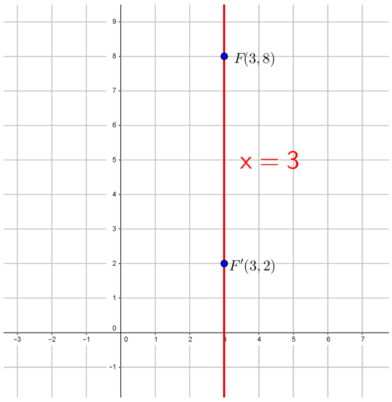
Solución al global de la 3ª Evaluación - Matemáticas I - 1ºD. 28/03/19

1. Calcula la ecuación de una elipse de la que se conocen los datos siguientes:
   - Sus focos son F'(3,2) y F (3,8)
   - La longitud de su eje menor es 8.

   Solución:

   Si dibujamos los focos, observamos que el eje mayor de la elipse está en la recta $x = 3$ (paralelo al eje de ordenadas), es decir que la ecuación de la elipse es $\dfrac{(x-\alpha)^2}{b^2} + \dfrac{(y-\beta)^2}{a^2} =$ $= 1$, siendo a el semieje mayor, b el semieje menor y $CE = (\alpha, \beta)$ el centro de la elipse.



   La distancia focal (distancia entre los focos) es $2c = d(F, F') = 6 \Rightarrow \boxed{c = 3}$

   Como el eje menor es $2b = 8 \Rightarrow \boxed{b = 4}$

   El semieje mayor vale $a^2 = b^2 + c^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \Rightarrow \boxed{a = 5}$

   El centro de la elipse es el punto medio del segmento F'F, es decir $CE = \left(\dfrac{3+3}{2}, \dfrac{8+2}{2}\right) =$ $= (3, 5)$. La ecuación de la elipse es $\dfrac{(x-3)^2}{4^2} + \dfrac{(y-5)^2}{5^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\dfrac{(x-3)^2}{16} + \dfrac{(y-5)^2}{25} = 1}$

2. Calcula el valor de k para que los puntos A (4, -1), B (- 1,2) y C(k, k + 1) estén alineados.

Solución:

Este ejercicio se puede resolver de dos formas:

a) **Utilizando la teoría de vectores**, si A,B yC están alineados entonces los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ son proporcionales, es decir $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{BC} \Rightarrow (-5,3) = \lambda(k+1, k-1)$. Luego:

$$\left.\begin{array}{c} \lambda(k+1) = -5 \\ \\ \lambda(k-1) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = \frac{-5}{k+1} = \frac{3}{k-1} \Rightarrow k = \frac{1}{4}$$

b) **Con geometría analítica:**

Si los puntos A,B y C están alineados, el punto C pertenece a la recta que determinan A y B. El vector director de esta recta es $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} = (-5,3)$, con lo que el vector normal es $\vec{V_N} = (3,5)$. La ecuación de la recta que para por A y B es $r_{AB} : 3x+5y+D = 0$, como pasa por el punto A cumple $12-5+D = 0 \Rightarrow D = -7$. Luego $r_{AB} : 3x+5y-7 = 0$. Si ahora imponemos la condición de que el punto C pertenece a esta recta $3k+5(k+1)-7 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 8k-2 = 0 \Rightarrow k = \dfrac{1}{4}$

3. Halla el valor de m para que los vectores de coordenadas $(m,1)$ y $(-2,3)$ formen un ángulo de 30º

Solución:

$\cos 30 = \dfrac{(m,1)\cdot(-2,3)}{|(m,1)|\cdot|(-2,3)|} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{-2m+3}{\sqrt{m^2+1}\cdot\sqrt{13}} \Rightarrow \sqrt{39(m^2+1)} = -4m+6$.
Elevando al cuadrado ambos mienbros de la igualdad $39(m^2+1) = 16m^2-48m+36 \Rightarrow$
$\Rightarrow 23m^2+48m+3 = 0 \Rightarrow m = \dfrac{-24 \pm 13\sqrt{3}}{23}$

4. Calcula la ecuación de la recta paralela a la recta $r : 2x+y+1 = 0$ y que pasa por el punto de intersección de las rectas $s : x-y+5 = 0$ y $t : x+y+1 = 0$

Solución:

En primer lugar calculamos el punto de intersección de las rectas s y t resolviendo el sistema:

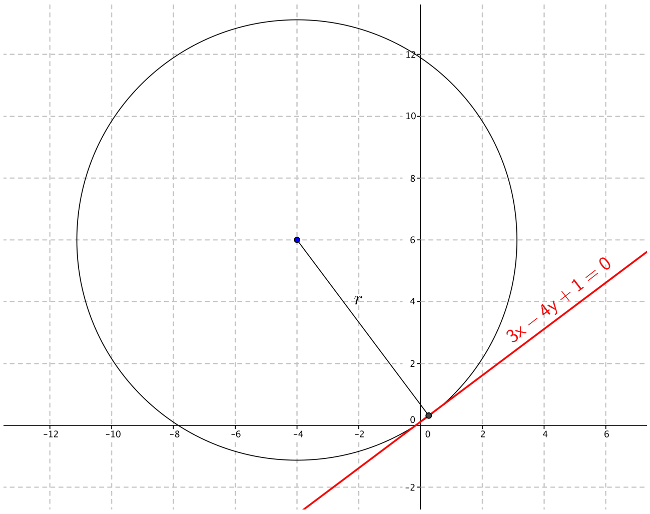
$$\left.\begin{array}{ccccccc} x & - & \cancel{y} & + & 5 & = & 0 \\ x & + & \cancel{y} & + & 1 & = & 0 \\ \hline 2x & & & + & 6 & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = -3, y = 2$$

, el punto de intersección es $(-3,2)$. Cualquier recta paralela a r es de la forma $2x+y+c = 0$. Como pasa por el punto de intersección $-6+2+c = 0 \Rightarrow c = 4$. La recta que nos piden es $2x+y+4 = 0$

5. Halla la ecuación general de la circunferencia cuyo centro es $C(-4,6)$ y que es tangente a la recta $s: 3x-4y+1=0$

Solución:

El radio es $r = d(C,s) = \dfrac{|-12-24+1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \dfrac{35}{5} = 7$. La ecuación de la circunferencia es $(x+4)^2+(y-6)^2 = 7^2 \Rightarrow x^2+8x+16+y^2-12y+36 = 49 \Rightarrow x^2+y^2+8x-12y+3 = 0$



6. Dados $A(1,a)$ y $B(5,4)$ encuentra los valores de a para que la distancia entre los puntos A y B sea 5

Solución:

$d(A,B) = 5 = \sqrt{(5-1)^2+(4-a)^2}$. Elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad $16+16-8a+a^2 = 25 \Rightarrow a^2-8a+7 = 0 \Rightarrow a = \dfrac{8\pm\sqrt{64-28}}{2} = \dfrac{8\pm 6}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow \begin{cases} \text{a=7} \\ \text{a=1} \end{cases}$

7. Encuentra la ecuación explícita de la mediatriz del segmento cuyos extremos son $A(-3,6)$ y $B(9,-4)$

Solución:

El punto medio del segmento $\overline{AB}$ es $M\left(\dfrac{-3+9}{2}, \dfrac{6-4}{2}\right) = (3,1)$. El vector normal a la mediatriz que queremos hallar es el vector $\overrightarrow{AB} = (12,-10)$ que es equipolente al vector $(6,-5)$. Por tanto la mediatriz es $6x-5y+D = 0$ y como pasa por el punto medio $18-5+D = 0 \Rightarrow D = -13$. La mediatriz que nos piden es $\boxed{6x-5y-13 = 0}$

8. Encuentra el ángulo que forman las dos rectas siguientes:

$r : x + 2y - 3 = 0$

$s : (x, y) = (1, 2) + \mu(2, -3)$

Solución:

Tenemos que poner la recta s en forma general, pasa por el punto (1,2) y tiene como vector normal $\vec{V_N} = (3, 2)$. Luego $s : 3x + 2y + C = 0$ y como pasa por (1,2) verifica $3 + 4 + C = 0 \Rightarrow C = -7 \Rightarrow s : 3x + 2y - 7 = 0$. Si α es el ángulo que forman las rectas r y s entonces $\cos\alpha = \dfrac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 2}{\sqrt{1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{3^2 + 2^2}} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{7}{\sqrt{65}} \Rightarrow \alpha = \arccos\dfrac{7}{\sqrt{65}} \simeq 29{,}74^{\text{o}}$