EJERCICIOS TEMA 2

1º a) Demuestre que la media muestral es siempre un estimador insesgado y consistente (en media cuadrática) de la media poblacional (supuesto que la varianza poblacional es finita)

b) Demuestre igualmente, que la cuasivarianza muestral es un estimador insesgado de la varianza poblacional y que, sin embargo, la varianza muestral solo lo es asintoticamente

Solución

a) Sea X una v.a. distribuida de modo que su media poblacional es $E[X]=\mu$ y su varianza poblacional es $Var[X]=\sigma^2$. Seleccionamos una m.a.s. $x_1, x_2, \dots x_n$ y consideramos el estadístico:

$$T(x_1, x_2, \dots x_n) = \frac{\sum_1^n x_i}{n}$$

Entonces:

$$E[T] = E\left[\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right] = \frac{1}{n} E\left[\sum_{i=1}^n x_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E[x_i] =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mu = \frac{1}{n}\cdot n\mu = \mu \Rightarrow$$ T es un estimador insesgado para el parámetro μ (media poblacional)

Veamos que T es consistente en media cuadrática.

$$ECM(T) = Var[T] = Var\left[\frac{\sum_1^n x_i}{n}\right] = \frac{1}{n^2}\cdot Var\left[\sum_1^n x_i\right]$$

Como los x_i $i=1\cdots n$ son independientes entonces

$$Var\left[\sum_1^n x_i\right] = \sum_1^n Var[x_i] = \sum_1^n \sigma^2 = n\sigma^2$$

Luego:

$$ECM(T) = \frac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$. Por tanto:

$$\lim_{n\to\infty} ECM(T) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sigma^2}{n} = 0 \Rightarrow$$ T es consistente en media cuadrática

Tenemos que si S^2 es la varianza muestral y S_c^2 es la cuasivarianza muestral entonces:

$S_c^2 = \frac{n}{n-1} S^2$. Además la relación entre la varianza muestral y la varianza poblacional es:

$E[S^2] = \frac{n-1}{n} \cdot \sigma^2 \Rightarrow S^2$ no es insesgado para σ^2

Luego $E[S_c^2] = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \sigma^2 \Rightarrow E[S_c^2] = \sigma^2 \Rightarrow S_c^2$ es un estimador insesgado del parámetro σ^2

S^2 es un estimador asintóticamente insesgado para σ^2 ya que:

$$\lim_{n \to \infty} E[S^2] = \lim_{n \to \infty} \frac{n-1}{n} \sigma^2 = \sigma^2.$$

2 Consideremos una m.a.s. extraída de una población $U(0, \theta)$ donde $\theta \in \mathbb{R}^+$. Sean los estadísticos $Y_n = 2\bar{X}_n$ y $M_n = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$. Demuestre que Y_n es un estimador insesgado de θ y que M_n lo es asintóticamente.

Se tiene que

$$Y_n = 2\bar{X}_n = \frac{2\sum_1^n X_i}{n} \Rightarrow E[Y_n] = \frac{2}{n} \cdot E[\sum_1^n X_i]$$

$E[Y_n] = \frac{2}{n} \cdot \sum_1^n E[X_i]$ Como $X_i \rightsquigarrow U(0,\theta) \Rightarrow E[X_i] = \frac{0+\theta}{2} = \frac{\theta}{2}$

Por tanto:

$$E[Y_n] = \frac{2}{n} \cdot \sum_1^n \frac{\theta}{2} = \frac{2}{n} \cdot \frac{n\theta}{2} = \theta$$

Hemos demostrado que Y_n es insesgado para θ, pero hay una sutileza que se nos escapa, ¿es Y_n estimador de θ? Veamos, Y_n es un estadístico ya que no contiene en su definición parámetros desconocidos. Veamos el campo de variación de Y_n. La función de densidad de $U(0,\theta)$ es

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & \text{si } 0 < \theta < x \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

El campo de variación de x_i es $(0,\theta)$ $\forall i=1 \dots n \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 < x_i < \theta \Rightarrow 0 < \sum_1^n x_i < \sum_1^n n\theta \Rightarrow 0 < \sum_1^n x_i < n\theta \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0 < \frac{\sum x_i}{n} < \theta \Rightarrow 0 < Y_n < \theta$$

Por tanto Y_n es un estimador de θ

Tenemos que hallar $E[M_n]$. Para ello nos hace falta la función de densidad de M_n, que obtendremos derivando la función de distribución. Esta función es:

$$F_{M_n}(t) = P[M_n < t] = P[\max\{x_1, x_2, \dots, x_n\} < t] =$$

$$= P[x_1 < t, x_2 < t, \dots, x_n < t] = \prod_{i=1}^{n} P[x_i < t]$$

Como
$$P[x_i < t] = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \int_0^t \frac{1}{\theta}\, dt & \text{si } 0 < t < \theta \\ 1 & \text{si } t > \theta \end{cases} = \begin{cases} \frac{t}{\theta} & \text{si } 0 < t < \theta \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Tenemos que si $0 < t < \theta$

$$F_{M_n}(t) = \prod_1^n \frac{t}{\theta} = \left(\frac{t}{\theta}\right)^n. \text{ Derivando obtenemos:}$$

$$F'_{M_n}(t) = f_{M_n}(t) = n \cdot \left(\frac{t}{\theta}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{\theta} \quad \text{si } 0 < t < \theta$$

Entonces:

$$E[M_n] = \int_0^\theta t \cdot f_{M_n}(t)\, dt = \int_0^\theta n \cdot \frac{t^n}{\theta^n}\, dt = \frac{n}{\theta^n} \cdot \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^\theta$$

es decir que:

$$E[M_n] = \frac{n}{\theta^n} \cdot \frac{\theta^{n+1}}{n+1} = \frac{n}{n+1} \cdot \theta \Rightarrow M_n \text{ no es estimador insesgado para } \theta.$$

$$\lim_{n\to\infty} E[M_n] = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \theta = \theta \Rightarrow M_n \text{ es estimador asintóticamente insesgado para } \theta.$$

3º Dada una muestra aleatoria simple de tamaño 2, demuestre que el estimador $T = X_1 + X_2$ es suficiente, tanto si la población sigue una distribución de Bernouilli como si sigue una distribución de Poisson. Utilice la definición de suficiencia y el criterio de factorización.

Solución: criterio de factorización

Si $X \rightsquigarrow b(p)$ la función de probabilidad de X es:

$$P[X=x] = p^x \cdot (1-p)^{1-x} = (1-p) \cdot \left(\frac{p}{1-p}\right)^x =$$

$$P[X=x] = (1-p) \cdot e^{x \cdot \ln \frac{p}{1-p}}$$, lo que nos indica que la distribución de Bernouilli pertenece a la familia exponencial ya que es de la forma

$$P[X=x] = a(\theta) \cdot b(x) \cdot e^{c(\theta) \cdot d(x)}$$ y en este caso si la muestra es de tamaño n el estimador suficiente para θ es

$$T(X_1, X_2, \dots X_n) = \sum_{i=1}^{n} d(X_i)$$

$$a(p) = 1-p \quad b(x) = 1 \quad c(p) = \ln \frac{p}{1-p} \quad d(x) = x$$

Como tomamos muestras de tamaño 2, el estadístico $T(X_1, X_2) = X_1 + X_2$ es suficiente para p

Si $X \rightsquigarrow P(\lambda)$ la función de probabilidad de X es:

$$P(X=x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!} = e^{-\lambda} \cdot \frac{1}{x!} \cdot \lambda^x =$$

$$P[X=x] = e^{-\lambda} \cdot \frac{1}{x!} \cdot e^{x \ln \lambda}$$, la distribución de

Poisson también pertenece a la familia exponencial:

$a(\lambda) = e^{-\lambda}$ $b(x) = \frac{1}{x!}$ $c(\lambda) = \ln \lambda$ $d(x) = x$

Como tomamos muestras de tamaño 2, entonces $T(X_1, X_2) = X_1 + X_2$ es un estadístico suficiente para λ.

Con la definición:

Si $X \rightsquigarrow b(p)$ y tomamos una m.a.s. de tamaño 2, X_1, X_2, entonces el estadístico $T = X_1 + X_2 \rightsquigarrow B(2, p)$

Tenemos que probar que $P[X_1 = x_1, X_2 = x_2]$ no depende de p cuando $(x_1, x_2) \in N_t = \{(x_1, x_2) / T(x_1, x_2) = x_1 + x_2 = t\}$, o sea:

$$P[X_1 = x_1, X_2 = x_2 / T = t] = \frac{P[X_1 = x_1] \cdot P[X_2 = x_2]}{P(T = t)}$$

$$= \frac{p^{x_1} \cdot (1-p)^{1-x_1} \cdot p^{x_2} \cdot (1-p)^{1-x_2}}{\binom{2}{t} \cdot p^t \cdot (1-p)^{2-t}} = \frac{p^{x_1+x_2} \cdot (1-p)^{2-(x_1+x_2)}}{\binom{2}{t} p^t \cdot (1-p)^{2-t}}$$

Como $x_1 + x_2 = t$

$$P[X_1 = x_1, X_2 = x_2 / T = t] = \frac{p^t \cdot (1-p)^{2-t}}{\binom{2}{t} \cdot p^t \cdot (1-p)^{2-t}} = \frac{1}{\binom{2}{t}}$$

$\Rightarrow T(X_1, X_2) = X_1 + X_2$ es suficiente ya que $P[X_1 = x_1, X_2 = x_2 / T = t]$ no depende de p.

Con la definición:

Si $X \rightsquigarrow P(\lambda)$ y tomamos una m.a.s. de tamaño 2, X_1, X_2, entonces el estadístico $T(X_1, X_2) = X_1 + X_2 \rightsquigarrow P(2\lambda)$.

$$P[X_1 = x_1, X_2 = x_2 / T = t] = \frac{P[X_1 = x_1] \cdot P[X_2 = x_2]}{P[T = t]}$$

Entonces:

$$P[X_1 = x_1, X_2 = x_2] = \frac{\dfrac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{x_1}}{x_1!}\cdot\dfrac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{x_2}}{x_2!}}{\dfrac{e^{-2\lambda}\cdot(2\lambda)^t}{t!}} =$$

$$= \frac{\dfrac{\cancel{e^{-2\lambda}}\cdot\lambda^{x_1+x_2}}{x_1!\,x_2!}}{\dfrac{\cancel{e^{-2\lambda}}\cdot 2^t\cdot\lambda^t}{t!}} = \frac{\dfrac{\cancel{\lambda^t}}{x_1!\,x_2!}}{\dfrac{2^t\cdot\cancel{\lambda^t}}{t!}} = \frac{t!}{2^t\cdot x_1!\cdot x_2!}$$

Luego $P[X_1 = x_1, X_2 = x_2 / T = t]$ no depende de λ por lo que $T(X_1, X_2) = X_1 + X_2$ es suficiente para λ.

4º Sean dos poblaciones una distribuida según una $G(a,p)$ y la otra según una $\beta(a,p)$. Para cada una, calcule un estadístico suficiente bajo las siguientes hipótesis:

a) a es conocido y p desconocido

b) a desconocido y p conocido

c) a y p desconocidos.

FUNCION $G(a,p)$

a) a conocido y p desconocido

La función de densidad de una $G(a,p)$ es:

$$f_p(x) = \frac{a^p}{\Gamma(p)}\cdot e^{-ax}\cdot x^{p-1}$$ y la podemos expresar de esta forma también:

$$f_p(x) = \frac{a^p}{\Gamma(p)}\cdot e^{-ax}\cdot e^{(p-1)\ln x}$$ si a es conocido esta pertenece a la familia exponencial ya que se

puede expresar en la forma:

$$f_p(x) = \frac{a^p}{\Gamma(p)} \cdot e^{-ax} \cdot e^{(p-1)\ln x} = a(p)\cdot b(x)\cdot e^{c(p)\cdot d(x)}$$

donde:

$$a(p) = \frac{a^p}{\Gamma(p)} \qquad b(x) = e^{-ax} \qquad c(p) = p-1 \qquad d(x) = \ln x$$

Si tomamos una muestra de tamaño n, el estadístico $T(x_1, x_2, \dots x_n) = \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)$ es suficiente para p, supuesto que a es conocido.

b) a desconocido y p conocido

Expresamos la función de densidad como:

$$f_a(x) = \frac{a^p}{\Gamma(p)} \cdot e^{(p-1)\ln x} \cdot e^{-ax}$$ que es de la familia exponencial ya que se puede expresar como

$$f_a(x) = a(a)\cdot b(x)\cdot e^{c(a)\cdot d(x)}$$

$$a(a) = \frac{a^p}{\Gamma(p)} \qquad b(x) = e^{(p-1)\ln x} = x^{p-1} \qquad c(a) = -a \qquad d(x) = x$$

Si tomamos una m.a.s. $x_1, x_2, \dots x_n$, entonces el estadístico

$$T(x_1, x_2, \dots x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i$$ es suficiente para a si p es conocido.

c) Si a y p son desconocidos

Observación sobre la familia exponencial

Si la v.a. X es n-dimensional y la función de probabilidad o densidad es de la forma:

$$f_\theta(x) = a(\theta)\cdot b(x)\cdot e^{\sum c_i(\theta)\cdot d_i(x)}$$

entonces el estadístico

$T(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} d_1(x_i), \sum_{i=1}^{n} d_2(x_i), \ldots, \sum_{i=1}^{n} d_K(x_i) \right)$ es

suficiente para $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_n)$

Suponiendo que a y p son desconocidos, la función de densidad es:

$$f_{(a,p)}(x) = \frac{a^p}{\Gamma(p)} \cdot e^{-ax} \cdot e^{(p-1)\ln x} = \frac{a^p}{\Gamma(p)} \cdot e^{-ax+(p-1)\ln x}$$

$a(\theta) = \dfrac{a^p}{\Gamma(p)}$ $\quad b(x) = 1$ $\quad c_1(\theta) = -a$ $\quad c_2(\theta) = p-1$

$d_1(x) = x$ $\quad d_2(x) = \ln x$

Entonces $T(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i, \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) \right)$ es estadístico suficiente para $(a,p) = \theta$, donde $x_1, x_2 \ldots x_n$ es una m.a.s.

FUNCION $\beta(a,p)$

a conocido y p desconocido

La función de densidad de x es:

$$f_p(x) = \frac{1}{\beta(a,p)} \cdot x^{a-1} \cdot (1-x)^{p-1} = \frac{1}{\beta(a,p)} x^{a-1} \cdot e^{(p-1)\ln(1-x)}$$

$$= a(p) \cdot b(x) \cdot e^{c(p) \cdot d(x)}$$

$a(p) = \dfrac{1}{\beta(a,p)}$ $\quad b(x) = x^{a-1}$ $\quad c(p) = p-1$ $\quad d(x) = \ln(1-x)$

lo que nos dice que la distribución beta pertenece a la familia exponencial y que el estadístico $T(x_1, x_2, \ldots x_n) = \sum_{i=1}^{n} \ln(1-x_i)$ es suficiente para p siendo a constante y $0 < x_i < 1$.

p conocido y a desconocido

La función de densidad se puede expresar como

$$f_a(x) = \frac{1}{\beta(a,p)} \cdot x^{a-1} \cdot (1-x)^{p-1} = \frac{1}{\beta(a,p)} \cdot (1-x)^{p-1} \cdot e^{(a-1)\ln x}$$

es de nuevo de la familia exponencial. El estadístico

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \ln x_i$$ es suficiente para a

siendo p conocido y $0 < x < 1$.

p y a desconocidos

Consideramos la variable bidimensional y $\theta = (a, p)$

Entonces la función de densidad es:

$$f_\theta(x) = a(\theta) \cdot b(x) \cdot e^{c_1(\theta) \cdot d_1(x) + c_2(\theta) \cdot d_2(x)} =$$

$$= \frac{1}{\beta(a,p)} \cdot e^{(a-1)\ln x + (p-1) \cdot \ln(1-x)}$$

$$a(\theta) = \frac{1}{\beta(a,p)} \quad b(x) = 1 \quad c_1(\theta) = a-1 \quad d_1(x) = \ln x$$
$$c_2(\theta) = p-1 \quad d_2(x) = \ln(1-x)$$

Entonces si $x_1, x_2, \ldots x_n$ es m.a.s. el estadístico

$$T(x_1, x_2, \ldots x_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} \ln x_i , \sum_{i=1}^{n} \ln(1-x_i) \right) \quad 0 < x_i < 1$$

es suficiente para $\theta = (a, p)$

5º Suponga una población $N(\mu, \sigma^2)$. Compruebe que si σ es conocida, entonces $\bar{x}$ es suficiente para μ y que $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2$ lo es para σ si μ es conocido. Halle un estadístico suficiente para los dos parámetros si ambos son desconocidos.

La función de densidad de la normal es

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2-2\mu x+\mu^2)}$$

• Si σ es conocida, la función de densidad la podemos expresar como:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2} \cdot e^{\frac{\mu}{\sigma^2}x} \cdot e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}$$, es decir

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2} \cdot e^{\frac{\mu}{\sigma^2}x}$$ que es de la familia exponencial ya que la función de densidad tiene la forma:

$$f(x) = a(\mu) \cdot b(x) \cdot e^{c(\mu)\cdot d(x)}$$

$$a(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} \quad b(x) = e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2} \quad c(\mu) = \frac{\mu}{x^2} \quad d(x) = x$$

De esta forma para cualquier m.a.s. $x_1, x_2, \dots x_n$

$T(x_1, x_2, \dots x_n) = \sum_{i=1}^{n} d(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ es un estadístico suficiente para μ. Como la aplicación $m(x) = \frac{x}{n} = \frac{1}{n}x$ es inyectiva, también es suficiente para μ el estadístico

$$m(T(x_1, x_2, \dots x_n)) = \frac{\sum x_i}{n} = \bar{x}.$$

• Si μ es conocida, la función de densidad la podemos escribir como

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$ y si μ es conocida pertenece a la familia exponencial ya que la podemos

expresar como:

$$f(x) = a(\sigma) \cdot b(x) \cdot e^{c(\sigma) \cdot d(x)}$$ siendo

$$a(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \quad b(x) = 1 \quad c(\sigma) = \frac{-1}{2\sigma^2} \quad d(x) = (x-\mu)^2$$

Entonces para toda m.a.s. $x_1, x_2, \dots x_n$ el estadístico:

$$T(x_1, x_2, \dots x_n) = \sum_{i=1}^{n} d(x_i) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2$$ es suficiente

para σ.

• Si μ y σ son desconocidos la función de densidad de la distribución normal la podemos expresar como

$$f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2 + \frac{\mu}{\sigma^2}x - \frac{\mu^2}{2\sigma^2}}$$, es decir

$$f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2 + \frac{\mu}{\sigma^2}x}$$ que es

de la familia exponencial ya que si consideramos $\theta = (\mu, \sigma)$ como parámetro bidimensional

$$f(x, \theta) = a(\theta) \cdot b(x) \cdot e^{c_1(\theta)\, d_1(x) + c_2(\theta)\, d_2(x)}$$

donde:

$$a(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} \qquad b(x) = 1$$

$$c_1(\theta) = -\frac{1}{2\sigma^2} \qquad d_1(x) = x^2 \qquad c_2(\theta) = \frac{\mu}{\sigma^2} \qquad d_2(x) = x$$

De esta forma $\forall\, x_1, x_2, \dots x_n$ m.a.s. el estadístico:

$$T(x_1, x_2, \dots x_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \,,\, \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)$$ es suficiente

para $\theta = (\mu, \sigma)$

6º Un estudio urbanístico afirma que el tamaño de las ciudades con más de 200.000 habitantes tiene la siguiente función de densidad (en millones de habitantes):

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{5a}{(5x)^{a+1}} & \text{si } x > 0'2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

El coeficiente a es una constante positiva básica para el cálculo de la concentración de la población en los municipios. Para su estimación se observa el tamaño de siete ciudades: 320.000, 540.000, 1.380.000, 710.000, 840.000, 2.730.000 y 450.000. Obtenga el estimador máximo verosímil y la estimación de acuerdo con la muestra seleccionada.

La función de verosimilitud es:

$$L_a(x_1, x_2, \dots x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_a(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{5a}{(5x_i)^{a+1}} = \frac{(5a)^n}{\prod_{i=1}^{n} (5x_i)^{a+1}}$$

$$z = \ln L_a(x_1, x_2, \dots x_n) = \ln \frac{(5a)^n}{\prod_{i=1}^{n} (5x_i)^{a+1}} = \ln (5a)^n - \ln \left[\prod_{i=1}^{n} (5x_i)^{a+1}\right]$$

$$z = n \ln (5a) - \sum_{i=1}^{n} (a+1) \cdot \ln (5x_i)$$

C.N: $$\frac{\partial z}{\partial a} = 0 \Rightarrow \frac{n}{a} - \sum_{i=1}^{n} \ln (5x_i) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{EMV} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln (5x_i)}$$

C.S. $$\frac{\partial^2 z}{\partial a^2} = -\frac{n}{a^2} < 0 \quad \text{máximo.}$$

Luego el estimador máximo verosímil de a es:

$$a_{EMV} = \frac{n}{\sum^{n} \ln (5x_i)}$$

Si tomamos la muestra de tamaño 7 (hay que darla en millones):

$x_1 = 0'32,\ x_2 = 0'54,\ x_3 = 1'38,\ x_4 = 0'71,\ x_5 = 0'84,\ x_6 = 2'73,\ x_7 = 0'45$

el valor máximo verosimil de a es:

$$a_{EMV} = \frac{7}{\ln 1'6 + \ln 2'7 + \ln 6'9 + \ln 3'55 + \ln 4'2 + \ln 13'65 + \ln 2'25}$$

es decir $a_{EMV} = \dfrac{7}{9'52147868} \Rightarrow a_{EMV} = 0'735179926$

7º Considere una población que se distribuye según la función de densidad

$$f_\theta(x) = \begin{cases} e^{-x+\theta} & \text{si } \theta < x \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

siendo θ un número real cualquiera positivo. Halle la función de densidad conjunta de una m.a.s. de tamaño n. Explique, usando el criterio de factorización, porqué no podemos concluir que el estadístico $\sum x_i$ sea un estadístico suficiente.

La función de densidad conjunta para la muestra a.s. de tamaño n $x_1, x_2, \dots x_n$ es:

$$f_\theta(x_1, x_2, \dots x_n) = \prod_{i=1}^{n} e^{-x_i+\theta} = e^{-\sum x_i + n\theta}$$

El teorema de Fisher-Neyman (criterio de factorización) dice que

$T(x_1, x_2, \dots x_n)$ es suficiente si y sólo si

$$f_\theta(x_1, x_2, \dots x_n) = h(x_1, x_2, \dots x_n) \cdot g_\theta(T(x_1, x_2, \dots x_n))$$

donde $h(x_1, x_2, \dots x_n)$ depende de la muestra únicamente y g depende de θ y del valor que tome T en la muestra. En nuestro caso tenemos que:

$g_\theta(T(x_1, x_2, \dots x_n)) = e^{n\theta - \sum_{i=1}^{n} x_i}$ siendo

$T(x_1, x_2, \dots x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i$

$h(x_1, x_2, \dots x_n) = 1$ que no depende de la muestra, por tanto no podemos afirmar, aplicando el principio de factorización que el estadístico $T(x_1, x_2, \dots x_n) = \sum x_i$ sea suficiente para θ.

8º Supongamos una población con distribución $P(\lambda)$ de la que se extrae una m.a.s.

a) Halle un estadístico suficiente para λ. ¿Que significa ser un estadístico suficiente? ¿Para qué sirve que un estadístico lo sea?

La función de probabilidad de la distribución de Poisson es:

$$P_\lambda(x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!} \qquad x = 0, 1, 2, \dots$$

Como: $P_\lambda(x) = \frac{1}{x!} e^{-\lambda} \cdot e^{x \ln \lambda}$ esta distribución pertenece a la familia exponencial ya que se puede expresar como:

$$P_\lambda(x) = a(\lambda) \cdot b(x) \cdot e^{c(\lambda) \cdot d(x)}$$

$a(\lambda) = e^{-\lambda} \quad b(x) = \frac{1}{x!} \quad c(\lambda) = \ln \lambda \quad d(x) = x$

Por el teorema de factorización

$T(x_1, x_2, \dots x_n) = \sum_{i=1}^{n} d(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ es estadístico suficiente para λ.

Que T es estadístico suficiente para λ quiere decir que la probabilidad en una curva de nivel $N_t = \{(x_1, x_2, \dots x_n) / T(x_1, x_2, \dots x_n) = t\}$ es independiente de λ, es decir:

$P[x_1, x_2, \ldots x_n / T = t]$ es independiente de λ.
El que T sea un estadístico suficiente sirve para sustituir toda una muestra por un valor del estadístico T.

b) ¿Es el estadístico anterior un estimador de λ insesgado y consistente? Si no lo es obtenga uno que lo sea pero sin perder la condición de suficiencia. Explique intuitivamente que conllevan estas propiedades para las estimaciones que se obtengan con este estimador.

$T(x_1, x_2, \ldots x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ no es un estimador insesgado ya que $E[T] = E[\sum_{i=1}^{n} x_i] = \sum_{i=1}^{n} E[x_i]$

$$E[T] = \sum_{i=1}^{n} \lambda = n\lambda \neq \lambda$$

El estimador $T_1 = \dfrac{\sum x_i}{n} = \dfrac{T}{n}$ si es insesgado ya que:

$$E[T_1] = E\left[\frac{T}{n}\right] = \frac{1}{n} \cdot E[T] = \frac{1}{n} \cdot n\lambda = \lambda .$$

Además T_1 es suficiente ya que $m(x) = \dfrac{x}{n}$ es inyectiva y $T_1 = m(T) = \dfrac{T}{n}$.

El que T_1 sea insesgado quiere decir que se aproxima al valor verdadero del parámetro λ.

c) Calcule la cota FCR para los estimadores insesgados de λ. ¿Puede derivar alguna propiedad más que cumpla el estimador obtenido en b)

$$\text{cota FCR}(\lambda) = \frac{\left(\dfrac{\partial h(\lambda)}{\partial \lambda}\right)^2}{-n \cdot E\left[\dfrac{\partial^2 \ln L_\lambda(x)}{\partial \lambda^2}\right]}$$

Se tiene que $L_\lambda(x) = P_\lambda(x) = \dfrac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}$

$$L_\lambda(x) = \frac{1}{x!} \cdot \lambda^x \cdot e^{-\lambda} \Rightarrow \ln L_\lambda(x) = \ln\left(\frac{1}{x!}\right) + x \ln\lambda - \lambda$$

$$\frac{\partial \ln L_\lambda(x)}{\partial \lambda} = \frac{+x}{\lambda} - 1$$

$$\frac{\partial^2 \ln L_\lambda(x)}{\partial \lambda^2} = -\frac{x}{\lambda^2} \Rightarrow E\left[\frac{\partial^2 \ln L_\lambda(x)}{\partial \lambda^2}\right] = E\left[-\frac{x}{\lambda^2}\right]$$

$$= -\frac{1}{\lambda^2} \cdot E[x] = -\frac{1}{\lambda^2} \cdot \lambda = -\frac{1}{\lambda}$$

Como $h(\lambda) = \lambda \Rightarrow \dfrac{d h(\lambda)}{d\lambda} = 1$

luego:

$$\text{Cota } FCR(\lambda) = \frac{1}{\frac{n}{\lambda}} = \frac{\lambda}{n}$$

El estimador $T = \sum_{i=1}^{n} x_i$ no es eficiente ya que $Var[T] \neq$ Cota $FCR(\lambda)$

$$Var[T] = Var\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right] \overset{x_i \text{ independientes}}{=} \sum_{i=1}^{n} Var[x_i] = \sum_{i=1}^{n} \lambda = n\lambda$$

El estimador $T_1 = \dfrac{\sum_1^n x_i}{n}$ si es eficiente ya que

$$Var[T_1] = Var\left[\frac{\sum_1^n x_i}{n}\right] = \frac{1}{n^2} \cdot Var\left[\sum_1^n x_i\right] = \frac{1}{n^2} \cdot n\lambda$$

$Var[T_1] = \dfrac{\lambda}{n} =$ Cota $FCR(\lambda) \Rightarrow T_1$ eficiente ya que también es insesgado

d) Demuestre que el estimador anterior es el máximo verosímil

Sea $X_1, X_2, \dots X_n$ una m.a.s. Entonces la función de verosimilitud es:

$$L_\lambda(x_1, x_2, \dots x_n) = \prod_{i=1}^{n} P_\lambda(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i} \cdot e^{-\lambda}}{x_i!} = \frac{\lambda^{\sum x_i} \cdot e^{-n\lambda}}{\prod_1^n x_i!}$$

$$\ln L_\lambda(x_1, x_2 \dots x_n) = \ln \frac{e^{-n\lambda} \cdot \lambda^{\sum x_i}}{\prod_1^n x_i!}$$

$$\ln L_\lambda(x_1, x_2, \dots x_n] = -n\lambda + \sum_{i=1}^n x_i \cdot \ln \lambda - \ln\left(\prod_{i=1}^n x_i!\right)$$

$$\frac{\partial \ln L_\lambda(x_1, x_2, \dots x_n)}{\partial \lambda} = -n + \frac{\sum x_i}{\lambda} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{\sum x_i}{n}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L_\lambda(x_1, x_2 \dots x_n)}{\partial \lambda^2} = -\frac{\sum x_i}{\lambda^2} < 0 \quad (\text{máximo})$$

luego $\lambda_{EMV} = \dfrac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = T_1(x_1, x_2 \dots x_n)$

e) ¿Puede obtener alguna conclusión sobre el comportamiento asintótico del estimador? Enuncie diferentes resultados que conozca y que puedan ser utilizados para ello (tanto resultados acerca de la convergencia de determinado tipo de v.v.aa como resultados a cerca de la convergencia asintótica de determinados estimadores). Indique exactamente cuál es su distribución asintótica.

Hemos visto que $T(x_1, x_2, \dots x_n) = \bar{X} = \dfrac{\sum x_i}{n}$ es insesgado, consistente, eficiente y suficiente. Por el teorema central del límite tenemos que:

Si $n \to \infty \Rightarrow X \rightsquigarrow N(\mu, \sigma)$ siendo $\mu = E[X] = \lambda$

y $\sigma = Var[X] = \sqrt{\text{cota FCR}(\lambda)} = \sqrt{\dfrac{\lambda}{n}}$

Luego:

$$\lim_{n\to\infty} P(\lambda) = N\left(\lambda, \sqrt{\frac{\lambda}{n}}\right)$$

f) El número de pedidos diarios recibidos en un almacén sigue una distribución de Poisson de parámetro λ. En 15 días escogidos aleatoriamente, los pedidos realizados fueron: 5, 5, 11, 2, 9, 7, 7, 6, 10, 8, 6, 7, 5, 7, 10.

Aplique todo lo anterior y obtenga la estimación máximo - verosimil de λ en esta muestra. ¿Qué obtendría empleando correctamente el método de los momentos?

La función de verosimilitud es:

$$L_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} P_\lambda(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i} \cdot e^{-\lambda}}{x_i!}$$

$$L_\lambda(x_1, x_2, \dots x_n) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i!} \cdot \lambda^{\Sigma x_i} \cdot e^{-n\lambda}$$

$$\ln L_\lambda(x_1, x_2, \dots x_n) = -\ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i!\right) + \Sigma x_i \cdot \ln \lambda - n\lambda$$

$$\frac{\partial \ln L_\lambda(x_1, x_2, \dots x_n)}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{1}{\lambda} - n = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L_\lambda(x_1, x_2, \dots x_n)}{\partial \lambda^2} = -\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\lambda^2} < 0 \Rightarrow \text{máximo}$$

Luego

$$\lambda_{emv} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{x}.$$

En la muestra obtenida:

$$\lambda_{emv} = \frac{5+5+11+\dots+10}{15} = \frac{105}{15} = 7$$

Si hubiéramos optado por estimar λ por el método de los momentos:

$$\alpha_1(\lambda) = a_1 \Rightarrow E[X] = \bar{x} \Rightarrow \lambda = \bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \hat{\lambda} = \bar{x} = \frac{105}{15} = 7$, obtendríamos el mismo resultado.

9º Un comerciante de electrodomésticos, antes de la posible ampliación de su establecimiento en una determinada zona, quiere estudiar las posibilidades de venta que tienen sus artículos. Durante 5 semanas estudia las ventas realizadas por su comercio y obtiene los siguientes resultados en cientos de euros: 350, 270, 300, 330, 250. Supuesto que la venta sigue una distribución normal, determine las estimaciones que se obtienen tanto por el método de los momentos como por el de máxima verosimilitud, de los parámetros de la población.

• Por el método de los momentos $\quad \theta = (\mu, \sigma)$

$$\alpha_1(\theta) = O_1 \Rightarrow E[X] = \bar{X} \Rightarrow \mu = \bar{X} = 300 \Rightarrow \hat{\mu} = 300$$

$$\alpha_2(\theta) = O_2 \Rightarrow E[X^2] = \frac{\sum x_i^2}{n}$$

Como $E[X^2] = Var[X] + (E(X))^2 \Rightarrow E[X^2] = \sigma^2 + \mu^2$

$$O_2 = S^2 + \bar{X}^2$$

Entonces $\sigma^2 + \cancel{\mu^2} = S^2 + \cancel{\bar{X}^2} \Rightarrow \hat{\sigma} = S$

Al ser $S^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{X}^2 = 1360 \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = 1360 \Rightarrow$

$\Rightarrow \hat{\sigma} = \sqrt{1360} \Rightarrow \hat{\sigma} = 36'87$

• Por el método de máxima verosimilitud

Al ser la función de densidad de la normal

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\cdot(x-\mu)^2}$$

la función de verosimilitud para la muestra $x_1, x_2, \dots x_n$ es:

$$L_\theta(x_1, x_2, \dots x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{\pi}\,\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\cdot(x_i-\mu)^2}$$

es decir:

$$L_\theta(x_1, x_2, \cdots x_n) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\,\sigma)^n} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

Por lo tanto

$$z = \ln L_\theta(x_1, x_2, \cdots x_n) = -n \ln(\sqrt{2\pi}\,\sigma) - \frac{1}{2\sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

· Máxima verosimilitud para μ

$$\frac{\partial z}{\partial \mu} = 0 \Rightarrow + \frac{1}{2\sigma^2} \cdot 2 \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n}\mu = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu = 0 \Rightarrow \mu = \frac{\sum x_i}{n}$$

$$\Rightarrow \hat{\mu} = \bar{x}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \mu^2} = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} -1 \Rightarrow -\frac{n}{\sigma^2} < 0 \quad (\text{máximo})$$

Luego $\hat{\mu}_{EMV} = \bar{x} = 300$

Máxima verosimilitud para σ

$$\frac{\partial z}{\partial \sigma} = -n \cdot \frac{1}{\cancel{\sqrt{2\pi}}\,\sigma} \cdot \cancel{\sqrt{2\pi}} + \frac{\cancel{4}\sigma}{\cancel{4}\sigma^4} \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum (x_i-\mu)^2 = 0$$

$$-n\sigma^2 + \sum (x_i-\mu)^2 = 0 \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overset{=\bar{x}}{\mu})^2}{n} = 1360$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \sigma^2} = \frac{n}{\sigma^2} - \frac{3}{\sigma^4} \cdot \sum (x_i-\mu)^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \sigma^2}\left(\sqrt{\frac{\sum (x_i-\mu)^2}{n}}\right) = \frac{n^2}{\sum (x_i-\mu)^2} - \frac{3n^2}{\sum (x_i-\mu)^2} < 0 \quad (\text{máximo})$$

10º Considere una m.a.s. extraida de una población $N(\mu, \sigma)$

a) Calcule la cota FCR para los estimadores insesgados de μ.

b) Demuestre que la media muestral es un estimador eficiente de la poblacional

c) Demuestre que la cuasivarianza muestral no es un estimador eficiente de σ^2 sabiendo que la cota FCR para σ^2 es $\dfrac{2\sigma^4}{n}$

a) La función de verosimilitud de la normal es

$$L(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\cdot(x-\mu)^2}$$

$$z = \ln L(x) = -\ln(\sqrt{2\pi}\,\sigma) - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \mu} = \frac{x-\mu}{\sigma^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial \mu^2} = -\frac{1}{\sigma^2}$$

La cota de Frêchet-Cramer-Rao de μ es:

$$\text{cota FCR}(\mu) = \frac{\left(\dfrac{\partial h(\mu)}{\partial \mu}\right)^2}{-nE\left[\dfrac{\partial^2 \ln L(x)}{\partial \mu^2}\right]} \qquad h(\mu) = \mu \Rightarrow \frac{\partial h(\mu)}{\partial \mu} = 1$$

Por lo tanto

$$\text{cota FCR}(\mu) = \frac{1}{\dfrac{n}{\sigma^2}} = \frac{\sigma^2}{n}$$

b) Si $x_1, x_2, \dots x_n$ es una muestra a.s. entonces

$\bar{x} = \dfrac{\sum_1^n x_i}{n}$ es un estimador insesgado de μ ya que:

$$E[\bar{x}] = E\left[\frac{\sum x_i}{n}\right] = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} E(x_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu = \frac{1}{n}\cdot n\mu$$

$$\Rightarrow E[\bar{x}] = \mu$$

Además

$Var[\bar{x}] = Var\left[\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right] = \dfrac{1}{n^2} Var\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right]$ y como

los x_i son independientes

$Var[\bar{x}] = \dfrac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} Var[x_i] = \dfrac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = \dfrac{1}{n^2} \cdot n\sigma^2 = \dfrac{\sigma}{n}$

Se verifica $var[\bar{x}] = \text{Cota } FCR(\mu) \Rightarrow \bar{x}$ es un estimador eficiente de $\mu \Rightarrow \bar{x}$ es eimvu

c) Veamos que la cuasivarianza muestral es un estimador insesgado para la varianza poblacional

Sabemos que $n S^2 = (n-1) S_c^2 \Rightarrow S^2 = \dfrac{n-1}{n} S_c^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow E[S^2] = \left(\dfrac{n-1}{n}\right) \cdot E[S_c^2]$

La relación entre la varianza muestral y la varianza poblacional es:

$S^2 = \dfrac{n-1}{n} \sigma^2$

$E[S^2] = \left[\dfrac{n-1}{n}\right] \cdot \sigma^2 \Rightarrow \cancel{\dfrac{n-1}{n}} \cdot E[S_c^2] = \cancel{\dfrac{n-1}{n}} \sigma^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow E[S_c^2] = \sigma^2 \Rightarrow S_c^2$ es insesgado para σ^2

Según el lema de Fisher

$\dfrac{n S^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2_{n-1} \Rightarrow Var\left[\dfrac{nS^2}{\sigma^2}\right] = 2(n-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow Var\left[\dfrac{(n-1) S_c^2}{\sigma^2}\right] = 2(n-1) \Rightarrow \dfrac{(n-1)^{\cancel{2}}}{\sigma^4} Var[S_c^2] = 2\cancel{(n-1)}$

$\Rightarrow Var[S_c^2] = \dfrac{2\sigma^4}{n-1} \neq \text{Cota } FCR = \dfrac{2\sigma^4}{n} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_c^2$ no es eficiente.

→ Difícil

11º Sea una m.a.s. extraída de una población con distribución exponencial de parámetro α (esto es, con distribución $G(\alpha, 1)$)

a) Demuestre que $\frac{n-1}{n\bar{x}} = \frac{n-1}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$ es un estimador insesgado de α con varianza $\frac{\alpha^2}{n-2}$

Antes de nada recordemos la función euleriana de 1ª especie o función gamma (no confundir con distribución gamma)

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} \cdot e^{-x} dx$$

Si $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \Gamma(n) = (n-1)!$

Sea $x_1, x_2, \dots x_n$ una m.a.s. Si el estimador de α

$$T(x_1, x_2, \dots x_n) = \frac{n-1}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$ es insesgado entonces se

debe cumplir que $E[T] = E\left[\frac{n-1}{\sum x_i}\right] = (n-1) E\left[\frac{1}{\sum x_i}\right] = \alpha$

El problema es que no sabemos como se distribuye

$\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$, tan solo sabemos que $x_i \rightsquigarrow Exp(\alpha) = G(\alpha, 1)$

Como $G(\alpha, 1)$ es reproductiva si $x_i \rightsquigarrow G(\alpha, 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow Y = \sum_{i=1}^{n} x_i \rightsquigarrow G(\alpha, n)$. Por lo tanto podemos

poner que $E\left[\frac{1}{Y}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{y} \cdot f(y) dx$ donde f es

la función de densidad de $G(\alpha, n)$

$$f(y) = \begin{cases} \frac{\alpha^n}{\Gamma(n)} \cdot e^{-\alpha y} \cdot y^{n-1} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Entonces

$$E\left[\frac{1}{Y}\right] = \int_0^{\infty} \frac{1}{y} \cdot \frac{\alpha^n}{\Gamma(n)} \cdot e^{-\alpha y} \cdot y^{n-1}\, dy$$

$$E\left[\frac{1}{Y}\right] = \frac{\alpha^n}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} y^{n-2} \cdot e^{-\alpha y}\, dy \quad \left\{\begin{array}{l} t = \alpha y \Rightarrow y = \frac{t}{\alpha} \\ dy = \frac{1}{\alpha}\, dt \end{array}\right\}$$

$$E\left[\frac{1}{Y}\right] = \frac{\alpha^n}{\Gamma(n)} \cdot \int_0^{\infty} \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{n-2} \cdot e^{-t} \cdot \frac{1}{\alpha}\, dt = \frac{\alpha}{\Gamma(n)} \cdot \int_0^{\infty} t^{(n-1)-1} \cdot e^{-t}\, dt =$$

$$= \frac{\alpha}{\Gamma(n)} \cdot \Gamma(n-1) = \frac{\alpha}{(n-1)!} \cdot (n-2)! = \frac{\alpha}{n-1}$$

Por lo tanto $E\left[\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} X_i}\right] = \frac{\alpha}{n-1}$

Luego:

$$E[T(X_1, X_2, \dots X_n)] = (n-1) \cdot E\left[\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} X_i}\right] = (n-1) \cdot \frac{\alpha}{n-1} = \alpha$$

$\Rightarrow T(X_1, X_2, \dots X_n) = \dfrac{n-1}{\sum_{i=1}^{n} X_i}$ es estimador insesgado de α.

Para obtener la varianza de $T(X_1 \dots X_n) = \dfrac{n-1}{\sum_{i=1}^{n} X_i}$:

$$Var[T] = Var\left[\frac{n-1}{\sum_{i=1}^{n} X_i}\right] = (n-1)^2 \cdot Var\left[\frac{1}{Y}\right] \quad Y \rightsquigarrow G(\alpha, n)$$

$$Var\left[\frac{1}{Y}\right] = E\left[\left(\frac{1}{Y}\right)^2\right] - \left[E\left(\frac{1}{Y}\right)\right]^2$$

$$E\left[\frac{1}{Y^2}\right] = \int_0^{\infty} \frac{\alpha^n}{\Gamma(n)} \cdot e^{-\alpha y} \cdot y^{n-1} \cdot \frac{1}{y^2}\, dy =$$

$$E\left[\frac{1}{Y^2}\right] = \frac{\alpha^n}{\Gamma(n)} \cdot \int_0^{\infty} e^{-\alpha y} \cdot y^{n-3}\, dy \quad \left\{\begin{array}{l} t = \alpha y \\ y = \frac{t}{\alpha} \\ dy = \frac{1}{\alpha}\, dt \end{array}\right\}$$

$$E\left[\frac{1}{y^2}\right] = \frac{\alpha^n}{\Gamma(n)} \cdot \int_0^\infty \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{n-3} \cdot e^{-t} \cdot \frac{1}{\alpha}\, dt =$$

$$E\left[\frac{1}{y^2}\right] = \frac{\alpha^2}{\Gamma(n)} \int_0^\infty t^{n-3} \cdot e^{-t}\, dt = \frac{\alpha^2}{\Gamma(n)} \int_0^\infty t^{(n-2)-1} \cdot e^{-t} dt$$

$$E\left[\frac{1}{y^2}\right] = \frac{\alpha^2}{\Gamma(n)} \cdot \Gamma(n-2)$$ con lo que

$$E\left[\frac{1}{y^2}\right] = \frac{\alpha^2}{(n-1)!} \cdot (n-3)! = \frac{\alpha^2 \cdot \cancel{(n-3)(n-2)\cdots 2\cdot 1}}{(n-1)(n-2)\cdot \cancel{(n-3)\cdots 2\cdot 1}}$$

$$E\left[\frac{1}{y^2}\right] = \frac{\alpha^2}{(n-1)(n-2)}$$

Entonces:

$$\operatorname{Var}\left[\frac{1}{y}\right] = E\left[\left(\frac{1}{y}\right)^2\right] - \left(E\left[\frac{1}{y}\right]\right)^2$$

$$\operatorname{Var}\left[\frac{1}{y}\right] = \frac{\alpha^2}{(n-1)(n-2)} - \frac{\alpha^2}{(n-1)^2} = \frac{\alpha^2(n-1) - \alpha^2(n-2)}{(n-1)^2(n-2)}$$

$$\operatorname{Var}\left[\frac{1}{y}\right] = \frac{\cancel{\alpha^2 n} - \cancel{\alpha^2} - \cancel{\alpha^2 n} + 2\alpha^2}{(n-1)^2 \cdot (n-2)} = \frac{\alpha^2}{(n-1)^2(n-2)}$$

Entonces:

$$\operatorname{Var}[T] = (n-1)^2 \cdot \operatorname{Var}\left[\frac{1}{y}\right] = \frac{\alpha^2}{n-2}$$

b) Demuestre que la cota FCR de α vale $\frac{\alpha^2}{n}$

La cota FCR(α) vale:

$$\text{Cota FCR}(\theta) = \frac{\left(\frac{d h(\theta)}{d\theta}\right)^2}{-n\, E\left[\frac{\partial^2 \ln L_\theta(x)}{\partial \theta^2}\right]}$$

Como $h(\alpha) = \alpha \Rightarrow \frac{d h(\alpha)}{d\alpha} = 1.$

La función de verosimilitud de la exponencial de parámetro α vale:

$$L_\alpha(x) = \alpha \cdot e^{-\alpha x}$$

$$\ln L_\alpha(x) = \ln \alpha - \alpha x$$

$$\frac{\partial \ln L_\alpha(x)}{\partial \alpha} = \frac{1}{\alpha} - x \Rightarrow \frac{\partial^2 \ln L_\alpha(x)}{\partial \alpha^2} = -\frac{1}{\alpha^2}$$

Luego:

$$\text{Cota FCR}(\alpha) = \frac{1}{-n \cdot E\left[-\frac{1}{\alpha^2}\right]} = \frac{\alpha^2}{n}$$

c) Sabiendo que se puede demostrar que el estimador indicado anteriormente es el estimador insesgado de mínima varianza, ¿qué concluiría acerca del teorema de FCR aplicado a esta situación?

Se verifica que $\text{Cota FCR}(\alpha) \leq Var[T]$ ya que

$$\frac{\alpha^2}{n} \leq \frac{\alpha^2}{n-2} = Var[T]$$

El teorema se cumple, lo que pasa es que no se alcanza la cota FCR

d) En unas pruebas para determinar la distribución de tiempo de vida de unas rotativas se obtienen los siguientes resultados medidos en meses: 9, 15, 8, 25, 6, 17, 23, 5. Si se piensa que la distribución de esa variable se ajusta a un modelo exponencial de parámetro α, estime este mediante el método de los momentos y el de máxima verosimilitud.

Método de los momentos

$$\alpha_1(\alpha) = a_1 \Rightarrow E[X] = \bar{x} \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = \bar{x} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\bar{x}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{8}{108} = 0'074.$$

Método de máxima verosimilitud.

La función de verosimilitud es

$$L\alpha(x_1, x_2, \dots x_n) = \prod_{i=1}^{n} \lambda \cdot e^{-\lambda x_i} = \lambda^n \cdot e^{-\lambda \sum_i^n x_i}$$

$$\ln L\alpha(x_1, x_2, \dots x_n) = n \ln \alpha - \alpha \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\frac{\partial \ln L\alpha}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L\alpha}{\partial \alpha^2} = \frac{-n}{\alpha^2} < 0 \quad \text{máximo.}$$

luego

$$\hat{\alpha}_{EMV} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{8}{108} = 0'074.$$

e) Compruebe que el estimador máximo verosímil que obtuvo en d) no es igual al estimador de a) lo que sabemos acerca del comportamiento asintótico del estimador máximo-verosímil nos lleva a asegurar que su varianza se aproxima en el infinito a la cota FCR por lo que podría llegar un momento en el que su varianza fuera menor que la del estimador de a). ¿Entraría esta última afirmación en contradicción con lo que se afirmó en c) acerca de cual es el estimador insesgado de mínima varianza?

El estimador del apartado a) es $\hat{\alpha} = \frac{n-1}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$ y el del apartado d) es $\hat{\alpha}_{EMV} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$

Se cumple que $Var[\hat{\alpha}] < Var[\hat{\alpha}_{EMV}]$

Sabemos por apartados anteriores que:

$$Var\left[\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} X_i}\right] = \frac{\alpha^2}{(n-1)^2(n-2)}$$. Entonces:

$$Var[\hat{\alpha}_{EMV}] = Var\left[\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i}\right] = n^2 \cdot \frac{\alpha^2}{(n-1)^2(n-2)}$$

$$Var[\hat{\alpha}_{EMV}] = \frac{n^2}{(n-1)^2} \cdot Var[\hat{\alpha}]$$

Como $\frac{n^2}{(n-1)^2} > 1 \Rightarrow Var[\hat{\alpha}_{EMV}] > Var[\hat{\alpha}]$.

$$\lim_{n\to\infty} Var[\hat{\alpha}_{EMV}] = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n-1)^2} Var[\hat{\alpha}] = Var[\hat{\alpha}]$$

A pesar de que para $n \to \infty$ los valores de la varianza del estimador $\hat{\alpha}$ del apartado a) y el de $\hat{\alpha}_{EMV}$ coinciden, está claro que siempre se verifica que $Var[\hat{\alpha}_{EMV}] = Var[\hat{\alpha}]$, no hay posibilidad de infringir el Teorema de Frêchet-Cramer-Rao.

12) Considere una población $U(0,\theta)$ definida para $\theta > 0$.

a) Demuestre que el estadístico $\frac{n+1}{n} \max\{X_1, X_2, \dots X_n\}$ definido a partir de una m.a.s es insesgado de θ y tiene una varianza igual a $\frac{\theta^2}{n(n+2)}$

b) Calcule la cota de FCR. ¿Se viola en este caso la tesis del teorema correspondiente? En caso afirmativo, ¿cuál es la razón de que esto ocurra?

Vamos a calcular la función de densidad de $T(X_1, X_2, \dots X_n) = \max\{X_1, X_2, \dots X_n\}$. Recordemos que la función de densidad de X es:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & \text{si } 0 < x < \theta \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

La función de distribución de T es:

$F_T(t) = P[T < t] = P[\max\{x_1, x_2, \dots x_n\} < t] =$

$= P[x_1 < t, x_2 < t, \dots x_n < t]$. Como las x_i son independiente:

$$F_T(t) = \prod_{i=1}^{n} P[x_i < t] = \prod_{i=1}^{n} \left[\int_0^t \frac{1}{\theta}\, dt\right] \quad 0 < t < \theta$$

$$F_T(t) = \prod_{i=1}^{n} \frac{t}{\theta} = \left(\frac{t}{\theta}\right)^n \quad \text{si } 0 < t < \theta$$

Luego la función de densidad de T es:

$$f_T(t) = \begin{cases} n \cdot \frac{t^{n-1}}{\theta^{n-1}} \cdot \frac{1}{\theta} & \text{si } 0 < t < \theta \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

$$f_T(t) = F_T'(t) = \begin{cases} \frac{n}{\theta^n} \cdot t^{n-1} & \text{si } 0 < t < \theta \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

$$E[T] = \int_0^\theta t \cdot \frac{n}{\theta^n} \cdot t^{n-1}\, dt = \frac{n}{\theta^n} \cdot \int_0^\theta t^n\, dt$$

$$E[T] = \frac{n}{\theta^n} \cdot \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^\theta = \frac{n}{\theta^n} \cdot \frac{\theta^{n+1}}{n+1} = \frac{n\theta}{n+1}$$

Se tiene que:

$$E\left[\frac{n+1}{n} \cdot \max\{x_1, x_2, \dots x_n\}\right] = \frac{n+1}{n} \cdot E[T] = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n\theta}{n+1} = \theta$$

$\Rightarrow \frac{n+1}{n} \cdot \max\{x_1, x_2, \dots x_n\}$ es insesgado para θ.

Hallemos ahora la varianza de $T = \max\{x_1, x_2 \dots x_n\}$

$$Var[T] = E[T^2] - (E(T))^2$$

$$E[T^2] = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \cdot f_T(t)\, dt = \int_0^{\theta} \frac{n}{\theta^n} \cdot t^{n-1} \cdot t^2\, dt$$

$$E[T^2] = \frac{n}{\theta^n} \cdot \int_0^{\theta} t^{n+1}\, dt = \frac{n}{\theta^n} \cdot \left. \frac{t^{n+2}}{n+2} \right|_0^{\theta}$$

$$E[T^2] = \frac{n \cdot \theta^{n+2}}{\theta^n \cdot (n+2)} = \frac{n \cdot \theta^2}{n+2}$$

luego $\displaystyle Var[T] = \frac{n \cdot \theta^2}{n+2} + \left(\frac{n\theta}{n+1}\right)^2 = \frac{n\theta^2}{n+2} + \frac{n^2\theta^2}{(n+1)^2}$

Entonces

$$Var\left[\frac{n+1}{n} \cdot \max\{x_1, x_2, \ldots x_n\}\right] = \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot Var[T]$$

$$Var\left[\frac{n+1}{n} \max\{x_1, x_2, \ldots x_n\}\right] = \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \left[\frac{n\theta^2}{n+2} - \frac{n^2\theta^2}{(n+1)^2}\right]$$

$$Var\left[\frac{n+1}{n} \cdot \max\{x_1, x_2, \ldots x_n\}\right] = \frac{(n+1)^2 \cdot \theta^2}{n(n+2)} - \theta^2 = \frac{\theta^2}{n(n+2)}$$

b)

$$\text{Cota FCR} = \frac{\left(\frac{\partial h(\theta)}{\partial \theta}\right)^2}{-n \cdot E\left[\frac{\partial^2 \ln L_\theta(x)}{\partial \theta^2}\right]}$$

En este caso $h(\theta) = \theta \Rightarrow \dfrac{\partial h(\theta)}{\partial \theta} = 1$

$$L_\theta(x) = \frac{1}{\theta} \Rightarrow \ln L_\theta(x) = \ln \frac{1}{\theta} = -\ln \theta$$

$$\frac{\partial \ln L_\theta(x)}{\partial \theta} = -\frac{1}{\theta} \Rightarrow \frac{\partial^2 \ln L_\theta(x)}{\partial \theta^2} = \frac{1}{\theta^2}$$

Entonces:

$$\text{cota FCR}(\theta) = \frac{1}{-n \cdot \frac{1}{\theta^2}} = -\frac{\theta^2}{n}$$

No se puede aplicar el T. FCR ya que no se cumplen las condiciones de regularidad. al depender el campo de variación de X del parámetro θ

13 Sea una m.a.s. de una v.a. uniforme en el intervalo $(\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2})$. ¿Se puede decir que el estimador máximo-verosímil de θ está bien definido en este caso?

La función de densidad de $U(\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2})$ es

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta - \frac{1}{2} < x < \theta + \frac{1}{2} \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

La función de verosimilitud es entonces $L_\theta(X) = 1$ $\Rightarrow$ $Z = \ln L_\theta(x) = 0$. Esta función es constante, su valor máximo sería cualquier valor de X comprendido entre $\theta - \frac{1}{2}$ y $\theta + \frac{1}{2}$. El estimador máximo verosímil de θ no está bien definido por no ser único.

14.- La demanda de automóviles de una determinada marca es una v.a. discreta con función de probabilidad:

$$P_\theta(X = x) = \theta \cdot (1-\theta)^{x-1} \text{ si } x = 1, 2, \dots \text{ con } 0 < \theta < 1.$$

Con objeto de satisfacer el mayor número de clientes posibles, interesa conocer θ, para lo que se realiza un muestreo entre 7 concesionarios de dicha marca. Los resultados son los siguientes (expresados en número de automóviles): 8, 9, 5, 4, 10, 6, 7. Estimar valores para θ empleando para ello tanto el método de los momentos como el máximo-verosímil

Método de los momentos

$\alpha_1(\theta) = a_1 \Rightarrow E[X] = \overline{X}$

$$E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot \theta \cdot (1-\theta)^{x_i - 1}$$

$$E[X] = \theta \cdot \sum_{i=1}^{\infty} x_i (1-\theta)^{x_i - 1}$$

Como $x = 1, 2, 3, \ldots$ podemos tomar $x_i = i$ de modo que

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i (1-\theta)^{x_i - 1} = \sum_{x_i=1}^{\infty} x_i (1-\theta)^{x_i-1} = \sum_{x=1}^{\infty} x (1-\theta)^{x-1}$$

Veamos como se suma esta serie

Como $|1-\theta| < 1$ ya que $0 < \theta < 1$ $\sum_{x=1}^{\infty} (1-\theta)^x$ es una serie geométrica convergente cuya suma vale:

$$\sum_{x=1}^{\infty} (1-\theta)^x = \frac{1-\theta}{1-(1-\theta)} = \frac{1-\theta}{\theta}$$

Si derivamos respecto a θ y teniendo en cuenta que la derivada de una suma es igual a la suma de las derivadas:

$$\frac{d}{d\theta}\left(\sum_{x=1}^{\infty} (1-\theta)^x \right) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1-\theta}{\theta} \right)$$

$$-\sum_{x=1}^{\infty} x (1-\theta)^{x-1} = \frac{-\theta-(1-\theta)}{\theta^2} = \frac{-1}{\theta^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{x=1}^{\infty} x (1-\theta)^{x-1} = \frac{1}{\theta^2}$$

luego:

$$\alpha_1(\theta) = E[X] = \theta \cdot \sum_{i=1}^{\infty} x_i (1-\theta)^{x_i-1} = \theta \cdot \frac{1}{\theta^2} = \frac{1}{\theta}$$

Entonces $\alpha_1(\theta) = a_1 \Rightarrow \frac{1}{\theta} = \bar{x} \Rightarrow \theta = \frac{1}{\bar{x}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \hat{\theta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

. En nuestro caso, con la muestra de tamaño 7 tenemos

$$\hat{\theta} = \frac{7}{49} = \frac{1}{7}$$

Ahora vamos a estimar θ por el método de máxima verosimilitud

$$P_\theta(X=x) = \theta\,(1-\theta)^{x-1} \qquad x = 1,2,3,\dots \qquad 0<\theta<1.$$

La función de verosimilitud de la m.a.s. $X_1, X_2 \dots X_n$ es:

$$L_\theta(x_1, x_2, \dots x_n) = \prod_{i=1}^{n} \theta\,(1-\theta)^{x_i-1}$$

$$z = \ln L_\theta(x_1, x_2, \dots x_n) = \sum_{i=1}^{n} \ln\theta + (x_i-1)\cdot\ln(1-\theta)$$

$$\frac{\partial z}{\partial\theta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} + \frac{x_i-1}{1-\theta}(-1) = \frac{n}{\theta} - \frac{1}{1-\theta}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-1) = 0$$

$$\frac{n}{\theta} = \frac{1}{1-\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-1)$$

$$n - n\theta = \theta\sum_{i=1}^{n}(x_i-1)$$

$$\left(n+\sum_{i=1}^{n}(x_i-1)\right)\theta = n \Rightarrow \theta = \frac{n}{n+\sum_{i=1}^{n}(x_i-1)}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2} = -\frac{n}{\theta} - \frac{1}{(1-\theta)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-1) < 0 \quad \text{máximo.}$$

Luego:

$$\hat{\theta}_{EMV} = \frac{n}{n+\sum_{i=1}^{n}(X_i-1)}$$

En nuestro caso:

$$\hat{\theta}_{EMV} = \frac{7}{7+42} = \frac{7}{49} = \frac{1}{7}$$

15.º a) Defina correctamente los tres conceptos siguientes: parámetro poblacional, estadístico muestral, estimador y estimación.

* Parámetro poblacional: es un valor asociado a una población, conocido o no, que aparece en la función de probabilidad o densidad de la población

Por ejemplo si X = nº de caras que aparecen en el lanzamiento de una moneda que puede estar trucada. X puede tomar el valor 0 ó el valor 1. Si p es la probabilidad de obtener cara (no tiene porqué ser $\frac{1}{2}$) ⇒ (1−p) es la probabilidad de obtener cruz la función de probabilidad es:

$$P[X=x] = p^x \cdot (1-p)^{1-x} = \left(\frac{p}{1-p}\right)^x \cdot (1-p)$$

El parámetro de la población es p en este caso.

* Estadístico muestral: si consideramos la muestra de tamaño n $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ como una variable aleatoria n-dimensional $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ el estadístico muestral es cualquier función en la forma:

$$T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x_1, x_2, \ldots x_n) \longrightarrow T(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

* Estimador: es un estadístico muestral $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que verifica que su campo de variación (conjunto de valores que puede tomar T, es decir el conjunto $\{t \in \mathbb{R} \,/\, T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = t\}$) está contenido en el espacio paramétrico (conjunto de valores que puede tomar el parámetro)

* Estimación: es el valor que toma el estimador en una realización muestral.

b) Se analizan dos variables normales X e Y con medias distintas μ_1 y μ_2 respectivamente y con la misma varianza σ^2

Se toman sendas mm. aa. s.s. independientes de ambas, las dos de igual tamaño $X_1, X_2 \dots X_n$ e $Y_1, Y_2, \dots Y_n$. Conteste a las siguientes preguntas razonando sus respuestas:

b1) ¿Es la diferencia entre las dos medias muestrales un estimador insesgado y consistente de alguna cantidad poblacional? ¿De cuál? Demuestre y comente el resultado señalando las implicaciones que la consistencia e insesgadez tiene sobre el comportamiento de cualquier estimador

Si $X_i \rightsquigarrow N(\mu_1; \sigma) \Rightarrow \bar{X} \rightsquigarrow N(\mu_1, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

$Y \rightsquigarrow N(\mu_2, \sigma) \Rightarrow \bar{Y} \rightsquigarrow N(\mu_2, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

Como la distribución normal es reproductiva se verifica que $\bar{X} - \bar{Y} \rightsquigarrow N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$. Por tanto

$E[\bar{X} - \bar{Y}] = \mu_1 - \mu_2 = E[\bar{X}] - E[\bar{Y}]$, es un estimador insesgado la diferencia de medias para la media poblacional.

Ademas $T(X, Y) = \bar{X} - \bar{Y}$ es consistente en media cuadratica ya que:

$\lim_{n \to \infty} ECM(\bar{X} - \bar{Y}) = 0$, porque es insesgado

$\lim_{n \to \infty} [E[\bar{X} - \bar{Y}] - (\mu_1 - \mu_2)] = 0$ (bastaria con que fuese asintoticamente insesgado) y $\lim_{n \to \infty} Var[\bar{X} - \bar{Y}] = 0$

ya que $Var[X - y] = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} Var[\bar{X} - \bar{Y}] = 0$

Al ser $ECM[\bar{X} - \bar{y}] = Var[\bar{X} - \bar{Y}] + (E[\bar{X} - \bar{y}] - (\mu_1 - \mu_2))^2$

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} ECM[\bar{X} - \bar{Y}] = 0$

Si el estimador es insesgado nos garantiza que la esperanza (media poblacional) de ese estimador va a coincidir con el valor del parámetro en la población, es decir, que si tomaramos muchas muestras y estimáramos en cada una de ellas el parámetro poblacional, la media de esas estimaciones coincidiría con el parámetro poblacional.

Si el estimador es consistente en media cuadrática quiere decir que se comete poco error cuando se sustituye el valor estimado por el verdadero valor de la población que es desconocido

b2) Con el fin de estimar la varianza poblacional, es apropiado emplear la información de las dos muestras de manera combinada. Por ello se proponen los siguientes estimadores alternativos:

$$T_1 = \frac{S^2_{cx} + S^2_{cy}}{2} \qquad T_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}{2n-1}$$

Indique si cada uno de ellos es insesgado y cual de los dos tiene menor varianza.

Según el lema de Fisher

$$\frac{(n-1)}{\sigma^2} S^2_{cx} \rightsquigarrow \chi^2_{n-1} \quad , \quad \frac{(n-1)}{\sigma^2} \cdot S^2_{cy} \rightsquigarrow \chi^2_{n-1}$$

Al ser la distribución Ji-cuadrado reproductiva

$$\frac{n-1}{\sigma^2} S^2_{cx} + \frac{n-1}{\sigma^2} S^2_{cy} \rightsquigarrow \chi^2_{2(n-1)}$$ y por lo tanto

$$Var\left[\frac{n-1}{\sigma^2} S^2_{cx} + \frac{n-1}{\sigma^2} S^2_{cy}\right] = 2 \cdot [2(n-1)] = 4(n-1)$$

Luego:

$$Var\left[\frac{n-1}{\sigma^2}(S^2_{cx} + S^2_{cy})\right] = 4(n-1) \Rightarrow \frac{(n-1)^2}{\sigma^4} Var[S^2_{cx}+S^2_{cy}] =$$

$= 4(n-1)$ con lo que:

$$Var[S^2_{cx} + S^2_{cy}] = \frac{4(n-1)\cdot\sigma^4}{(n-1)^2} = \frac{4\sigma^4}{n-1}$$

$$Var[S^2_{cx} + S^2_{cy}] = \frac{4\sigma^4}{n-1} \Rightarrow Var\left[\frac{S^2_{cx}+S^2_{cy}}{2}\right] = \frac{\sigma^4}{n-1}$$

Como $S_x^2 = \dfrac{\sum (x_i-\bar{x})^2}{n} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (x_i-\bar{x})^2 = n\, S_x^2$

De igual forma $\sum_{i=1}^{n} (y_i-\bar{y})^2 = n \cdot S_y^2$

Además sabemos que $\dfrac{n S_x^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2_{n-1}$ $\dfrac{n S_y^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2_{n-1}$

$$\frac{n}{\sigma^2} (S_x^2 + S_y^2) \rightsquigarrow \chi^2_{2(n-1)}$$

$$Var \left[\frac{n}{\sigma^2} (S_x^2 + S_y^2) \right] = 4(n-1)$$

$$\frac{n^2}{\sigma^4} Var [S_x^2 + S_y^2] = 4(n-1) \Rightarrow Var [S_x^2 + S_y^2] = \frac{4(n-1)\sigma^4}{n^2}$$

Tenemos que:

$$Var \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i-\bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{n} (y_i-\bar{y})^2}{2n-1} \right] = Var \left[\frac{n S_x^2 + n S_y^2}{2n-1} \right] =$$

$$= Var \left[\frac{n}{2n-1} (S_x^2 + S_y^2) \right] = \frac{n^2}{(2n-1)^2} Var [S_x^2 + S_y^2] =$$

$$= \frac{\cancel{n^2}}{(2n-1)^2} \cdot \frac{4(n-1)\cdot\sigma^4}{\cancel{n^2}} = \frac{4(n-1)\sigma^4}{(2n-1)^2}$$

El estimador $S_{cx}^2 + S_{cy}^2$ tiene menor varianza que el estimador:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i-\bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{n} (y_i-\bar{y})^2}{2n-1}$$

ya que $\dfrac{\sigma^4}{n-1} < \dfrac{4(n-1)\sigma^4}{(2n-1)^2}$ para $n \geq 9$.

Según hemos visto $\frac{n-1}{\sigma^2}(S^2_{cx}+S^2_{cy}) \rightsquigarrow \chi^2_{2(n-1)}$

Por tanto:

$$E\left[\frac{n-1}{\sigma^2}(S^2_{cx}+S^2_{cy})\right] = 2(n-1)$$

$$\frac{n-1}{\sigma^2}\cdot E[S^2_{cx}+S^2_{cy}] = 2(n-1) \Rightarrow E[S^2_{cx}+S^2_{cy}] = 2\sigma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E\left[\frac{S^2_{cx}+S^2_{cy}}{2}\right] = \frac{1}{2} E[S^2_{cx}+S^2_{cy}] = \frac{1}{2}\cdot 2\sigma = \sigma$$

Por tanto el estimador $\frac{S^2_{cx}+S^2_{cy}}{2}$ es insesgado para σ^2.

Según hemos visto anteriormente:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 + \sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2}{2n-1} = \frac{n S^2_x + n S^2_y}{2n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E\left[\frac{nS^2_x + nS^2_y}{2n-1}\right] = \frac{n}{2n-1}\cdot E[S^2_x + S^2_y]$$

Como $\frac{n}{\sigma^2}(S^2_x + S^2_y) \rightsquigarrow \chi^2_{2(n-2)}$

$$E\left[\frac{n}{\sigma^2}(S^2_x+S^2_y)\right] = \frac{n}{\sigma^2}\cdot E[S^2_x+S^2_y] = 2(n-2)$$

$$\Rightarrow E[S^2_x + S^2_y] = \frac{2(n-2)\cdot\sigma^2}{n}.$$ Entonces:

$$E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 + \sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2}{2n-2}\right] = \frac{\cancel{n}}{2n-2}\cdot\frac{2(n-2)}{\cancel{n}}\cdot\sigma^2 =$$

$$= \frac{2(n-1)\cdot\sigma^2}{2n-2} \neq \sigma^2$$ no es insesgado pero sí lo es asintóticamente ya que $\lim_{n\to\infty}\frac{2(n-1)}{2n-2}\sigma^2 = \sigma^2$.

16º Considere la familia de distribuciones $B(n,p)$ con n fija y conocida. ¿Es una familia exponencial?

Las distribuciones de la familia exponencial tienen como función de probabilidad o densidad las de la forma

$$f_\theta(x) \text{ ó } P_\theta(x) = a(\theta)\cdot b(x)\cdot e^{c(\theta)\cdot d(x)}$$, siendo θ

el parámetro de la distribución, $a(\theta)$ y $c(\theta)$ son dos funciones que tan sólo dependen de θ, $b(x)$ y $d(x)$ son funciones que tan sólo dependen de x.

La función de probabilidad de la binomial $B(n,p)$ es:

$$P[X=x] = \binom{n}{x} p^x \cdot (1-p)^{n-x} = \binom{n}{x} p^x \cdot \frac{(1-p)^n}{(1-p)^x}$$

$$P[X=x] = \binom{n}{x}\cdot\left(\frac{p}{1-p}\right)^x\cdot(1-p)^n = \binom{n}{x}\cdot(1-p)^n\cdot e^{\ln\left(\frac{p}{1-p}\right)^x}$$

Luego:

$$P[X=x] = \binom{n}{x}\cdot(1-p)^n\cdot e^{\ln\left(\frac{p}{1-p}\right)\cdot x}$$

$$a(p) = (1-p)^n \quad b(x) = \binom{n}{x} \quad c(p) = \ln\frac{p}{1-p} \quad d(x) = x$$

Luego la binomial $B(n,p)$ pertenece a la familia exponencial.

17º Al promedio de averías de una máquina se ha adaptado la siguiente densidad gamma:

$$f_\beta(x) = \begin{cases} \frac{1}{24} x^4 \beta^{-5}\cdot e^{-\frac{x}{\beta}} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$$

El parámetro β es una constante positiva de valor desconocido clave para la correcta especificación y se pide por ello su estimación máximo-verosímil para una muestra de tamaño n. Compruebe

además sus propiedades: suficiencia, insesgadez, eficiencia, mínima varianza y consistencia.
Veamos cual es la función de verosimilitud de la v.a.

$$L_\beta(x_1, x_2, \dots x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_\beta(x_i) = \prod_{i=1}^{n} x_i^4 \cdot \beta^{-5} \cdot e^{-\frac{x_i}{\beta}} \cdot \frac{1}{24}$$

$$L_\beta(x_1, x_2, \dots x_n) = \frac{\beta^{-5n}}{(24)^n} \cdot e^{-\frac{1}{\beta}\sum x_i} \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i^4$$

$$z = \ln L_\beta(x_1, x_2, \dots x_n) = -5n \ln\beta - n\ln 24 - \frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i^4.$$

C.N $\quad \frac{\partial z}{\partial \beta} = 0 \Rightarrow -\frac{5n}{\beta} + \frac{1}{\beta^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$

$$-5n\beta + \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \Rightarrow \beta = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{5n}$$

C.S. $\quad \frac{\partial^2 z}{\partial \beta^2} = \frac{5n}{\beta^2} - \frac{2}{\beta^3} \sum_{i=1}^{n} x_i$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \beta^2}\left(\frac{\sum x_i}{5n}\right) = \frac{5n}{\frac{(\sum x_i)^2}{25n^2}} - \frac{2}{\frac{(\sum x_i)^{\cancel{3}}}{125n^3}} \cancel{\sum x_i}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \beta^2}\left(\frac{\sum x_i}{5n}\right) = \frac{125n^3}{(\sum x_i)^2} - \frac{250n^3}{(\sum x_i)^2} < 0 \quad \text{(máximo)}$$

luego $\hat{\beta}_{EMV} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{5n}$

- $\hat{\beta}_{EMV}$ no es insesgado ya que:

$E[\hat{\beta}_{EMV}] = \frac{1}{5n} \sum_{i=1}^{n} E[x_i]$. Como $X_i \sim G(\beta, 5)$

$\Downarrow$

$p=5 \quad \Gamma(p) = 4! = 24$

$E[X_i] = \frac{5}{\beta}$. Entonces:

$$E[\hat{\beta}_{EMV}] = \frac{1}{5n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{5}{\beta} = \frac{1}{5n} \cdot \frac{5n}{\beta} = \frac{1}{\beta} \neq \beta.$$

por tanto $\hat{\beta}_{EMV}$ no es insesgado.

$f_\beta(x) = \frac{1}{24} x^4 \cdot \beta^{-5} \cdot e^{-\frac{1}{\beta}x}$ es de la familia exponencial ya que es de la forma:

$f_\beta(x) = a(\beta) \cdot b(x) \cdot e^{c(\beta) \cdot d(x)}$, en este caso:

$a(\beta) = \beta^{-5}$, $b(x) = \frac{1}{24} x^4$, $c(\beta) = -\frac{1}{\beta}$, $d(x) = x$. Por tanto según el teorema de la familia exponencial $T(X_1, X_2, \ldots X_n) = \sum_{i=1}^{n} d(x_i) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ es suficiente para β.

Como la función $m(x) = \frac{x}{5n}$ es inyectiva:

$m(x_1) = m(x_2) \Rightarrow \frac{x_1}{5n} = \frac{x_2}{5n} \Rightarrow x_1 = x_2$, entonces:

$m\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{5n}$ es suficiente para β

β_{EMV} no es eficiente ya que no es insesgado. Veamos si es de mínima varianza:

$$\text{cota FCR} = \frac{\left(\frac{\partial h(\beta)}{\partial \beta}\right)^2}{-nE\left(\frac{\partial^2 \ln L_\theta(x)}{\partial \theta^2}\right)}$$

$$h(\theta) = \theta \Rightarrow \frac{\partial h(\beta)}{\partial \beta} = 1.$$

$$\frac{\partial^2 \ln L_\beta}{\partial \beta^2} = ? \qquad L_\beta(x) = x^4 \cdot \beta^{-5} \cdot e^{-\frac{x}{\beta}} \cdot \frac{1}{24}$$

$$\ln L_\beta(x) = 4 \ln x - 5 \ln \beta - \ln 24 - \frac{1}{\beta} x.$$

$$\frac{\partial \ln L_\beta(x)}{\partial \beta} = -\frac{5}{\beta} + \frac{1}{\beta^2} x$$

$$\frac{\partial^2 \ln L_\beta(x)}{\partial \beta^2} = \frac{5}{\beta^2} - \frac{2}{\beta^3} x$$

$$E\left[\frac{\partial^2 \ln L_\beta(x)}{\partial \beta^2}\right] = \frac{5}{\beta^2} - \frac{2}{\beta^3} \cdot E[x] = \frac{5}{\beta^2} - \frac{10}{\beta^4}$$

Luego

$$\text{Cota FCR} = \frac{1}{-n\left(\frac{5}{\beta^2} - \frac{10}{\beta^4}\right)} = \frac{1}{-n \cdot \frac{5\beta^2 - 10}{\beta^4}} = \frac{\beta^4}{n(10 - 5\beta^2)}$$

Al ser $\hat{\beta}_{EMV} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{5n} \Rightarrow Var[\hat{\beta}_{EMV}] = Var\left[\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{5n}\right]$

Varianza de $G(\beta, 5)$

$$= \frac{1}{25n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} Var[x_i] = \frac{1}{25n^2} \cdot \frac{5}{\beta^2} = \frac{1}{5(n\beta)^2}$$

Como $Var[\hat{\beta}_{EMV}] \neq$ Cota FCR no podemos asegurar que este estimador sea de mínima varianza.

Por último veamos la consistencia de $\hat{\beta}_{EMV}$.

El sesgo de $\hat{\beta}_{EMV}$ es $= E[\hat{\beta}_{EMV}] - \beta = \left(\frac{1}{\beta} - \beta\right)$

Como $ECM(\hat{\beta}_{EMV}) = Var[\hat{\beta}_{EMV}] + (\text{Sesgo}(\hat{\beta}_{EMV}))^2$

$$\Rightarrow ECM(\hat{\beta}_{EMV}) = \frac{1}{5n^2\beta^2} + \left(\frac{1}{\beta} - \beta\right)^2$$

$$\lim_{n\to\infty} ECM(\hat{\beta}_{EMV}) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5n^2\beta^2} + \left(\frac{1}{\beta} - \beta\right)^2\right) =$$

$= \left(\frac{1}{\beta} - \beta\right)^2 \Rightarrow \hat{\beta}_{EMV}$ no es consistente en media cuadrática.

18. Este ejercicio está resuelto en la teoría del tema 2

19. Sea X una v.a. con función de densidad $f_\theta(x) = \dfrac{x \cdot e^{-\frac{x}{\theta}}}{\theta^2}$ si $x > 0$ siendo θ una constante real positiva desconocida. Sea $x_1, x_2, \ldots, x_n$ una m.a.s. de tamaño n extraída de la población.

a) Razone porqué es esa familia de distribuciones exponencial. Demuestre la relación existente entre la familia exponencial y los estadísticos suficientes. Obtenga un estadístico suficiente para el parámetro θ utilizando tanto la relación que ha demostrado como el criterio de factorización.

Esta distribución es exponencial ya que su función de densidad se puede expresar de la forma:

$$f_\theta(x) = a(\theta) \cdot b(x) \cdot e^{c(\theta) \cdot d(x)}$$

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\theta^2} \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{\theta} \cdot x}$$, en este caso:

$$a(\theta) = \frac{1}{\theta^2} \; ; \quad b(x) = d(x) = x \; ; \quad c(\theta) = -\frac{1}{\theta}$$

El criterio de factorización dice que:

T es suficiente $\Longleftrightarrow f_\theta(x_1, x_2, \ldots x_n) = h(x_1, x_2, \ldots x_n) \cdot g_\theta(T(x_1, x_2 \ldots x_n))$

donde h es una función que tan solo depende de la muestra $\{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ y g_θ depende del parámetro θ y del valor que toma el estadístico T en esa muestra.

Si una distribución pertenece a la familia exponencial su función de densidad (o de probabilidad que lo mismo da) es de la forma

$f_\theta(x) = a(\theta) \cdot b(x) \cdot e^{c(\theta) \cdot dx}$. Por tanto la función de densidad conjunta es:

$$f_\theta(x_1, x_2, \dots x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) = \prod_{i=1}^{n} a(\theta)\cdot b(x_i)\cdot e^{c(\theta)\cdot d(x_i)}$$

es decir que $f_\theta(x_1, x_2, \dots x_n)$ se puede expresar como:

$$f_\theta(x_1, x_2, \dots x_n) = [a(\theta)]^n \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} b(x_i)\right) \cdot e^{c(\theta)\cdot \sum_{i=1}^{n} d(x_i)}$$

Si $T(x_1, x_2 \dots x_n) = \sum d(x_i)$ T sería suficiente para θ ya que por el criterio de factorización $f_\theta(x_1, x_2, \dots x_n)$ se podría expresar como el producto de una función que tan sólo depende de la muestra $h(x_1, x_2, \dots x_n) = \prod_{i=1}^{n} b(x_i)$ por otra función $g_\theta = [a(\theta)]^n \cdot e^{c(\theta)\cdot T(x_1, x_2, \dots x_n)}$ que tan sólo depende de θ y del valor que toma T en la muestra.

En nuestro caso, al ser $d(x) = x$ el estimador suficiente para θ sería:

$$T(x_1, x_2, \dots x_n) = \sum_{i=1}^{n} d(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i .$$

b) Obtenga el estimador máximo-verosímil de θ y el de $\frac{1}{\theta}$ y conteste a las siguientes preguntas demostrando siempre su respuesta:

b1) ¿Son dichos estimadores suficientes?

b2) ¿Insesgados? ¿Consistentes?

b3) ¿Insesgado de mínima varianza uniforme? Halle la correspondiente cota de FCR.

* Estimador de máxima verosimilitud de θ

La función de verosimilitud de θ es:

$$L_\theta(x_1, x_2, \dots x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i \cdot e^{-\frac{x_i}{\theta}}}{\theta^2} = \frac{1}{\theta^{2n}} \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$\ln L_\theta(x_1, x_2, \dots x_n) = \ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) - 2n \ln\theta - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

si derivamos respecto a θ:

$$\frac{\partial \ln L_\theta(x_1, x_2, \dots x_n)}{\partial \theta} = -2n \cdot \frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

$$-2n\theta + \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{2n}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L_\theta(x_1, x_2, \dots x_n)}{\partial \theta^2} = +\frac{2n}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^3} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\frac{\partial^2 \ln L_\theta(x_1, x_2, \dots x_n)}{\partial \theta^2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{2n}\right) = \frac{8n^3}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} - \frac{16n^3}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} < 0$$

Entonces $\hat{\theta}_{EMV} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{2n}$

La función de densidad podríamos escribirla en términos de $\beta = \frac{1}{\theta}$ como:

$f_\beta(x) = \beta^2 \cdot x \cdot e^{-\beta x}$. En este caso la función de verosimilitud es:

$$L_\beta(x_1, x_2, \dots x_n) = \prod_{i=1}^{n} \beta^2 \cdot x_i \cdot e^{-\beta x_i} = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot \beta^{2n} \cdot e^{-\beta \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Tomamos $\ln$:

$$z = \ln L_\beta(x_1, x_2, \dots x_n) = \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) + 2n \ln\beta - \beta \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\frac{\partial z}{\partial \beta} = \frac{2n}{\beta} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \Rightarrow \beta = \frac{2n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \beta^2} = \frac{-2n}{\beta^2} < 0$$ máximo. Entonces

$$\beta_{EMV} = \left(\frac{1}{\theta}\right)_{EMV} = \frac{2n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Veamos si $\theta_{EMV} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{2n}$ es insesgado, para ello necesitamos calcular $E[X]$.

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_\theta(x)\, dx = \int_0^{+\infty} x \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{\theta}x} \cdot \frac{1}{\theta^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{\theta^2} \cdot \int_0^{+\infty} x^2 \cdot e^{-\frac{1}{\theta}x}\, dx.$$

Calculamos la integral $\int x^2 \cdot e^{-\frac{1}{\theta}x} dx$ aplicando dos veces el método de integración por partes

$$\int x^2 \cdot e^{-\frac{1}{\theta}x} dx \left\{ \begin{array}{l} u = x^2 \Rightarrow du = 2x\, dx \\ dv = e^{-\frac{1}{\theta}x} dx \Rightarrow v = -\theta \cdot e^{-\frac{1}{\theta}x} \end{array} \right\} =$$

$$= -\theta x^2 e^{-\frac{1}{\theta}x} + 2\theta \cdot \int x \cdot e^{-\frac{1}{\theta}x} dx \left\{ \begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{-\frac{1}{\theta}x} dx \Rightarrow v = -\theta e^{-\frac{1}{\theta}x} \end{array} \right.$$

$$= -\theta x^2 e^{-\frac{1}{\theta}x} + 2\theta\left(-\theta x e^{-\frac{1}{\theta}x} + \theta \int e^{-\frac{1}{\theta}x} dx\right) =$$

$$= -\theta x^2 e^{-\frac{1}{\theta}x} - 2\theta^2 x e^{-\frac{1}{\theta}x} - 2\theta^3 \cdot e^{-\frac{1}{\theta}x} = -\theta e^{-\frac{1}{\theta}x}(x^2 - 2\theta x - 2\theta^2)$$

Por tanto:

$$\int_0^{+\infty} x^2 \cdot e^{-\frac{1}{\theta}x} dx = \left[-\theta e^{-\frac{1}{\theta}x}(x^2 - 2\theta x - 2\theta^2)\right]_0^{+\infty} = 2\theta^4$$

Entonces $E[X] = \frac{1}{\theta^2} \cdot 2\theta^3 = 2\theta$

Veamos que θ_{EMV} es insesgado

$$E[\theta_{EMV}] = E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{2n}\right] = \frac{1}{2n} \cdot \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \frac{1}{2n} \cdot \sum_{i=1}^{n} 2\theta$$

$$E[\theta_{EMV}] = \frac{1}{2n} \cdot 2n\theta = \theta$$

Como $\left(\frac{1}{\theta}\right)_{EMV} = \frac{2n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$ para ver si es insesgado necesitamos ver cuál es la función de densidad de la variable $T = \frac{1}{\sum_{1}^{n} X_i}$

• Función de distribución de T

$F_T(t) = P[T \leq t] = P$

quaderno
[illegible]