{(c+b)^2+d^2}$$

Queda claro que se verifica $d(A,Bar)=2d(Bar,M_3)$. Hacer esta comprobación con las otras medianas es similar y no tiene ninguna dificultad.

# 4. Segmentos en el plano

Consideremos los puntos $A(a_1,a_2)$ y $B(b_1,b_2)$. El segmento de extremos A y B se define como el siguiente conjunto:

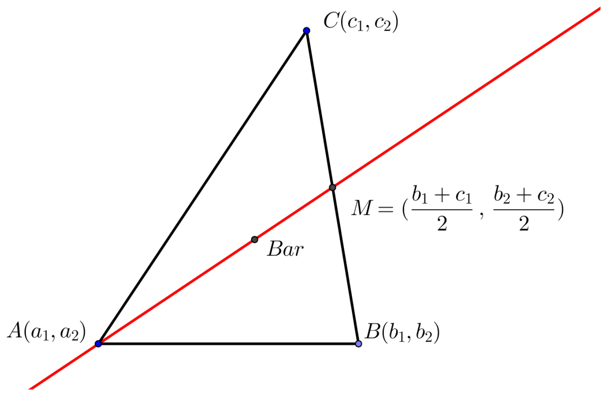
$$\sigma(A,B)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/(x,y)=(a_1,a_2)+t(b_1-a_1,b_2-a_2)\ \textit{siendo}\ 0\leq t\leq 1\}$$

Si por ejemplo $t=\frac{1}{2}$ el punto del segmento es el punto medio. Si $t=\frac{m}{n}$ el punto correspondiente dividiría al segmento en n partes, una de ellas tendría por longitud m-veces la de la otra parte , está claro que ha de ser $m\leq n$

## 5. Las coordenadas del baricentro

Sea el triángulo $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ y $C(c_1, c_2)$. Entonces su baricentro tiene por coordenadas $Bar\left(\dfrac{a_1+b_1+c_1}{3}, \dfrac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$

**Demostración:**



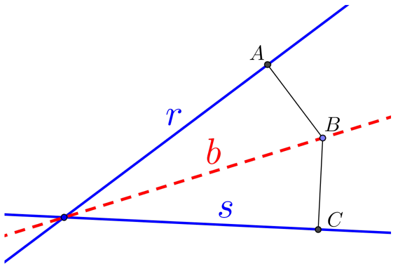

Una de las propiedades del baricentro nos indica que $\overline{ABar} = 2\cdot\overline{BarM}$, con lo cual podemos afirmar que Bar divide al segmento $\overline{AM}$ en dos partes, una de ellas el doble de la otra, es decir que $Bar = (a_1, a_2) + \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{b_1+c_1}{2} - a_1, \dfrac{b_2+c_2}{2} - a_2\right) = (a_1, a_2) + \left(\dfrac{b_1+c_1-2a_1}{3}, \dfrac{b_2+c_2-2a_2}{3}\right) \Rightarrow$ $Bar = \left(\dfrac{a_1+b_1+c_1}{3}, \dfrac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$

## 6. Mediatrices de un triángulo

La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular al mismo que pasa por su punto medio. Las mediatrices de un triángulo son cada una de las tres rectas perpendiculares a sus lados que pasan por su punto medio.

# 7. Bisectrices de un triángulo

La bisectriz de un ángulo es la recta que divide al ángulo en dos partes iguales. Las bisectrices de un triángulo son cada una de las rectas que dividen por la mitad a cada uno de sus ángulos.



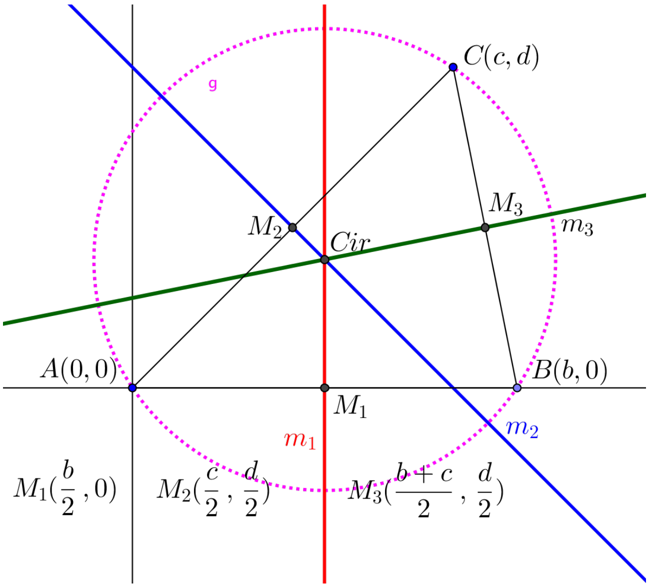

Si b es la bisectriz del ángulo de lados r y s y $B \in b$, entonces $d(B, r) = d(B, s)$ o lo que es lo mismo $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$

# 8. Teorema de las mediatrices

Las tres mediatrices de un triángulo se cortan en un punto llamado circuncentro, centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

**Demostración:**

Elejimos un sistema de referencia en donde el punto A se sitúa en el origen de coordenadas y la recta que pasa por A y B coincide con el eje de abcisas, con lo que las coordenadas de B serán $B(b,0)$. Esta configuración se muestra en la figura siguiente:




La mediatriz $m_1$ tiene como vector normal $\vec{n_1} = \overrightarrow{AB} = (b,0)$ y pasa por el punto $M_1(b,0)$, su ecuación será $bx + k = 0 \Rightarrow \frac{b^2}{2} + k = 0 \Rightarrow k = -\frac{b^2}{2}$- Por tanto $m_1 : \cancel{b}x - \frac{b^{\cancel{2}}}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{m_1 : x = \frac{b}{2}}$

La mediatriz $m_2$ tiene como vector normal $\vec{n_2} = \overrightarrow{AC} = (c,d)$ y pasa por el punto $M_2\left(\frac{c}{2}, \frac{d}{2}\right)$, su ecuación será $cx + dy + l = 0 \Rightarrow \frac{c^2}{2} + \frac{d^2}{2} + k = 0 \Rightarrow k = -\left(\frac{c^2}{2} + \frac{d^2}{2}\right)$. Por lo tanto $\boxed{m_2 : cx + dy - \left(\frac{c^2}{2} + \frac{d^2}{2}\right) = 0}$

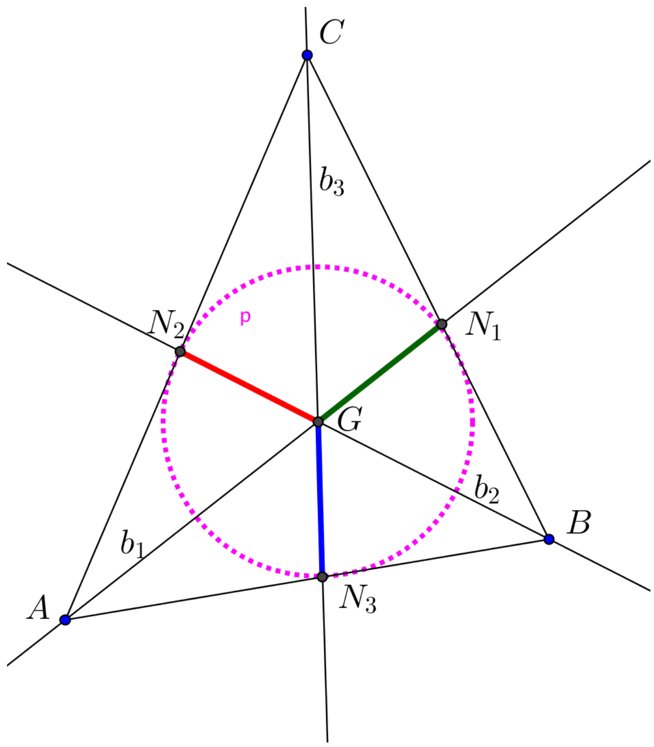
La mediatriz $m_3$ tiene como vector normal $\vec{n_3} = \overrightarrow{BC} = (c-b,d)$ y pasa por el punto $M_2\left(\frac{b+c}{2}, \frac{d}{2}\right)$, su ecuación será $(c-b)x + dy + r = 0 \Rightarrow \frac{c^2 - b^2}{2} + \frac{d^2}{2} + r = 0 \Rightarrow r =$ $= -\left(\frac{c^2-b^2}{2} + \frac{d^2}{2}\right)$. Por tanto $\boxed{m_3 : (c-b)x + dy - \left(\frac{c^2-b^2}{2} + \frac{d^2}{2}\right) = 0}$

Para calcular el punto Cir donde se cortan las medianas $m_1$ y $m_2$ resolvemos el sistema que forman sus ecuaciones $\frac{cb}{2} + dy - \left(\frac{c^2}{2} + \frac{d^2}{2}\right) = 0 \Rightarrow y = \frac{c^2}{2d} + \frac{d}{2} - \frac{cb}{2d}$. Entonces $Cir\left(\frac{b}{2}, \frac{c^2}{2d} + \frac{d}{2} - \frac{cb}{2d}\right)$. Como se puede comprobar, el punto Cir verifica la ecuación de la mediatriz $m_3$. Podemos afirmar entonces que las tres mediatrices del triángulo se cortan en Cir. A este punto se le llama circuncentro. Veamos que este punto es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo. Cualquier punto de la mediatriz de un segmento $\overline{XY}$ equidista de los puntos X e Y, esto es evidente. Luego Cir equidista de A, de B y de C, por esto es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

# 9. Teorema de las bisectrices de un triángulo

Las bisectrices de un triángulo se cortan en un punto, centro de la circunferencia inscrita al triángulo.

**Demostración:**

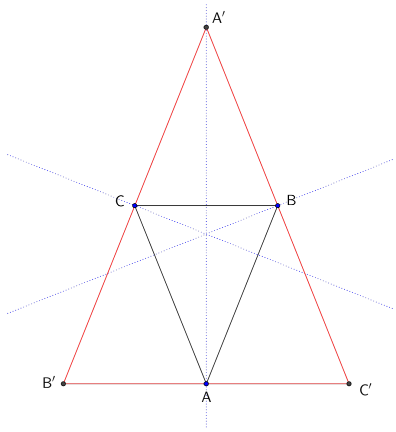



Sea G el punto de intersección de las bisectrices $b_1$ y $b_2$. Entonces $d(G, \overline{AC}) = \overline{N_2G} = d(G, \overline{AB}) = \overline{N_3G} = d(G, \overline{BC}) = \overline{N_1G}$. Hemos obtenido que $\overline{N_1G} = \overline{N_2G} = \overline{N_3G}$. Entonces G es también un punto de la bisectriz $b_3$ ya que $\overline{N_1G} = \overline{N_2G}$. Luego las tres bisectrices se contan en el punto G denominado incentro. La circunferencia que pasa por los puntos $N_1$, $N_2$ y $N_3$ y tiene como radio uno de estos tres valores (son iguales) $\overline{N_1G} = \overline{N_2G} = \overline{N_3G}$, está inscrita en el triángulo evidentemente.

# 10. Teorema de las alturas de un triángulo

Las tres alturas de un triángulo se cortan en un punto llamado ortocentro.

**Demostración:**



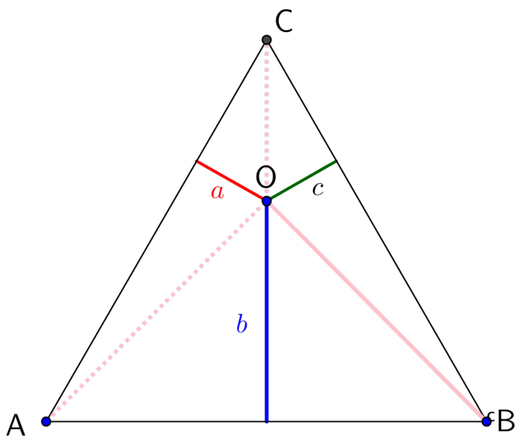

Sea el triángulo ABC tal y como indica la figura anterior. Por cada uno de sus vértices trazamos una paralela al lado opuesto. Estas rectas se cortan en los puntos A', B' y C'. Entonces los triángulos ABC y A'B'C' son semejantes, con razón de semejanza 2. Si nos fijamos en el paralelogramo de la figura CB'AB se tiene que $\overline{CB} = \overline{B'A}$. Si miramos el paralelogramo CAC'B resulta que $\overline{CB} = \overline{BAC'}$. Luego $\overline{B'C'} = \overline{B'A} + \overline{AC'} = 2 \cdot \overline{CB}$, esta claro entonces que la razón de semejanza es 2. Cada mediatriz del triángulo A'B'C' es una altura del triángulo ABC, estas mediatrices se cortan, según hemos visto, en un punto (el circuncentro de A'B'C'), este punto es el ortocentro de ABC.

# 11. Teorema de Viviani

En un triángulo equilátero la suma de las tres distancias de un punto interior a sus lados es independiente de la posición del punto, se mantiene constante y es igual a la altura del triángulo.

**Demostración:**

Sea el triángulo equilátero ABC, cuyo lado tomamos como la unidad, y sean a,b y c las distancias de un punto interior cualquiera O a los lados AC, AB y BC respectivamente. Todo esto lo expresamos en la figura siguiente:




La superficie del triángulo queda dividida en tres triángulos, a saber, AOC, AOB y BOC. La suma de estas tres superficies coincide con la del triángulo. Si h es la altura del triángulo equilátero entonces: $\dfrac{1 \cdot a}{2} + \dfrac{1 \cdot b}{2} + \dfrac{1 \cdot c}{2} = \dfrac{1 \cdot h}{2} \Rightarrow a + b + c = h$