Solución al examen de la 2ª Evaluación del día 14-03-2019

1. Dados los punlos $A(-3,3)$, $B(5,1)$ y $C(3,-5)$, calcula las coordenadas de un puto D de forma que ABCD sea un paralelogramo.

   Solución:

   Si ABCD es un paralelogramo entonces se da la igualdad siguiente $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Si $D(x,y)$ entonces $(x-3, y+5) = (8,-2)$, con lo que:

   $$\left\{ \begin{array}{ccc} x-3=8 & \Rightarrow & x=11 \\ y+5=-2 & \Rightarrow & y=-7 \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{\text{El punto D es } D(11,-7)}$$

2. Sea $\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ una base de V^2 que cumple las siguientes condiciones:

   $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 2$, $\vec{u}\cdot\vec{v} = -5$

   Si $\vec{x} = (-2,3)$ e $\vec{y} = (3,-1)$ respecto de la base $\mathcal{B}$, calcula el producto escalar de los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$

   Solución:

   $\vec{x} = -2\vec{u} + 3\vec{v}$, $\vec{y} = 3\vec{u} - \vec{v}$. Por lo tanto $\vec{x}\cdot\vec{y} = (-2\vec{u}+3\vec{v})\cdot(3\vec{u}-\vec{v})$, desarrollando esta expresión obtenemos $\vec{x}\cdot\vec{y} = -6\cdot\vec{u}\cdot\vec{u} + 2\cdot\vec{u}\cdot\vec{v} + 9\cdot\vec{v}\cdot\vec{u} - 3\cdot\vec{v}\cdot\vec{v} = -6\cdot\vec{u}\cdot\vec{u} + 11\cdot\vec{u}\cdot\vec{v} - 3\cdot\vec{v}\cdot\vec{v}$. Como $\vec{u}\cdot\vec{u} = 3\cdot 3\cdot cos0 = 9$, $\vec{v}\cdot\vec{v} = 2\cdot 2\cdot cos0 = 4$ y además $\vec{u}\cdot\vec{v} = -5$:

   $$\boxed{\vec{x}\cdot\vec{y} = -6\cdot 9 + 11\cdot(-5) - 3\cdot 4 = -121}$$

3. a) Encuentra la ecuación de lo recta paralela a $r: 3x+y-2=0$, y que pasa por el punto $A(2,-3)$.

   b) Dada la recta $r: 2x-y+4=0$, halla la recta perpendicular a ella que pasa por el punto $A(-3,1)$

   Solución:

   a) La recta paralela es $s: 3x+y+C=0$, como pasa por $A(2,-3) \Rightarrow 6-3+C=0 \Rightarrow C=-3$. La solución es $\boxed{s: 3x+y-3=0}$

   b) En forma explícita la recta es $r: y = 2x+4 \Rightarrow m = 2$. La pendiente de la perpendicular es $m' = \dfrac{-1}{m} = \dfrac{-1}{2}$. La perpendicular es entonces $s: y = \dfrac{-1}{2}x + n$. Como pasa por el punto $A(-3,1) \Rightarrow 1 = \dfrac{3}{2} + n \Rightarrow n = \dfrac{-1}{2}$. La perpendicular es $\boxed{s: y = \dfrac{-1}{2}x - \dfrac{1}{2}}$

4. Encucnlra la ecuación del haz al que pcncnecen las rectas cuyas ecuaciones son:

   $r : y = 3x - 2 \qquad s : y = 4x - 4$

   Solución:

   Evidentemente estas rectas no son paralelas (tienen distinta pendiente). Se cortan en el punto $4x - 4 = 3x - 2 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 4$. El vértice del haz es el punto $(3, 4)$ y el haz es $y - 4 = m(x - 2)$ siendo m el valor de la pendiente.

5. Calcula el valor de a para que la distancia del punto $A(a, 7)$ a la recta $y = 4x - 9$ sea igual a $\dfrac{28}{\sqrt{17}}$

   Solución:

   Para manejar la fórmula de la distancia de un punto a una recta, la ecuación de la recta ha de estar en forma general. La ecuación general de la recta es $r : 4x - y - 9 = 0$. La distancia del punto a la recta será $d(A, r) = \dfrac{|4a - 7 - 9|}{\sqrt{4^2 + (-1)^2}} \Rightarrow \dfrac{28}{\cancel{\sqrt{17}}} = \dfrac{|4a - 16|}{\cancel{\sqrt{17}}} \Rightarrow |4a - 16| = 28$.

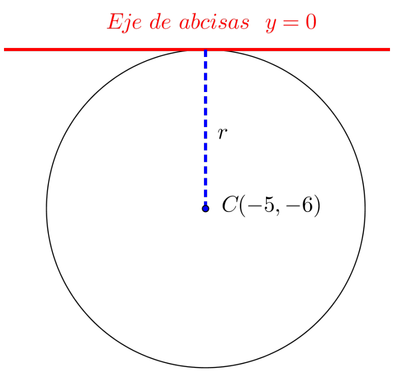
   Se pueden dar dos posibilidades:

   a) $4a - 16 = 28 \Rightarrow a = 11$

   b) $4a - 16 = -28 \Rightarrow a = -3$

6. Halla la ecuación general de la circunferencia que es tangente al eje de abscisas y cuyo centro es $C(-5, -6)$.

   Solución:



   El eje de abcisa tiene por ecuación $s : y = 0$, el radio de la circunferencia es la distancia del centro C a la recta $s : y = 0$, es decir $r = \dfrac{|-6|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = 6$. Entonces $a = -5 \Rightarrow A = -2a =$ $= 10$, $b = -6 \Rightarrow B = -2b = 12$ y $C = a^2 + b^2 - r^2 = (-5)^2 + \cancel{(-6)^2} - \cancel{6^2} = 25$. Por tanto la ecuación de la circunferencia es $\boxed{x^2 + y^2 + 10x + 12y + 25 = 0}$.

7. Encuentra la ecuación general de la circunferencia de radio 6 y que es concéntrica con la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0$

   Solución:

   $A = -2a = -6 \Rightarrow a = 3$, $B = -2b = 2 \Rightarrow b = -1$. Nos piden hallar la ecuación de la circunferencia de centro $C(3, -1)$ y radio $r = 6$. Los coeficientes de esta circunferencia serán $A = -2a = -6$, $B = -2b = 2$ y $C = a^2 + b^2 - r^2 = 3^2 + (-1)^2 - 6^2 = -26$. La ecuación de la circunferencia que nos piden es $\boxed{x^2 + y^2 - 6x + 2y - 26 = 0}$.

8. Calcula el centro, los focos y los vértices de la elipse cuya ecuación es la siguiente:

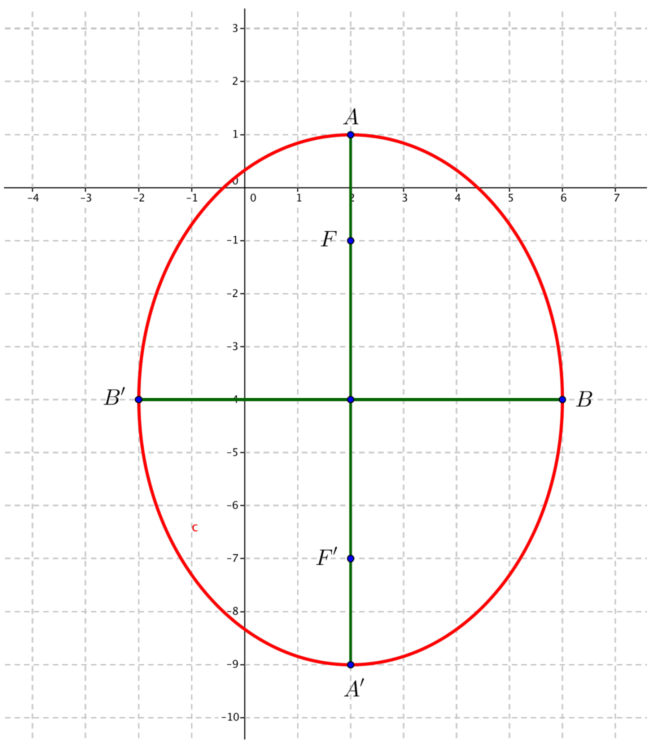
$$\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+4)^2}{25} = 1$$

   Solución:

   El centro está en el punto $(2, -4)$, además $a^2 = 25 \Rightarrow a = \pm 5$, $b^2 = 16 \Rightarrow b = \pm 4$, $c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = 9 \Rightarrow c = \pm 3$

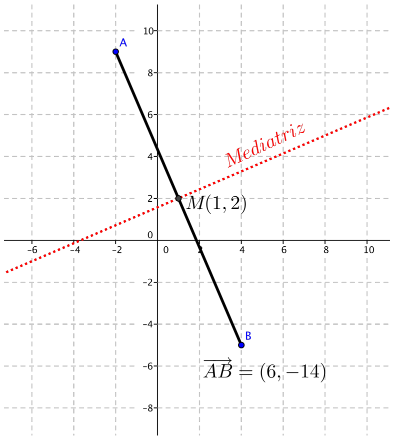
$$\text{Focos} \left\{ \begin{array}{l} F = (2,-4) + (0,3) = (2,-1) \\ F' = (2,-4) + (0,-3) = (2,-7) \end{array} \right.$$

$$\text{Vértices} \left\{ \begin{array}{l} A = (2,-4) + (0,5) = (2,1) \\ A' = (2,-4) + (0,-5) = (2,-9) \\ B = (2,-4) + (4,0) = (6,-4) \\ B = (2,-4) + (-4,0) = (,2,-4) \end{array} \right.$$



9. Calcula la ecuación de la mediatriz del segmento cuyos extremos son los puntos de coordenadas $A(-2, 9)$ y $B(4, -5)$

Solución:



La mediatriz del segmento es la perpendicular a este que pasa por su punto medio. El vector $\overrightarrow{AB} = (6, -14)$ es perpendicular a la mediatriz evidentemente, podemos tomar este vector como vector normal a la mediatriz. El punto medio del segmento $\overline{AB}$ es $M = \left(\dfrac{4-2}{2}, \dfrac{-5+9}{2}\right) = = (1, 2)$. Entonces la ecuación de la mediatriz es $6x - 14y + C = 0$ y como pasa por el punto $M = (1, 2) \Rightarrow 6 - 14 + C = 0 \Rightarrow C = 8$. $\boxed{\text{La mediatriz es la recta } 6x - 14y + 8 = 0 \Rightarrow 3x - 7y + 4 = 0}$.