

El descenso infinito es una técnica de demostración (desconocida y muy poco usada) que inventó Pierre de Fermat y que se basa en el principio de buena ordenación en los números naturales, todo subconjunto $A \subset \mathbb{N}$ de números naturales tiene un mínimo, es decir $\exists \alpha \in \mathbb{N}$ tal que $\forall x \in A \Rightarrow \alpha \leq x$. Está claro que este valor α es el mínimo del subconjunto A. El método de descenso infinito dice que si una propiedad que depende del número natural n $P = P(n)$ se verifica para $n=k$ y a partir de aquí demostramos que también se verifica para $n=l$, siendo $l < k$ y así sucesivamente, es decir que se cumple para un valor siempre menor que el que hayamos verificado, entonces la propiedad P es falsa. La lógica es que si A es el subconjunto de números naturales en donde se verifica P, este ha de tener un mínimo, siendo imposible entonces que siempre (descenso infinito) podamos encontrar una solución menor. Veamos un ejemplo para ilustrar una demostración por descenso infinito.

Propiedad: La ecuación $x^3 + y^3 + z^3 = 2xyz$, siendo $x, y, z \in \mathbb{N}$ no tiene solución,

Demostración:

Supongamos que la ecuación tuviera solución x, y, z . Sea A el conjunto de las soluciones de la ecuación, sabemos que A tiene un mínimo. Observamos que tanto x^3 como y^3 como z^3 deben ser números pares. Ello obliga a que x, y, z sean números pares. Si un número al cubo r^3 es par ese número ha de ser par, ya que si no lo fuera $r = 2k + 1 \Rightarrow r^3 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 = 2(4k^3 + 6k^2 + 3k) + 1$, es decir r^3 sería impar, lo cual es una contradicción. Podemos poner entonces que $x = 2a, y = 2b, z = 2c$, con lo que la ecuación $x^3 + y^3 + z^3 = 2xyz$ se transforma en $8a^3 + 8b^3 + 8c^3 = 16abc \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 2abc$, habríamos encontrado una solución con valores menores que la solución primigenia. Si volvemos a reiterar el proceso llegamos a un descenso infinito que contradice que A tenga un mínimo. Luego la propiedad es falsa.

Andrew Wiles demostró el Último Teorema de Fermat (no existen números naturales $x, y, z \in \mathbb{N}$ que verifique la ecuación $x^n + y^n = z^n$, siendo $n \geq 3$) con métodos de la Geometría Algebraica, utilizando funciones elípticas. Sigue existiendo el reto de demostrar el citado teorema con los métodos de la teoría de números, pues de ser cierto que Fermat demostró este teorema los habría tenido que utilizar. Circula una supuesta demostración del teorema en la que se utiliza el descenso infinito, a pesar del empecinamiento de su autor parece que tiene fallos.