TEMA 4 - CONTRASTE DE HIPÓTESIS

Los contrastes de hipótesis son técnicas diseñadas para crear reglas de decisión sobre si se acepta o se rechaza cierta hipótesis que afecta a una v.a.

Para afianzar y aclarar mejor el concepto de contraste de hipótesis veamos un ejemplo: supongamos que nos enfrentamos a quien en adelante será llamado "oponente" en el siguiente juego: el oponente proporciona una moneda que se lanza al aire, ganando él si sale cara y nosotros si sale cruz. Sospechamos que el oponente no es de fiar, la moneda puede estar cargada de modo que la probabilidad de sacar cara es superior a la de sacar cruz. Solicitamos, antes de aceptar el juego, probar la moneda 100 veces y decidir, a partir de los resultados obtenidos, si el oponente es o no fullero.

Planteamos la siguiente hipótesis:

Sea p = probabilidad de obtener cara

$$H_0: p \leq \frac{1}{2}$$

$$H_1: p > \frac{1}{2}$$

Si rechazamos la hipótesis nula (observando el fenómeno en la muestra) el oponente es fullero y no debemos jugar. Si no rechazamos la hipótesis nula parece que la moneda "está limpia" y existe la misma probabilidad de sacar cara que de sacar cruz.

Hay que tener en cuenta que un contraste de hipótesis no es una demostración irrefutable, solo establece si la hipótesis concuerda con los datos de la muestra, siempre lleva asociada una posibilidad de error. La decisión a la que nos lleva un test puede estar equivocada y esa posibilidad hay que cuantificarla.

Conceptos básicos

- Hipótesis: es una conjetura a cerca de la distribución

de una variable aleatoria. Puede venir en términos de la distribución en sí o bien referida a un parámetro de la misma. Si la hipótesis se refiere a un parámetro el contraste se llama paramétrico y si la hipótesis se refiere a la distribución en sí el contraste se dice no paramétrico.
En este tema vamos a estudiar contrastes paramétricos.
Supongamos que una v.a. se distribuye con función de densidad $f_\theta(x)$ o con función de probabilidad $P_\theta(x)$.
Si Π es el espacio paramétrico de θ, plantear una hipótesis sobre θ consiste en seleccionar un subconjunto $\Pi_0 \subset \Pi$ tal que $\theta \in \Pi_0$. La hipotesis sería $H_0: \theta \in \Pi_0$
A esta hipótesis H_0 se le llama hipótesis nula y hemos de decidir su aceptación o su rechazo. La hipótesis contraria a la hipótesis nula, llamada hipótesis alternativa, es:
$H_1: \theta \in \Pi_1$ donde $\Pi_1 = \Pi - \Pi_0 = \Pi_0^c = \overline{\Pi_0}$. Aceptar o rechazar H_0 equivale a rechazar o aceptar H_1. Se puede poner $\Pi = \Pi_0 \cup \Pi_1$, $\Pi_0 \cap \Pi_1 = \emptyset$.

Si acepto $H_0 \Rightarrow$ rechazo H_1
Si acepto $H_1 \Rightarrow$ rechazo H_0

Tipos de hipótesis

Hay dos tipos de hipótesis: simples y compuestas.
Diremos que una hipotesis es simple si especifica completamente los parámetros de la población. Por ejemplo si $X \rightsquigarrow N(\mu, 4)$ la hipótesis $H_0: \mu = 7$ es simple, pues identifica completamente la población en la que se distribuye X.
Una hipótesis es compuesta si no es simple, es decir si la hipótesis no identifica completamente los parámetros de la población. Por ejemplo, si $X \rightsquigarrow N(\mu, \sigma)$, la hipótesis $\mu = 7$ es compuesta ya que en $N(7, \sigma)$ no se especifican todos los parámetros de la distribución.

Test o contraste de hipótesis

Es una regla que nos indica cuando hemos de rechazar la hipotesis nula formulada. Para ello son fundamentales los estadísticos muestrales. Para formular la regla de decisión se toma cierto estadístico $T(X_1, X_2, \dots X_n)$ y a partir de él se establece la región crítica.

Región Crítica o de Rechazo

Sea el contraste de hipótesis

$H_0 : \theta \in \Pi_0$

$H_1 : \theta \in \Pi_1$

Vamos a hacer una observación para todo lo que sigue. Como decíamos anteriormente, un contraste de hipótesis dista mucho de ser una demostración, sus conclusiones siempre están sujetas a un margen de error. Por eso debemos ser muy cautos, la hipótesis nula se rechaza (RH_0) o no se rechaza ($\cancel{RH_0}$), debemos evitar el decir que se acepta H_0. Si lo decimos, si expresamos "aceptar H_0" nos referimos a que la aseveración no es categórica, está sujeta a error.

Si $T(X_1, X_2, \dots X_n)$ es el estadístico de contraste del test anterior entonces la región crítica es:

$$C = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / RH_0\} = \{(x_1, x_2, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n /$$

$$/ T(x_1, x_2, \dots x_n) \text{ cumple una determinada condición}\}$$

Tipos de error

Al decidir, mediante la regla de rechazo, rechazar o no la hipótesis nula, podemos cometer dos tipos de errores.

		REALIDAD DESCONOCIDA	
DECISIÓN		H_0 ES VERDADERA	H_0 ES FALSA
	RH_0	ERROR DE TIPO I	DECISIÓN CORRECTA
	$\cancel{RH_0}$	DECISIÓN CORRECTA	ERROR DE TIPO II

Función de potencia de un test

Mide la probabilidad de rechazar la hipótesis nula. Se le representa por $\beta(\theta)$ y se define como:

$\beta(\theta) = P_\theta(RH_0)\ \forall\ \theta \in \Pi$. Como $\Pi = \Pi_0 \cup \Pi_1$ y $\Pi_0 \cap \Pi_1 = \emptyset$, si $\theta \in \Pi \Rightarrow \begin{cases} \theta \in \Pi_0 \\ \text{ó} \\ \theta \in \Pi_1 \end{cases}$

- Si $\theta \in \Pi_0 \Rightarrow \beta(\theta) = P_\theta(RH_0) = P(RH_0 / H_0 \text{ es cierta}) \Rightarrow$

$\beta(\theta) = P[\text{Error tipo I}]$

- Si $\theta \in \Pi_1 \Rightarrow \beta(\theta) = P_\theta(RH_0) = P[RH_0 / H_0 \text{ es falsa}] \Rightarrow$

$\Rightarrow \beta(\theta) = 1 - P[\cancel{R}H_0 / H_0 \text{ es falsa}] = 1 - P[\text{Error tipo II}]$

Resumiendo, la función de potencia del test es:

$$\beta(\theta) = \begin{cases} P[\text{error de tipo I}] & \text{si } \theta \in \Pi_0 \\ 1 - P[\text{error de tipo II}] & \text{si } \theta \in \Pi_1 \end{cases}$$

Observación: extremo superior o supremo de un conjunto

Sea $H \subset \mathbb{R}$ un conjunto. Se dice que K es una cota superior de H si $\forall x \in H \Rightarrow x \leq K$. El extremo superior o supremo de H, $\sup H$, es la menor de las cotas superiores de H.

Tamaño de un test o nivel de significación

El nivel de significación de un test es la máxima probabilidad de cometer un error de tipo I

$$\alpha = \sup_{\theta \in \Pi_0} \beta(\theta) = \sup_{\theta \in \Pi_0} P[\text{error de tipo I}]$$

¿Cuál es el mejor test?

El mejor test se busca:

1º Acotando su tamaño α por un cierto valor lo más pequeño posible que nos parezca adecuado

2º Minimizando $P_{\theta \in H_1}$ (error de tipo II) $\Rightarrow$ maximizando la potencia.

Un buen test se conseguiría

* Minimizando la probabilidad de cometer error de tipo I

Y

* Minimizando la probabilidad de cometer error de tipo II

pero esto es imposible ya que:

min $P_{\theta \in H_0}$ [error de tipo I] = minimizar $\beta(\theta)$

min $P_{\theta \in H_1}$ [error tipo II] = $1-\beta(\theta) \Rightarrow$ maximizar $\beta(\theta)$

No se puede minimizar y maximizar $\beta(\theta)$ a la vez.

Test uniformemente más potente (test u.m.p.)
Sea α una constante prefijada de antemano, verificando $0 < \alpha < 1$.
Consideremos el contraste de H_0 frente H_1

$H_0: \theta \in \Pi_0$
$H_1: \theta \in \Pi_1$ con función de potencia $\beta(\theta)$ y región crítica C.
Este test es el contraste u.m.p. de tamaño α si verifica:
1º Su tamaño es menor o igual que α
2º Cualquier otro contraste para la misma hipótesis y tamaño $\leq \alpha$ con función de potencia $\beta'(\theta)$ verifica que $\beta'(\theta) \leq \beta(\theta) \quad \forall \theta \in \Pi$

El test u.m.p es el mejor test

Un tipo especial de hipótesis simple
Sea el contraste de hipótesis
$H_0: \theta = \theta_0$
$H_1: \theta = \theta_1$
En este caso $\Pi_0 = \theta_0$, $\Pi_1 = \theta_1$ y por tanto el espacio paramétrico es $\Pi = \Pi_0 \cup \Pi_1 = \{\theta_0, \theta_1\}$. La función de potencia $\beta(\theta)$ toma tan solo dos valores:

$$\beta(\theta) = \begin{cases} \beta(\theta_0) & \text{si } \theta \in \Pi_0 \Rightarrow \text{tamaño} = \alpha = \beta(\theta_0) = P[\text{error tipo I}] \\ \beta(\theta_1) & \text{si } \theta \in \Pi_1 \Rightarrow 1 - P(\text{error tipo II}) = \beta(\theta_1) \Rightarrow P[\text{error tipo II}] = 1 - \beta(\theta_1) \end{cases}$$

El test u.m.p. de tamaño α verificará que su tamaño es menor que α y su potencia será la mayor de todos, es decir que el test u.m.p. en este caso verifica que $\beta_0 \leq \alpha$ y si otro contraste con la misma hipótesis verifica que su potencia $\beta'(\theta) \leq \alpha$ entonces $\beta'(\theta) \leq \beta(\theta) \quad \forall\, \theta \in H_1$

Vamos a ver a continuación un método para obtener región crítica y estadístico de contraste para un contraste de hipótesis: el criterio basado en el cociente de verosimilitudes.

Lema de Neyman-Pearson

Sea X una variable aleatoria que se distribuye con función de densidad $f_\theta(x)$ o con función de probabilidad $P_\theta(x)$. Queremos contrastar:

$H_0: \theta = \theta_0$

$H_1: \theta = \theta_1$

Tomamos una muestra aleatoria simple $X_1, X_2, \dots X_n$.

Un test con región crítica C es el test u.m.p. de tamaño α si cumple:

a) Su tamaño es exactamente α

$$\beta_0 = \beta(\theta_0) = P_{\theta_0}[(x_1, x_2 \dots x_n) \in C] = \alpha$$

b) Existe una constante K tal que:

$$\Lambda_C(x_1, x_2, \dots x_n) = \frac{L_{\theta_0}(x_1, x_2, \dots x_n)}{L_{\theta_1}(x_1, x_2, \dots x_n)} \leq K \quad \forall (x_1, x_2 \dots x_n) \in C$$

$$\Lambda_C(x_1, x_2, \dots x_n) = \frac{L_{\theta_0}(x_1, x_2, \dots x_n)}{L_{\theta_1}(x_1, x_2, \dots x_n)} \geq K \quad \forall (x_1, x_2, \dots x_n) \notin C$$

Si X es una v.a. continua, siempre existen K y α y por tanto existe el test **u.m.p**

Si X es una v.a. discreta no siempre existen K y α por

lo que no podemos garantizar que exista el test u.m.p.
Los pasos a seguir para construir el test u.m.p. utilizando el lema de Neyman-Pearson son:
1º Construir un contraste con región crítica

$$C = \{ (x_1, x_2, \dots x_n) \, / \, \Lambda_c (x_1, x_2, \dots x_n) \leq K \}$$

2º Hemos de tener en cuenta también que:

$$P_{\theta_0} [(x_1, x_2, \dots x_n) \in C] = P[\Lambda_c(x_1, x_2, \dots x_n) \leq k] = \alpha$$

Veamos un ejemplo.

Ejemplo
Sea $X \leadsto N(\theta, 1)$. Encontrar el test u.m.p. de tamaño n para contrastar:

$$H_0 : \theta = \theta_0 \qquad \theta_0 > \theta_1$$
$$H_1 : \theta = \theta_1$$

Solución:
La función de densidad de $N(\theta, 1)$ es

$f_\theta(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-\theta)^2}$ de modo que la función

de verosimilitud es $L_\theta (x_1, x_2, \dots x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$

$$L_\theta (x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x_i-\theta)^2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \cdot e^{-\frac{1}{2}\sum (x_i-\theta)^2}$$

El cociente de verosimilitudes es:

$$\Lambda_c (x_1, x_2, \dots x_n) = \frac{L_{\theta_0} (x_1, x_2, \dots x_n)}{L_{\theta_1} (x_1, x_2, \dots x_n)} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \cdot e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_0)^2}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \cdot e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_1)^2}}$$

$$\Lambda_c (x_1, x_2, \dots x_n) = e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[(x_i-\theta_0)^2 - (x_1-\theta_1)^2]} \leq K$$

Si tomamos logaritmos neperianos:

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[(x_i-\theta_0)^2-(x_i-\theta_1)^2\right] \leq \ln K$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\cancel{x_i^2}-2\theta_0 x_i+\theta_0^2-\cancel{x_i^2}+2\theta_1 x_i-\theta_1^2 \leq \ln K$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[2(\theta_0-\theta_1)x_i+(\theta_1^2-\theta_0^2)\right] \leq \ln K$$

$$\sum_{i=1}^{n}(\theta_0-\theta_1)x_i+\frac{1}{2}n\cdot(\theta_1^2-\theta_0^2) \leq \ln K$$

$$(\theta_0-\theta_1)\sum_{i=1}^{n}x_i \leq \ln K-\frac{1}{2}n(\theta_1^2-\theta_0^2)$$

Como $\theta_0 > \theta_1 \Rightarrow \theta_0-\theta_1>0$, por tanto

$$\sum_{i=1}^{n}x_i \leq \frac{\ln K-\frac{1}{2}n(\theta_1^2-\theta_0^2)}{\theta_0-\theta_1}$$ y si dividimos por n

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n} \leq \frac{\ln K-\frac{1}{2}n(\theta_1^2-\theta_0^2)}{n(\theta_0-\theta_1)}$$, es decir:

$$\bar{x} \leq \frac{\ln K-\frac{1}{2}n(\theta_1^2-\theta_0^2)}{n\cdot(\theta_0-\theta_1)}$$ (a esta expresión le llamamos K')

Luego la región crítica es:

$$C=\left\{(x_1,x_2,\dots x_n)\in\mathbb{R}^n \,/\, \bar{x}\leq K'\right\}$$

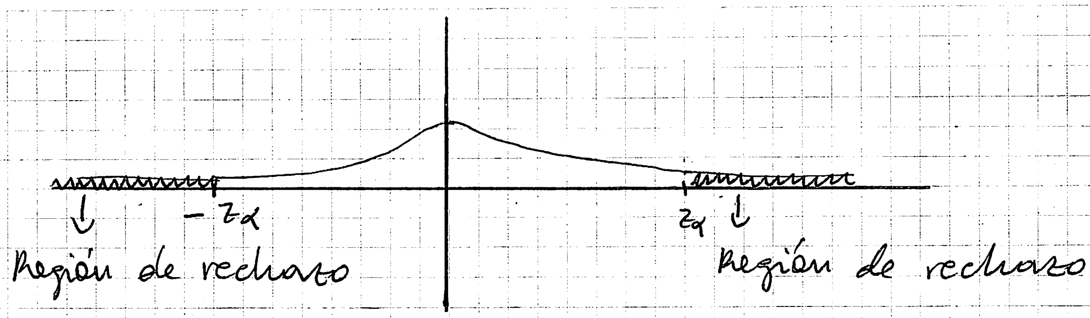
Si α es el tamaño del test:

$$P_{\theta_0}\left[(x_1,x_2,\dots x_n)\in C\right]=\alpha \Rightarrow P_{\theta_0}\left[\bar{x}\leq K'\right]=\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left[\bar{x}\leq K'\right]=\alpha$$ siendo $\bar{x} \rightsquigarrow N\left(\underset{\substack{\downarrow \\ \text{porque } \theta=\theta_0}}{\theta_0},\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Si $\bar{x}\rightsquigarrow N\left(\theta_0,\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow Z=\dfrac{\bar{x}-\theta_0}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \rightsquigarrow N(0,1)$

Si $P[\bar{x}\leq K']=\alpha \Leftrightarrow P\left(Z\leq\dfrac{K'-\theta_0}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)=\alpha$



$$P\left[z \leq \frac{k' - \theta_0}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right] = \alpha \Rightarrow \frac{k' - \theta_0}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = -z_\alpha \Rightarrow k' = \theta_0 - \frac{z_\alpha}{\sqrt{n}}$$

Luego la región crítica es:

$$C = \left\{ (x_1, x_2, \dots x_n) \;/\; \overline{X} \leq \theta_0 = z_\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \right\}$$

Ejemplo:

a) En una población que se distribuye normalmente con media μ y varianza 1, se intenta contrastar:

$H_0: \quad \mu = 0$

$H_1: \quad \mu = 1$

a un tamaño del 5%. Determinar el test u.m.p.

Solución:

$X \rightsquigarrow N(\mu, 1)$, la función de densidad de esta variable aleatoria es:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2}$$

Si tomamos una m.a.s. $x_1, x_2, \dots x_n$ la función de verosimilitud es:

$$L_\mu(x_1, x_2, \dots x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x_i-\mu)^2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \cdot e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

El cociente de verosimilitudes es:

$$\Lambda_C(x_1, x_2, \dots x_n) = \frac{L_{\mu=0}(x_1, x_2, \dots x_n)}{L_{\mu=1}(x_1, x_2, \dots x_n)} = \frac{\cancel{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n} \cdot e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}{\cancel{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n} \cdot e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-1)^2}}$$

$$\Lambda_C(x_1,x_2,\dots x_n) = e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[x_i^2-(x_i-1)^2]} \leq k.$$

Si tomamos ln:

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\cancel{x_i^2}-\cancel{x_i^2}+2x_i-1) \leq \ln k$$

$$-\sum_{i=1}^{n}x_i + \frac{n}{2} \leq \ln k \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}x_i \geq -\ln k + \frac{n}{2} \quad y$$

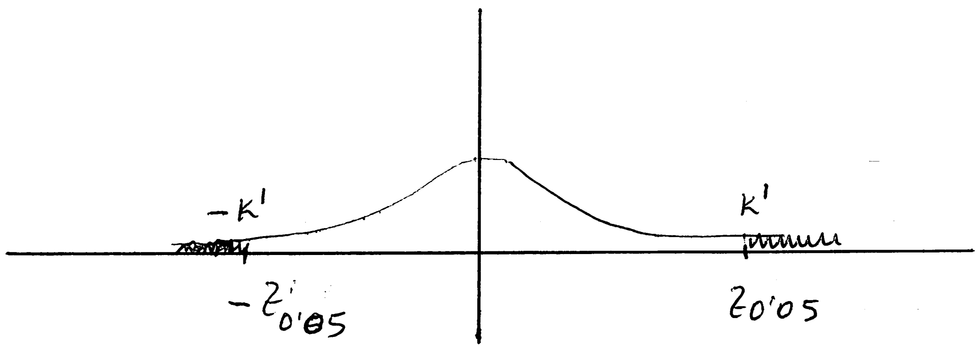
si dividimos por n: $\bar{x} > \dfrac{\frac{n}{2}-\ln k}{n} = k'$

Luego la región crítica es:

$$C = \{(x_1,x_2,\dots x_n)\in \mathbb{R}^n \ / \ \bar{x} \geq k'\}$$

Ha de ser:

$$P_{\mu=0}[(x_1,x_2,\dots x_n)\in C] = 0'05 \Rightarrow \underset{\mu=0}{P}[\bar{x}>k'] = 0'05$$



Según el lema de Fisher $\bar{x} \rightsquigarrow N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = N(0, \frac{1}{\sqrt{n}})$

Por tanto:

$$P_{\mu=0}[\bar{x}\geq k'] = 0'05 \Rightarrow P_{\mu=0}\left[\frac{\bar{x}-0}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \geq \frac{k'-0}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right] = 0'05$$

Como $z = \dfrac{\bar{x}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \rightsquigarrow N(0,1) \Rightarrow \dfrac{k'}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = z_{0'05} \Rightarrow k' = \dfrac{z_{0'05}}{\sqrt{n}}$

Luego la región crítica es:

$$C = \{(x_1,x_2,\dots x_n) \ / \ \bar{x} > \frac{z_{0'05}}{\sqrt{n}}\} \qquad z_{0'05} = 1'65$$

$$C = \{(x_1,x_2,\dots x_n) \ / \ \bar{x} > \frac{1'65}{\sqrt{n}}\}$$

b) Decidir si se puede aceptar que $\mu = 0$, sabiendo que disponemos de una m.a.s de tamaño $n = 5$ con los siguientes valores $(3, 1, -2, -5, 4)$

$\bar{x} = \dfrac{3+1-2-5+4}{5} = 0'2 \Rightarrow (3,1,-2,-5,4) \notin C$ ya que $0'2 \not> 0'73 = \dfrac{1'65}{\sqrt{5}}$. Por lo tanto no podemos rechazar la hipotesis nula aceptando con una confianza del 95% que $\mu = 0$.

c) Calcular la probabilidad de cometer error de tipo II

$P[\text{error de tipo II}] = P[\cancel{R H_0} / H_0 \text{ es falsa}] =$

$= P_{\mu=1}[(x_1, x_2, \dots x_n] \notin C]$

Como $n = 5$ y $C = \{(x_1, x_2 \dots x_n) / \bar{x} > \frac{1'65}{\sqrt{n}}\}$

en este caso:

$C = \{(x_1, x_2, \dots x_n) / \bar{x} > 0'73\}$

Por tanto

$P[\text{error tipo II}] = \underset{\mu=1}{P}[\bar{x} \leq 0'73]$ $\quad \bar{x} \rightsquigarrow N(1, \frac{1}{\sqrt{5}})$

$z = \dfrac{\bar{x} - 1}{\frac{1}{\sqrt{5}}}$. Entonces:

$P[\text{error tipo II}] = P\left[z \leq \dfrac{0'73 - 1}{\frac{1}{\sqrt{5}}}\right] = P[z \leq -0'58]$

$= P[z \geq 0'58] = 1 - P(z \leq 0'58] = 1 - 0'7190 = 0'281$

d) Expresar la función potencia

$$\beta(\mu) = \begin{cases} P[\text{error tipo I}] = \text{tamaño} = 0'05 & \text{Si } \mu = 0 \\ 1 - P[\text{error tipo II}] = 1 - 0'281 = 0'7190 & \text{Si } \mu = 1 \end{cases}$$

Ejercicio:
Hallar el test u.m.p. para el contraste

$H_0: \mu = 10$

$H_1: \mu = 8$

Sabiendo que la v.a. es $X \rightsquigarrow N(\mu, 3)$, si se toman muestras de tamaño $n = 2$ y el tamaño del test es $\alpha = 0'05$. Obtener también la potencia del contraste.

La función de densidad de $X \rightsquigarrow N(\mu, 3)$ es:

$$f(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{3^2}} = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{18}(x-\mu)^2}$$

Si tomamos una m.a.s. $X_1, X_2, \dots X_n$ la función de verosimilitud es:

$$L_\mu(x_1, x_2, \dots x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{18}(x_i-\mu)^2} = \left(\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}\right)^n \cdot e^{-\frac{1}{18}\sum(x_i-\mu)^2}$$

La función cociente de verosimilitudes es:

$$\Lambda_c(x_1, x_2, \dots x_n) = \frac{L_{\mu=10}(x_1, x_2, \dots x_n)}{L_{\mu=8}(x_1, x_2, \dots x_n)} = \frac{\left(\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}\right)^n \cdot e^{-\frac{1}{18}\sum(x_i-10)^2}}{\left(\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}\right)^n \cdot e^{-\frac{1}{18}\sum(x_i-8)^2}}$$

$$\Lambda_c(x_1, x_2, \dots x_n) = e^{-\frac{1}{18}\sum_{i=1}^{n}\left[(x_i-10)^2 - (x_i-8)^2\right]} \leq K$$

Si tomamos ln

$$-\frac{1}{18}\sum_{i=1}^{n}(\cancel{x_i^2} - 20x_i + 100 - \cancel{x_i^2} + 16x_i - 64) \leq \ln k$$

$$4\sum x_i - 36n \leq 18\ln k \Rightarrow 4\sum_{i=1}^{n} x_i \leq 18\ln k + 36n$$

Si dividimos por $2n$:

$$2\bar{x} \leq \frac{9\ln k + 18n}{n} \Rightarrow \bar{x} \leq \frac{9\ln k + 18n}{2n} = k'$$

Luego la región crítica es:

$$C = \{(x_1, x_2, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ \bar{x} \leq k'\}$$

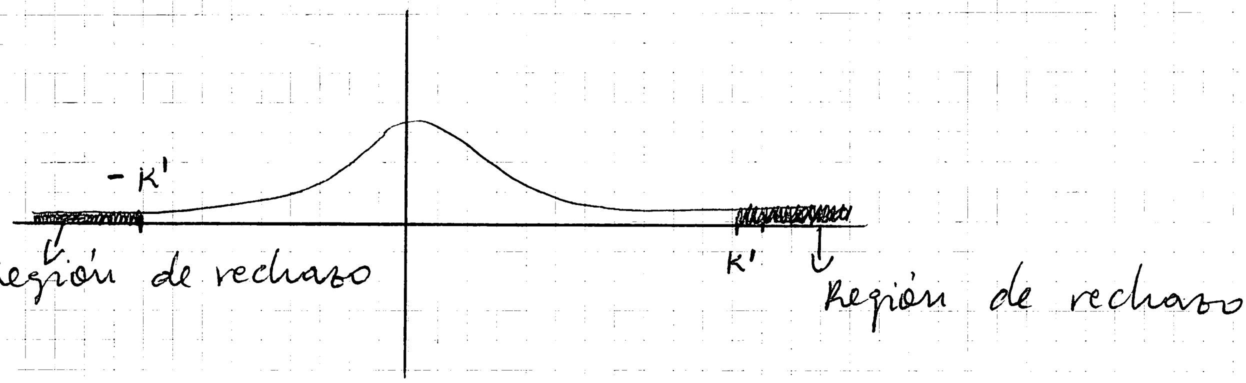
Como el nivel de significación del test es $\alpha = 0'05$

$P_{\mu=10}[(x_1, x_2, \dots x_n) \in C] = 0'05 \Rightarrow P_{\mu=10}[\bar{x} < k'] = 0'05$

Como $\bar{x} \rightsquigarrow N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ y $n = 20$, $\sigma = 3$

$\bar{x} \rightsquigarrow N(\mu, \frac{3}{\sqrt{20}}) = N(10, \frac{3}{\sqrt{20}}) = N(10, 0'67)$

$P[\bar{x} < k'] = P[z < \frac{k'-10}{0'67}] = 0'05$



Por lo tanto $\frac{k'-10}{0'67} = -z_{0'05}$

$k' = 10 - 0'67 \cdot z_{0'05} = 10 - 0'67 \cdot 1'65 = 8'8945.$

Luego la región crítica es:

$C = \{(x_1, x_2, \dots x_{20}) \in \mathbb{R}^{20} / \bar{x} \leq 8'8945\}$

$\rightarrow N(8, 0'67)$

$P[\text{error de tipo II}] = 1 - P_{\mu=8}[\bar{x} > 8'8945] =$

$= 1 - P_{\mu=8}\left(\frac{\bar{x}-8}{0'67} \geq \frac{8'8945-8}{0'67}\right) = 1 - P(z \geq 1'33507) =$

$1 - 0'90824 = 0'09176$

Luego la función de potencia es:

$$\beta(\mu) = \begin{cases} 0'05 & \text{si } \mu = 10 \\ 0'09176 & \text{si } \mu = 8 \end{cases}$$

Hipótesis compuestas

- Algunas de las hipótesis H_0 ó H_1 o ambas son compuestas
- El parámetro θ es unidimensional
- Las hipotesis son de tipo lateral (H_0 ó H_1 son del tipo $\geq$ ó $\leq$)
- La distribución de la v.a. es de tipo C.V.M (cociente de verosimilitudes monótono)

FAMILIA CON COCIENTE DE VEROSIMILITUDES MONÓTONO (CVM)

Sea X una v.a. con función de densidad $f_\theta(x)$ o función de probabilidad $P_\theta(x)$. Se dice que X tiene la propiedad de C.V.M si para toda m.a.s. $X_1, X_2, \dots X_n$ se verifica que:

$$\Lambda_c(x_1, x_2, \dots x_n) = \frac{L_{\theta_0}(x_1, x_2, \dots x_n)}{L_{\theta_1}(x_1, x_2, \dots x_n)}$$ se puede expresar

como:

$$\Lambda_c(x_1, x_2, \dots x_n) = h[T(x_1, x_2, \dots x_n], \theta_0, \theta_1]$$ donde:

$T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x_1, x_2, \dots x_n) \longrightarrow T(x_1, x_2, \dots x_n)$ no depende ni de θ_0 ni de θ_1, tan solo depende de la muestra.

h es monótona (creciente o decreciente) respecto a $T(x_1, x_2, \dots x_n)$, es decir:

Si $T(x_1, x_2, \dots x_n) \leq T(y_1, y_2, \dots y_n) \Rightarrow h[T(x_1, x_2, \dots x_n), \theta_0, \theta_1] \leq$

$\leq h[T(y_1, y_2, \dots y_n], \theta_0, \theta_1]$ (monótona creciente)

o bien:

Si $T(x_1, x_2, \dots x_n] \leq T(y_1, y_2, \dots y_n) \Rightarrow h[T(x_1, x_2, \dots x_n], \theta_0, \theta_1] \geq$

$\geq h[T(y_1, y_2, \dots y_n], \theta_0, \theta_1]$ (monótona decreciente)

La familia exponencial es de CVM, es lo que vamos a ver a continuación.

Proposición:

Sea X una v.a. que se distribuye con función de densidad $f_\theta(x)$ o con función de probabilidad $P_\theta(x)$. Si estas funciones pertenecen a la familia exponencial y $c(\theta)$ es monótona (creciente o decreciente) entonces verifican la propiedad de c.v.m (cociente de verosimilitudes monótono). Si la expresión de $f_\theta(x)$ o $P_\theta(x)$ es:

$$a(\theta)\cdot b(x)\cdot e^{c(\theta)\, d(x)}$$

Si $(X_1, X_2, \dots X_n)$ es m.a.s entonces se puede expresar:

$\Lambda_c(X_1, X_2, \dots X_n) = h[T(X_1, X_2, \dots X_n), \theta_0, \theta_1]$ donde

$$T(X_1, X_2, \dots X_n) = \sum_{i=1}^{n} d(X_i)$$

La monotonía de h respecto a T es opuesta a la monotonía de c respecto a θ, es decir:

c creciente $\Rightarrow$ h decreciente
c decreciente $\Rightarrow$ h creciente.

Demostración (no se ha hecho en la academia)

Sea $t_1 = T(X_1, X_2, \dots X_n)$ $t_2 = T(Y_1, Y_2, \dots Y_n)$ y supongamos que $t_1 < t_2$. Supongamos que $\theta_0 < \theta_1$ y que c es creciente (de manera similar se procedería si c fuera decreciente). Entonces:

$$\Lambda_c(x_1, x_2, \dots x_n) = \frac{L_{\theta_0}(x_1, x_2, \dots x_n)}{L_{\theta_1}(x_1, x_2, \dots x_n)} = \frac{\prod_{i=1}^{n} a(\theta_0)\cdot b(x_i)\cdot e^{c(\theta_0)\cdot d(x_i)}}{\prod_{i=1}^{n} a(\theta_1)\cdot b(x_i)\cdot e^{c(\theta_1)\cdot d(x_i)}}$$

$$\Lambda_c(x_1, x_2, \dots x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{a(\theta_0)\cdot \cancel{b(x_i)}\cdot e^{c(\theta_0)\cdot d(x_i)}}{a(\theta_1)\cdot \cancel{b(x_i)}\cdot e^{c(\theta_1)\cdot d(x_i)}}$$

$$\Lambda(x_1, x_2, \dots x_n) = \left(\frac{a(\theta_0)}{a(\theta_1)}\right)^n \cdot e^{[c(\theta_0) - c(\theta_1)]\cdot \sum d(x_i)}$$

Si $t_1 < t_2 \Rightarrow [c(\theta_0) - c(\theta_1)]\, t_1 > [c(\theta_0) - c(\theta_1)]\, t_2$ ya que al ser c creciente y $\theta_0 < \theta_1 \Rightarrow c(\theta_0) < c(\theta_1) \Rightarrow$
$\Rightarrow c(\theta_0) - c(\theta_1) < 0$. Por lo tanto:

$$e^{[c(\theta_0) - c(\theta_1)]\, t_1} > e^{[c(\theta_0) - c(\theta_1)]\, t_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a(\theta_0)}{a(\theta_1)}\right)^n \cdot e^{[c(\theta_0) - c(\theta_1)]\, t_1} > \left(\frac{a(\theta_0)}{a(\theta_1)}\right)^n \cdot e^{[a(\theta_0) - a(\theta_1)]\, t_2}$$

$$\Rightarrow h[t_1, \theta_0, \theta_1] > h[t_2, \theta_0, \theta_1]$$

Luego $t_1 < t_2 \Rightarrow h[t_1, \theta_0, \theta_1] > h(t_2, \theta_0, \theta_1) \Rightarrow h$ es decreciente en $T(x_1, x_2, \ldots x_n)$.

Ejemplo

Sea $X \rightsquigarrow Exp(\lambda)$. Comprobar si la función de densidad de X verifica la propiedad de CVM

Solución:

La función de densidad de la distribución exponencial es

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Esta función pertenece a la familia exponencial ya que:

$f(x) = a(\lambda) \cdot b(x) \cdot e^{c(\lambda) \cdot d(x)}$ siendo:

$a(\lambda) = \lambda \quad b(x) = 1 \quad c(\lambda) = -\lambda \quad d(x) = x$

El cociente de verosimilitudes es

$$\Lambda_C(x_1, x_2, \ldots x_n) = \frac{L_{\lambda_0}(x_1, x_2, \ldots x_n)}{L_{\lambda_1}(x_1, x_2, \ldots x_n)} = \frac{\prod_{i=1}^{n} \lambda_0 \cdot e^{-\lambda_0 x_i}}{\prod_{i=1}^{n} \lambda_1 \cdot e^{-\lambda_1 x_i}}$$

$$\Lambda_C(x_1, x_2, \ldots x_n) = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)^n \cdot e^{(\lambda_1 - \lambda_0) \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Sea $T(x_1, x_2, \ldots x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i$.

Entonces $h[T(x_1, x_2, \dots x_n), \lambda_0, \lambda_1] = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)^n \cdot e^{(\lambda_1 - \lambda_0)\cdot T}$

Al ser $c(\lambda) = -\lambda \Rightarrow \frac{d\,c(\lambda)}{d\lambda} = -1 < 0 \Rightarrow c(\lambda)$ es decreciente. Por tanto h ha de ser creciente respecto a T:

$$\frac{dh}{dT} = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)^n \cdot e^{(\lambda_1 - \lambda_0)T} \cdot (\lambda_1 - \lambda_0) > 0$$ ya que hemos supuesto $(\lambda_1 - \lambda_0) > 0$.

Teorema:

Sea X una v.a. que se distribuye con función de densidad $f_\theta(x)$ o con función de probabilidad $P_\theta(x)$, siendo θ unidimensional. Supongamos que se verifica la propiedad de los C.V.M. Entonces para algunas hipótesis compuestas existe el test u.m.p. de tamaño α para los siguientes casos:

Caso I

$H_0: \theta \leq \theta_0$ (o bien $\theta = \theta_0$)

$H_1: \theta > \theta_0$

- Si $h[T(x_1, x_2, \dots x_n), \theta_0, \theta] = \Lambda_c(x_1, x_2, \dots x_n)$ es no decreciente en T, la región crítica del u.m.p es:

$$C = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,/\, T(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq k\}$$

- Si $h[T(x_1, x_2, \dots, x_n), \theta_0, \theta_1] = \Lambda_c(x_1, x_2, \dots x_n)$ es no creciente en T, la región crítica del u.m.p es:

$$C = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / T(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq k\}$$

Caso II

$H_0: \theta \geq \theta_0$ (o bien $\theta = \theta_0$)

$H_1: \theta < \theta_0$

- Si h es no decreciente en T la región crítica del u.m.p. es:

$C = \{ (x_1, x_2, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n / \; T(x_1, x_2, \dots x_n) \geq k \}$

• Si h es no creciente en T la región crítica del u.m.p es:

$C = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \; T(x_1, x_2, \dots x_n) \leq k \}$

donde k es la constante tal que $P_{\theta_0}[(x_1, x_2, \dots, x_n) \in C] = \alpha$

Ejemplo:

Sea $X \rightsquigarrow N(\mu, \sigma)$ σ conocida

Obtener el test u.m.p. para el contraste:

$H_0: \mu \leq \mu_3$

$H_1: \mu > \mu_3$

Veamos que si σ es conocida la función de densidad de la normal pertenece a la familia exponencial. Esta función de densidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$ y si desarrollamos:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2 - 2\mu x + \mu^2)}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot e^{\frac{\mu}{\sigma^2} x} \cdot e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}$$, es decir

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot e^{\frac{\mu}{\sigma^2} \cdot x}$$

$f(x)$ es de la forma $f(x) = a(\mu) \cdot b(x) \cdot e^{c(\mu) \cdot d(x)}$

siendo $a(\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}$ $\quad b(x) = e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$

$c(\mu) = \frac{\mu}{\sigma^2}$ $\quad d(x) = x$.

Tomamos el estadístico $T(x_1, x_2, \dots x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} d(x_i)$

como $c(\mu) = \frac{1}{\sigma^2}\mu \Rightarrow \frac{d\,c(\mu)}{d\mu} = \frac{1}{\sigma^2} > 0 \Rightarrow c$ es creciente $\Rightarrow$ h es decreciente $\Rightarrow$ h es monótona no creciente. Si aplicamos el teorema la región crítica es:

$$C = \{(x_1, x_2, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n \,/\, T(x_1, x_2, \dots x_n) \geq k\}$$

$$C = \{(x_1, x_2, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n \,/\, \sum_{i=1}^{n} x_i \geq k\}$$

$$C = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,/\, \bar{x} \geq \frac{k}{n}\}$$

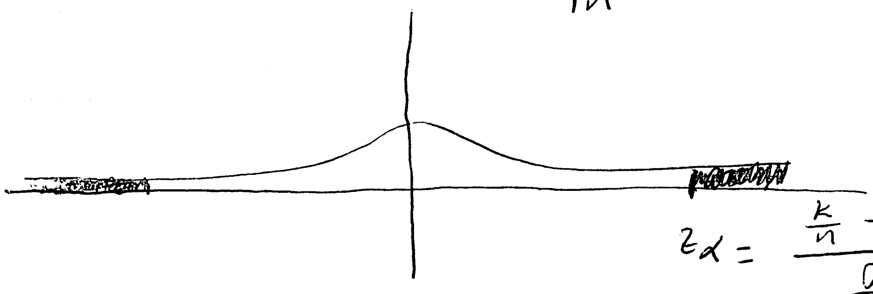
Si el nivel de significación (o tamaño) es α

$$P_{\mu_3}[(x_1, x_2, \dots x_n) \in C] = P_{\mu_3}\left[\bar{x} \geq \frac{k}{n}\right] = \alpha$$

según el lema de Fisher:

$$\bar{x} \rightsquigarrow N\left(\mu_3, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow z = \frac{\bar{x} - \mu_3}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \rightsquigarrow N(0,1)$$

Por tanto $P\left[z \geq \frac{k/n - \mu_3}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right] = \alpha$



$$z_\alpha = \frac{\frac{k}{n} - \mu_3}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

luego $z_\alpha = \frac{\frac{k}{n} - \mu_3}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \Rightarrow \frac{k}{n} = \mu_3 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha \Rightarrow$

$$\Rightarrow k = n\mu_3 + \frac{n\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha$$

Para saber si aceptamos o rechazamos la hipótesis nula hacemos la media de los valores de la muestra y si esta media es mayor o igual que $n\mu_3 + \frac{n\sigma}{\sqrt{n}} \cdot Z_\alpha$ se rechaza.

Cociente de verosimilitudes generalizado

Sea X una v.a. con una determinada distribución. Sea $X_1, X_2, \dots X_n$ una m.a.s. Se define el cociente de verosimilitudes generalizado como:

$$\Lambda_G(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\sup_{\theta \in \Pi_0} L_\theta(x_1, x_2, \dots x_n)}{\sup_{\theta \in \Pi_1} L_\theta(x_1, x_2, \dots x_n)}$$

Como $\sup_{\theta \in \Pi_0} L_\theta(x_1, x_2, \dots x_n)$ se alcanza en $\hat{\theta}_0 = EMV$ en Π_0

$\sup_{\theta \in \Pi_1} L_\theta(x_1, x_2, \dots x_n)$ se alcanza en $\hat{\theta} = EMV$ en Π_1

Entonces:

$$\Lambda_G(x_1, x_2, \dots x_n) = \frac{L_{\hat{\theta}_0}(x_1, x_2, \dots x_n)}{L_{\hat{\theta}}(x_1, x_2, \dots x_n)}$$

METODOS GENERALES DE OBTENCION DE CONTRASTES

a) Criterio basado en el cociente de verosimilitudes generalizado

En el contraste

$H_0: \quad \theta \in \Pi_0$

$H_1: \quad \theta \in \Pi_1$

La región crítica es $C = \{(x_1, x_2, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n / \Lambda_G(x_1, x_2 \dots x_n) \le K\}$

Si el nivel de significación o tamaño es α, entonces K se determina mediante la expresión:

$$P_{\theta \in \Pi_0}[(x_1, x_2, \dots x_n) \in C] = \alpha \Rightarrow P_{\theta \in \Pi_0}[\Lambda_G(x_1, x_2, \dots x_n) \le K] = \alpha$$

Para esto necesitamos conocer la distribución de probabilidad de $\Lambda_G(x_1, x_2, \dots x_n)$ y esto en general es difícil de conocer. Lo que podemos hacer es aproximar la distribución de $\Lambda_G(x_1, x_2, \dots x_n)$.

De eso trata el teorema que enunciaremos a continuación.

Teorema de Wilks

Sea θ el parámetro de una v.a. X restringido al conjunto Π_0 (es decir que $\theta \in \Pi_0$). Si el espacio muestral es grande ($n > 30$) entonces la distribución de probabilidad de $-2 \ln \Lambda_G (x_1, x_2, \dots x_n)$ se aproxima a χ^2_{m-r} siendo:

m = nº de parámetros desconocidos en la distribución de probabilidad de la población X

r = nº de parámetros desconocidos bajo la hipótesis nula $H_0 : \theta \in \Pi_0$

Observación:

La aproximación que da el método del cociente generalizado de verosimilitudes es bastante buena para grandes muestras. Este método sirve para todo tipo de contrastes, incluso si los parámetros no son unidimensionales. Veamos un ejemplo.

Ejemplo:

Sea X una variable que se distribuye según una distribución de Poisson de parámetro θ, $X \rightsquigarrow P(\theta)$.
Queremos contrastar la hipótesis:

$H_0 : \theta = 4$

$H_1 : \theta \neq 4$

con un nivel de significación $\alpha = 5\%$. Hemos tomado una muestra de tamaño 100 cuya media es 4'1.

Solución:

Con todos los métodos de obtención de contrastes que hemos visto hasta ahora, la única alternativa válida es la del método del cociente de verosimi-

litudes generalizado. En primer lugar vamos a obtener el e.m.v. en la distribución $P(\theta)$
La función de probabilidad de la distribución de Poisson es:

$$P[X=x] = \frac{\theta^x}{x!} e^{-\theta} \qquad x=0,1,2,\ldots$$

La función de verosimilitud es:

$$L_\theta(x_1, x_2, \ldots x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta^{x_i}}{x_i!} e^{-\theta} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i} \cdot \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \cdot e^{-n\theta}$$

La condición de primer orden para la existencia de máximo es:

$$\frac{\partial L_\theta}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \theta^{\sum_1^n x_i - 1} \cdot e^{-n\theta} - n \cdot \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i!} \theta^{\sum x_i} \cdot e^{-n\theta} \right)$$

esta' ~~rival~~ hay que tomar Ln

$= 0$. Luego:

$$e^{-n\theta} \cdot \theta^{\sum_1^n x_i} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{1}{\theta} - n \right) = 0 \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta} - n = 0$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \Rightarrow \hat{\theta}_{EMV} = \bar{x}$$

Recordemos que la media en $P(\theta)$ es θ, es decir que $E[X] = \theta$ si $X \rightsquigarrow P(\theta)$
El cociente de verosimilitudes generalizado es

$$\Lambda_G(x_1, x_2, \ldots x_n) = \frac{L_{\hat{\theta}_{EMV} \in \Pi_0}(x_1, x_2, \ldots x_n) \rightarrow \hat{\theta}_{EMV} = 4}{L_{\hat{\theta}_{EMV} \in \Pi_1}(x_1, x_2, \ldots x_n) \rightarrow \hat{\theta}_{EMV} = \bar{x}}$$

Vamos a calcular $L_{\hat{\theta}_{EMV} \in \Pi_0}(x_1, x_2, \ldots x_n)$
Como $\Pi_0 = \{4\}$, si $x_i \rightsquigarrow P(4)$ entonces:

$P[X = x_i] = \frac{4^{x_i}}{x_i!} e^{-4}$. Por tanto la función de verosimilitud es:

$$L_{\hat{\theta}_{EMV} \in \Pi_0}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i!} \cdot 4^{x_i} e^{-4} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i!} \cdot 4^{\sum_1^n x_i} \cdot e^{-4n}$$

Como $\hat{\theta}_{EMV} \in \Pi \Rightarrow \hat{\theta}_{EMV} = \bar{x}$

$$\underset{\substack{\hat{\theta}_{EMV} \in \Pi \\ \Downarrow \\ \hat{\theta}_{EMV} = \bar{x}}}{L}(x_1, x_2, \cdots x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i!} \cdot (\bar{x})^{x_i} \cdot e^{-\bar{x}} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i!} (\bar{x})^{\sum_1^n x_i} \cdot e^{-n\bar{x}}$$

Entonces:

$$\Lambda_G(x_1, x_2, \cdots x_n) = \frac{\cancel{\frac{1}{\prod_1^n x_i!}} \cdot 4^{\sum x_i} \cdot e^{-4n}}{\cancel{\frac{1}{\prod_1^n x_i!}} \cdot (\bar{x})^{\sum x_i} \cdot e^{-n\bar{x}}}$$

$$\Lambda_G(x_1, x_2, \cdots x_n) = \left(\frac{4}{\bar{x}}\right)^{\sum x_i} \cdot e^{n(\bar{x}-4)}. \quad \text{Como } \sum x_i = n\bar{x}$$

$$\Lambda_G(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \left(\frac{4}{\bar{x}}\right)^{n\bar{x}} \cdot e^{n(\bar{x}-4)}$$

La región crítica es:

$$C = \left\{ (x_1, x_2, \cdots x_n) \in \mathbb{R}^n \;\Big/\; \left(\frac{4}{\bar{x}}\right)^{n\bar{x}} \cdot e^{n(\bar{x}-4)} \leq K \right\}$$

Como $\alpha = 5\% = 0'05$, para determinar K empleamos la propiedad

$$P_{\hat{\theta}=4}\left[\Lambda_G(x_1, x_2, \cdots x_n) \leq K\right] = 0'05$$

Para calcular K precisamos saber la distribución de $\Lambda_G(x_1, x_2, \cdots x_n)$.

Como $n = 100$ (es grande), podemos aplicar el teorema de Wilks

$$-2 \ln \Lambda_G(x_1, x_2, \cdots x_n) \rightsquigarrow \chi^2_{1-0} = \chi^2_1$$

$$\Lambda_G(x_1, x_2, \cdots x_n) \leq K \iff \ln \Lambda_G(x_1, x_2, \cdots x_n) \leq \ln K \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2 \ln \Lambda_G(x_1, x_2, \cdots x_n) \geq -2 \ln K$$

Podemos poner que

$P[\Lambda_G(x_1, x_2, \dots x_n) \leq k] = 0'05 \Rightarrow P[-2\ln \Lambda_G(x_1, x_2 \dots x_n) \geq -2\ln k] =$

$= 0'05 \Rightarrow P[\chi_1^2 \geq -2\ln k] = 0'05 \Rightarrow 1 - P[\chi_1^2 < -2\ln k] = 0'05$

$\Rightarrow P[\chi_1^2 \leq -2\ln k] = 0'95 \Rightarrow -2\ln k = 3'84 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln k = -1'92 \Rightarrow k = 0'1466$

Entonces la región crítica es:

$$C = \left\{ (x_1, x_2, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n \Big/ \left(\frac{4}{\bar{x}}\right)^{n\bar{x}} \cdot e^{n(\bar{x}-4)} \leq 0'1466 \right\}$$

En la muestra de tamaño 100 hemos obtenido una media de $\bar{x} = 4'1$.

$$\left(\frac{4}{4'1}\right)^{100 \cdot 4'1} \cdot e^{100(4'1-4)} = 0'8834 \not\leq 0'1466$$

No podemos rechazar la hipótesis nula teniendo que aceptar la posibilidad de $\theta = 4$.

b) Contrastes basados en intervalos de confianza son contrastes para un tipo específico de contraste de la forma

$H_0: h(\theta) = h_0$
$H_1: h(\theta) \neq h_0$

Siendo $h(\theta)$ función del parámetro θ de la población.

Para contrastar H_0 contra H_1 se siguen los pasos:

1º Se construye un intervalo de confianza de nivel de confianza $C = 1-\alpha$ para $h(\theta)$

2º Se adopta el criterio de rechazo $R\,H_0$ si $h_0 \notin IC$

3º El tamaño del test es:

$$\sup_{h(\theta) \in \Pi_0} \beta(\Pi) = \sup_{h(\theta) = h_0} P_\theta[h_0 \notin IC] = 1 - C = \alpha$$

Veamos un ejemplo:

Ejemplo (ejercicio 11 de la relación 4)
Dos fábricas de válvulas electrónicas utilizan procedimientos diferentes de fabricación. La duración de vida de estas válvulas se supone normal. Se extrae en la primera fábrica una muestra de 20 válvulas y en la segunda una de 25 válvulas. Para la primera muestra los resultados muestrales son 1832 horas para la media y 497 horas para la desviación típica. En la segunda son 1261 horas y 561 horas respectivamente. ¿Puede considerarse la diferencia entre las medias significativa a un nivel del 5%?

Solución
Si llamamos A y B a las fabricas los datos que nos proporciona el enunciado son

$n_A = 20 \quad \bar{x}_A = 1832\ h. \quad \sigma_A = 497\ h.$

$n_B = 25 \quad \bar{x}_B = 1261\ h. \quad \sigma_B = 501\ h. \qquad \alpha = 5\%$

Tenemos que hacer el contraste

$H_0: \mu_A - \mu_B = 0$

$H_1: \mu_A - \mu_B \neq 0$

Por el lema de Fisher tenemos que:

$\bar{x}_A \rightsquigarrow N(\mu_A, \frac{497}{\sqrt{20}}) \quad \bar{x}_B \rightsquigarrow N(\mu_B, \frac{501}{\sqrt{25}})$, es decir:

$\bar{x}_A \rightsquigarrow N(\mu_A, 111'13) \quad \bar{x}_B \rightsquigarrow N(\mu_B, 100'2)$

Por tanto la diferencia entre medias se distribuye como:

$$\bar{x}_A - \bar{x}_B \rightsquigarrow N(\mu_A - \mu_B, \sqrt{111'13^2 + 100'2^2}) = N(\mu_A - \mu_B, 149'63)$$

Entonces:

$$v(\mu_A - \mu_B) = \frac{(\bar{x}_A - \bar{x}_B) - (\mu_A - \mu_B)}{149'63} \rightsquigarrow N(0,1)$$, podemos tomar $v(\mu_A - \mu_B)$ como función pivotal

Tenemos que hallar un intervalo (d_1, d_2) tal que

$$d_1 < v(\mu_A - \mu_B) < d_2 \Rightarrow d_1 < \frac{(\bar{x}_A - \bar{x}_B) - (\mu_A - \mu_B)}{149'63} < d_2$$

$$\Rightarrow 149'63\, d_1 < (\bar{x}_A - \bar{x}_B) - (\mu_A - \mu_B) < 149'63\, d_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -149'63\, d_2 < (\mu_A - \mu_B) - (\bar{x}_A - \bar{x}_B) < -149'63\, d_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\bar{x}_A - \bar{x}_B) - 149'63\, d_2 < \mu_A - \mu_B < (\bar{x}_A - \bar{x}_B) - 149'63\, d_1$$

Los intervalos que contienen a la diferencia de las medias poblacionales son de la forma:

$$I = ((\bar{x}_A - \bar{x}_B) - 149'63\, d_2,\ (\bar{x}_A - \bar{x}_B) - 149'63\, d_1)$$

La amplitud de estos intervalos es:

$$A(d_1, d_2) = 149'63\, d_2 - 149'63\, d_1$$

Además debe verificarse que:

$$P[d_1 < v(\mu_1 - \mu_2) < d_2] = 1 - \alpha \Rightarrow F(d_2) - F(d_1) = 1 - \underset{\downarrow}{\overset{0'05}{\alpha}}$$

siendo F la función de distribución de $N(0,1)$.

Tenemos que resolver el problema:

Minimizar $A(d_1, d_2) = 149'63\, d_2 - 149'63\, d_1$

s.a: $F(d_2) - F(d_1) = 0'95$

La función de Lagrange es

$$L(d_1, d_2, \lambda) = 149'63\, d_2 - 149'63\, d_1 - \lambda[F(d_2) - F(d_1) - 0'95]$$

Las condiciones de primer orden para la existencia de mínimo son:

$$\frac{\partial L}{\partial d_1} = 0 \Rightarrow -149'63 - \lambda \cdot f(d_1) = 0 \Rightarrow f(d_1) = \frac{149'63}{\lambda}$$

$$\frac{\partial L}{\partial d_2} = 0 \Rightarrow 149'63 - \lambda f(d_2) = 0 \Rightarrow f(d_2) = \frac{149'63}{\lambda}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow F(d_2) - F(d_1) - 0'95 = 0 \Rightarrow F(d_2) - F(d_1) = 0'95$$

siendo f la función de densidad de $N(0,1)$.

Del sistema anterior se deduce que $f(d_2) = f(d_1)$.

$$\text{Si } f(d_2) = f(d_1) \Rightarrow \begin{cases} d_2 = d_1 \text{ (absurdo ya que } d_1 < d_2) \\ d_1 = -d_2 \text{ por la simetría de } f. \end{cases}$$

Si $d_1 = -d_2$, de la tercera ecuación del sistema obtenemos que $F(d_2) - F(-d_2) = 0'95$. Como $F(-d_2) = P[X \leq -d_2] = P[X \geq d_2] = 1 - P[X \leq d_2) = 1 - F(d_2)$ se tiene que:

$$F(d_2) - 1 + F(d_2) = 0'95 \Rightarrow 2F(d_2) = 1'95 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow F(d_2) = 0'975 \Rightarrow d_2 = z_{0'025} = 1'96 \Rightarrow d_1 = -1'96$$

Entonces el intervalo de confianza al 95% es:

$$IC_{95\%}(\mu_A - \mu_B) = \left((\bar{x}_A - \bar{x}_B) - 149'63 \cdot 1'96, (\bar{x}_A - \bar{x}_B) + 149'63 \cdot 1'96\right)$$

$$IC_{95\%}(\mu_A - \mu_B) = \left((\bar{x}_A - \bar{x}_B) - 293'27, (\bar{x}_A - \bar{x}_B) + 293'27\right)$$

En la muestra $\bar{x}_A - \bar{x}_B = 1832 - 1261 = 571$

Entonces:

$$IC_{95\%}(\mu_A - \mu_B) = (277'73, 864'27)$$

La hipótesis nula es $\mu_A - \mu_B = 0 \notin IC_{95\%}(\mu_A - \mu_B) \Rightarrow$

se rechaza la hipotesis nula, no podemos afirmar que las medias sean iguales, por tanto la diferencia entre las medias es significativa.