

PONCELET

El Día de Gloria

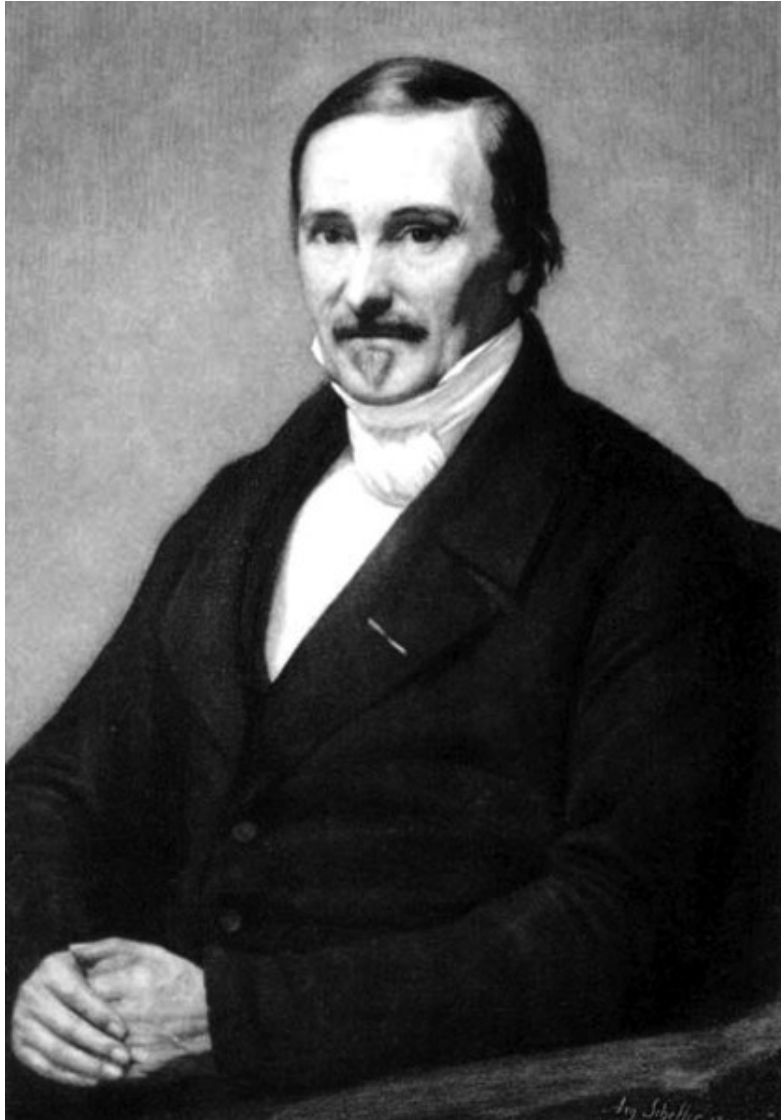
*La Geometría proyectiva nos ha abierto fácilmente
nuevos territorios en nuestra ciencia, y ha sido justamente
considerada como una carretera real para su campo
particular de conocimiento*

Más de una vez, durante la primera Gran Guerra, cuando las tropas francesas eran atacadas y no existía la posibilidad de reforzarlas, el alto mando pudo salvar la situación enviando a toda prisa hacia el frente a alguna gran artista, envuelta desde el cuello hasta los pies en la tricolor, para que cantara la Marsellesa ante los hombres agotados. Cumplido su papel, la artista volvía a París en su automóvil; las tropas fortalecidas avanzaban, y a la mañana siguiente, la prensa, cínicamente censurada, aseguraba al lector que "el día de la gloria ha llegado".

En 1812, el día de gloria estaba aún por venir. Las grandes artistas no acompañaban al medio millón de soldados de Napoleón Bonaparte en su marcha triunfal por el corazón de Rusia. Eran los hombres los que cantaban a medida que los rusos se retiraban ante el invencible ejército, y en las infinitas llanuras resonaba el vigoroso canto que había derrumbado a los tiranos de sus tronos y elevado a Napoleón al lugar que ocupaba.

Todo marchaba a pedir de boca y lo mejor que podía imaginar el más entusiasta de aquellos hombres: seis días antes de que Napoleón cruzara el Niemen, su brillante estrategia diplomática exasperó indirectamente al presidente Madison, lanzando a los Estados Unidos, a una guerra contra Inglaterra. Los rusos se retiraban hacia Moscú con la mayor rapidez, y el Gran Ejército tenía que acelerar su marcha para acercarse al enemigo que huía. En Borodino los rusos se detuvieron, combatieron y se retiraron. Napoleón continuó sin oposición, salvo la del terrible clima, hasta Moscú, donde notificó al Zar su voluntad de que las fuerzas rusas debían rendirse incondicionalmente. Los habitantes de Moscú, dirigidos por su gobierno, prendieron fuego a la ciudad, quemaron hasta la tierra, y Napoleón no encontró otra cosa que vacío y humo. Rencoroso, pero aun dueño de la situación, Napoleón no se cuidó del

antiguo proverbio, que por segunda o tercera vez se le atravesó en su carrera militar, "Quien a hierro mata a hierro muere". Ordenó el retorno por las ahora heladas planicies, para preparar su encuentro con Blücher en Leipzig, dejando al Gran Ejército en la disyuntiva de retirarse o de morir de frío.



Con el ejército francés abandonado se hallaba un joven oficial de ingenieros, Jean-Victor Poncelet (10 de julio 1788, 23 de diciembre 1867) que, como estudiante de la Escuela Politécnica de París y más tarde en la Academia Militar de Metz, se había inspirado en la nueva Geometría descriptiva de Monge (1746-1818) y en la *Géométrie de la position* (publicada en 1803) del anciano Carnot (Lazare-Nicolas

Marguerite Carnot, 13 de mayo, 1753, 2 de agosto, 1823), cuyo programa revolucionario aunque algo reaccionario había sido ideado para "libertar la Geometría de los jeroglíficos del Análisis".

En el prefacio de su clásica obra *Applications d'analyse et de géométrie* (segunda edición, 1862, de la obra primeramente publicada en 1822), Poncelet refiere sus recuerdos de la desastrosa retirada de Moscú. El 18 de noviembre de 1812, el agotado resto del ejército francés, dirigido por el mariscal Ney, era vencido en Krasnoï. Entre los supuestos muertos abandonados en los helados campos de batalla se hallaba el joven Poncelet. Su uniforme de oficial de ingenieros le salvó la vida. Un destacamento de soldados, al descubrir que aún respiraba, le condujo ante el Estado Mayor ruso para interrogarlo.

Como prisionero de guerra, el joven oficial tuvo que marchar durante casi cinco meses a través de las llanuras heladas, destrozado su uniforme, y alimentándose con una escasa ración de pan negro. Víctima de un frío tan intenso que con frecuencia congelaba el mercurio del termómetro, muchos de los compañeros de Poncelet murieron en el camino, pero su extraordinario vigor le permitió llegar, en marzo de 1813, a la prisión de Saratoff, en las orillas del Volga. Al principio estaba demasiado agotado para pensar. Pero cuando "el espléndido sol de abril", restableció su vitalidad, recordó que había recibido una buena educación matemática, y para suavizar los rigores de su exilio resolvió reproducir lo que pudiera de lo que había aprendido. Fue así como creó la Geometría proyectiva.

Sin libros y con escasos materiales para escribir, pudo ir recordando sus conocimientos y llevando lo que sabía de Matemática, desde la Aritmética a la Geometría superior y al Cálculo. Estos primeros trabajos, eran alentados por la actividad docente de Poncelet quien deseaba preparar a sus compañeros para los exámenes a que deberían someterse cuando volvieran a París. Se dice que al principio Poncelet tan sólo disponía de trozos de carbón recogidos en la pequeña estufa para trazar sus figuras en la pared de su celda. Poncelet hace la interesante observación de que prácticamente todos los detalles y complicados desarrollos de la Matemática se le habían borrado de la memoria, mientras los principios fundamentales y generales continuaban indelebles en su recuerdo. Lo mismo podía decirse de la física y de la mecánica.

En septiembre de 1814, Poncelet volvió a Francia acompañado del: *"material de siete libros de apuntes escritos en Saratoff en las prisiones de Rusia (1813 a 1814), en unión de otros diferentes escritos antiguos y nuevos"*, en los que el joven de 24 años había dado a la Geometría proyectiva su más fuerte impulso desde que Desargues y Pascal iniciaron la cuestión en el siglo XVII. La primera edición de su obra clásica fue publicada, como hemos dicho, en 1822. No comprendía la íntima "apología de su vida", utilizada después; pero iniciaba la tremenda oleada del siglo XIX hacia la Geometría proyectiva, la Geometría sintética moderna, y la interpretación geométrica, de los números "imaginarios" que se presentan en las manipulaciones algebraicas, dando a tales "imaginarios" interpretaciones geométricas como elementos "ideales" del espacio. Propone también el poderoso y (por un tiempo), discutido "principio de continuidad", que simplifica grandemente el estudio de las configuraciones geométricas, unificando propiedades al parecer inconexas de figuras para formar conjuntos uniformes y completos. Excepciones y, casos raros especiales aparecen en el amplio, punta de vista de Poncelet como aspectos simplemente diferentes de cosas ya familiares. El clásico tratado hace también uso del creador «principio de la dualidad" e introduce el método de "reciprocidad", ideado por el mismo Poncelet. Brevemente, todo un arsenal de nuevas armas fue añadido a la Geometría por el joven ingeniero militar que había sido abandonado, considerándolo muerto, en los campos de Krasnoï, y que seguramente hubiera muerto antes de llegar la mañana si su uniforme de oficial no hubiera despertado el deseo a quienes le recogieron de llevarle ante el Estado Mayor ruso para someterle a un interrogatorio.

Durante la siguiente década (1815-25) los deberes de Poncelet como ingeniero militar tan sólo le dejaron escasos momentos para su verdadera ambición, la aplicación de sus nuevos métodos en Geometría. El descanso tardó en venir muchos años. Su alto sentido del deber y su gran eficacia hicieron de Poncelet una fácil víctima de sus miopes superiores. Algunas de las tareas que realizó sólo pudieron ser hechas por un hombre de su calibre, por ejemplo la creación de la Escuela de mecánica práctica en Metz y la reforma de la educación matemática en la Politécnica. Pero los informes sobre fortificaciones, sus trabajos en el Comité de Defensa y la Presidencia de las secciones mecánicas en las exposiciones

internacionales de Londres y París (1851-58), por sólo mencionar algunos de los trabajos de rutina, podrían haber sido realizados y desempeñados por otros hombres. Sus grandes méritos científicos no fueron, sin embargo, menospreciados. La Academia de Ciencia le eligió (1831) como sucesor de Laplace. Por razones políticas Poncelet declinó el honor hasta transcurridos tres años.

Toda la vida madura de Poncelet fue un largo conflicto interno entre una mitad de su personalidad nacida para los trabajos perdurables, y la otra mitad que aceptaba todos los cargos vulgares que los políticos de corta visión y los obtusos militaristas le encomendaban. Poncelet hubiera deseado escapar, pero un falso sentido del deber le obligó a seguir a los ejércitos napoleónicos. El hecho de que no sufriera un precoz y permanente derrumbe nervioso es un testimonio de su vigor físico. Y el hecho de que conservara su capacidad creadora hasta casi los días de su muerte, ocurrida a los 79 años, es una brillante prueba de su indiscutible genio. Este hombre, dotado de un talento excepcional tuvo que recorrer toda Francia para inspeccionar las hilanderías de algodón, de seda y de lino. No se necesitaba a Poncelet para hacer esta clase de trabajos, y él lo sabía. Pero hubiera sido el último hombre en Francia que objetase poner su talento único al servicio de tales cuestiones, pues no pertenecía ese tipo de sabios que piensan que la ciencia pierde su perenne virginidad cada vez que pone sus manos en la industria. Pero no era el hombre indispensable para esa labor, como posiblemente lo era Pasteur para cuestiones igualmente importantes de las enfermedades de la cerveza, de los gusanos, de la seda y de los seres humanos.

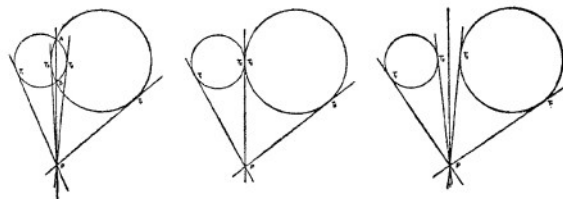


Figura 1

Dirijamos ahora nuestra mirada hacia una o dos de las armas ideadas o modificadas por Poncelet para la conquista de la Geometría proyectiva. En primer término se halla su "principio de la continuidad", que se refiere a la permanencia de las

propiedades geométricas cuando una figura se transforma por proyección, o de otra manera en otra. No hay duda que es un principio más bien vago, pero la propia enunciación de Poncelet no fue jamás muy exacta, y en realidad le llevó a infinitas controversias con geómetras más conservadores, a los que cortésmente consideraba como viejos fósiles, empleando siempre las dignas palabras propias de un oficial y de un caballero. Con la salvedad de que el principio, aunque de gran valor heurístico, no siempre proporciona pruebas de los teoremas que sugiere, podemos penetrar en su espíritu valiéndonos de algunos ejemplos.

Imaginemos dos circunferencias secantes, y supongamos que se cortan en los puntos A y B . Únase A y B por una recta. La Figura 1 muestra la prueba ocular de dos puntos reales A , B y la cuerda común AB de las dos circunferencias. Ahora imaginemos que las dos circunferencias se apartan gradualmente. La cuerda común se convierte en una tangente común a las dos circunferencias en su punto de contacto. En cualquier posición el siguiente teorema (que de ordinario constituye un ejercicio de Geometría escolar) es cierto, si se toma un punto cualquiera P en la cuerda común, pueden dibujarse cuatro rectas tangentes desde él a las dos circunferencias, y si los puntos en que estas rectas tangentes tocan las circunferencias son T_1 , T_2 , T_3 , T_4 , los segmentos PT_1 , PT_2 , PT_3 , PT_4 serán de igual longitud. Inversamente, si se pregunta dónde se encuentran todos los puntos P en que sean iguales los cuatro segmentos tangentes a los dos círculos, la respuesta será: *sobre la cuerda común*. Trasladando todo esto al lenguaje usual, diremos que el lugar geométrico de un punto P que se mueve de modo que las longitudes de los segmentos tangentes desde él a dos círculos que se cortan en iguales, es la cuerda común de los dos círculos¹. Todo esto es familiar y comprensible; no hay un elemento de misterio ni de incomprensión, como algunos pueden decir que existe en el paso siguiente, donde interviene, el principio de continuidad".

Los círculos se han separado completamente. Los dos puntos en que se cortaban (o en el último momento su único punto de contacto) ya no son- visibles sobre el papel, y la "cuerda común" queda suspendida entre los dos círculos sin cortar visiblemente a ninguno de ellos. Pero es sabido que existe aún un lugar *geométrico* de segmentos tangentes iguales, y se demuestra fácilmente que este "lugar" es una

¹ En lo que precede las tangentes son reales (visibles) si el punto P se halla fuera de los círculos, si el punto P está dentro, las tangentes son imaginarias.

recta perpendicular a la línea que une los centros de las dos circunferencias, lo mismo que era el "lugar" original (la cuerda común). Por decirlo de algún modo, si objetamos las "imaginarias", continuaremos diciendo que los dos círculos se cortan en dos puntos en la parte infinita del plano, hasta cuando se encuentran separados y decimos también que la, nueva línea recta, lugar geométrico, es aun la cuerda común de los círculos, los puntos en que se cortan son "imaginarios" o "ideales", pero la línea recta que los une (la nueva "cuerda común") es "real", realmente la podemos trazar sobre el papel.

Si escribimos, las ecuaciones de las circunferencias y rectas algebraicamente a la manera de Descartes, todo lo que hacemos en el Álgebra para resolver las ecuaciones de los círculos que se cortan, tiene su correlación unívoca en la Geometría ampliada, mientras que si antes no extendemos nuestra Geometría o al menos aumentamos su vocabulario, para tomar en cuenta los elementos "ideales" gran parte del pensamiento algebraico carece de significación geométrica.

Como es natural, todo esto requiere justificación lógica. Tal justificación ha sido dada hasta donde es necesaria, es decir hasta la fase que engloba las aplicaciones del "principio de continuidad" útiles en Geometría.

Un ejemplo más importante del principio lo proporcionan las rectas paralelas. Antes de explicar este ejemplo, podemos repetir la observación de un venerable y distinguido juez, mientras hablaba de estas cuestiones. Un matemático aficionado, pensando agradar al anciano compañero charlaba de algunas cosas referentes al concepto geométrico de infinito. En aquel momento paseaban por el jardín del juez. Al afirmar que "las rectas paralelas se encuentran en el infinito", el juez se detuvo. "Mr. Blank dijo con gran solemnidad. El hombre que diga que las rectas paralelas se encuentran en el infinito o en cualquier otra parte, no hay duda de que no posee sentido común". Para obviar el argumento podemos decir como antes, que se trata de una forma de hablar que deja a salvo excepciones irritantes, casos notablemente diferentes. Pero una vez que el lenguaje ha sido aceptado, la coherencia lógica exige que sea seguido hasta el fin, sin discutir las reglas de la gramática lógica, de la sintaxis, y esto es lo que se hace.

Para apreciar lo razonable que es este lenguaje imaginemos una línea referencia y un punto P que, no esté en l . Trácese, por P una recta l' que corte a l en P' , e

imaginemos que l' gira en torno a P , de modo que P' se aleja a lo largo de l . ¿Hasta cuándo puede alejarse P' ? Decimos que se detiene cuando l , y l' llegan a ser paralelas, o si se prefiere cuando el punto en que se cortan P' está en el infinito. Por las razones ya indicadas, este lenguaje es conveniente y sugestivo no en un manicomio, como el juez parecería pensar, y tiene especial valor para cuestiones interesantes y algunas veces muy prácticas propias de la Geometría.

En una forma análoga, las partes finitas de líneas, planos y espacio tridimensional (también del espacio superior), visualizables se enriquecen por la adición de puntos, rectas, planos o "regiones ideales" en *el infinito*.

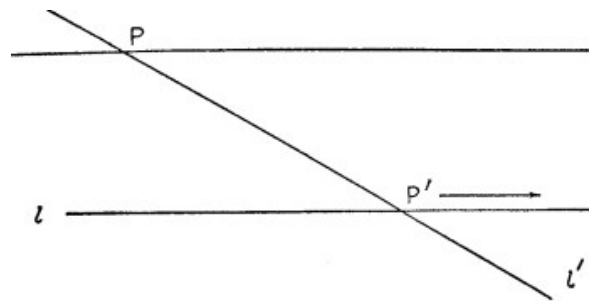


Figura 2

Si el juez hubiera podido ver esto, habría sido capaz de comprender el siguiente notable ejemplo del comportamiento del infinito en Geometría: *dos círculos cualesquiera en un plano se cortan en cuatro puntos, dos de los cuales son imaginarios y se hallan en el infinito*. Si los círculos son concéntricos, se tocan en dos puntos que están en la recta del infinito. Además, *todos los círculos en un plano pasan por los mismos dos puntos en el infinito*, que se designan con las letras I y J , siendo llamados Isaac y Jacob por los estudiantes irreverentes.

En el capítulo sobre Pascal hemos dicho lo que significan en Geometría las propiedades proyectivas, frente a las propiedades métricas. En este lugar podemos recordar las observaciones de Hadamard sobre la Geometría analítica de Descartes. Hadamard observó, entre otras cosas, que la Geometría sintética moderna ha pagado la deuda de la Geometría en general al Álgebra sugiriendo importantes investigaciones en Álgebra y Análisis. Esta moderna Geometría sintética fue objeto de las investigaciones de Poncelet. Aunque todo esto quizá puede parecer

embrollado, podemos seguir la cadena comenzando por el eslabón del año 1840, pues el problema es realmente importante no sólo para la historia de la Matemática pura, sino también para la de la reciente física matemática.

El eslabón del año 1840 es la creación debida a Boole, Cayley, Sylvester y otros autores de la teoría algebraica de invariantes, que (como explicaremos en un capítulo posterior), tiene importancia fundamental en la física teórica ordinaria. La Geometría proyectiva de Poncelet y su escuela desempeñó un papel importante en el desarrollo de la teoría de invariantes: los geómetras descubrieron todo un continente de propiedades de figuras invariantes en proyección; los algebristas del año 1840, especialmente Cayley, trasladaron las *operaciones de proyección* geométricas al lenguaje analítico, aplicaron este traslado al modo cartesiano algebraico de expresar las relaciones geométricas, y pudieron así hacer progresos extraordinariamente rápidos en la elaboración de la teoría de invariantes algebraicos. Si Desargues, el osado precursor del siglo XVII, hubiera previsto adónde conducía su ingenioso método de proyección, habría quedado asombrado. Sabía que había hecho algo muy importante, pero probablemente no tenía el concepto de cuán grande era su importancia.

Isaac Newton tenía 20 años cuando Desargues murió. No se sabe si Newton oyó pronunciar el nombre de Desargues. Aunque lo oyera, seguramente no pudo darse cuenta de que el humilde eslabón forjado por su anciano contemporáneo formaría parte de la fuerte cadena que en el siglo XX iba a arrastrar su ley de la gravitación universal desde su pedestal, que se suponía inmortal. Sin la maquinaria matemática del cálculo tensorial, que naturalmente se desarrolló (como veremos) de la obra algebraica de Cayley y Sylvester, es poco probable que Einstein o cualquier otro hubieran sido capaces de conmovier la teoría newtoniana de la gravitación.

Una de las ideas útiles de la geometría proyectiva es la de la *razón doble o razón armónica*. Trácese por un punto O cuatro líneas rectas l, m, n, p . Cortando estas cuatro líneas, trazar una línea recta x , y señalar los puntos en que corta a las otras rectas con las letras L, M, N, P respectivamente. Tendremos así sobre x los segmentos lineales LM, MN, LP, PN . Con ellos fórmense ahora las razones $LM : MN$ y $LP : PN$. Finalmente formemos la razón de estas dos razones o sea la razón *doble*

$$LM * PN : MN * LP$$

Lo más notable de esta razón doble es que tiene el mismo valor numérico para todas las posiciones de la línea x .

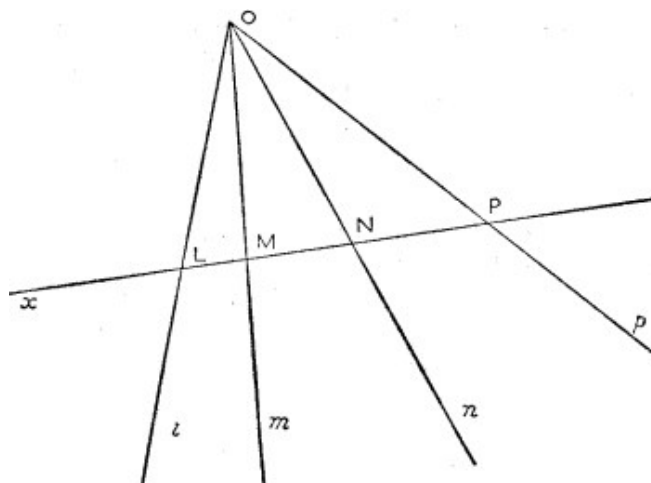


Figura 3

Más tarde nos referiremos a la unificación hecha por Félix Klein, de la Geometría euclidiana y las geometrías comunes no euclidianas, una pangeometría. Esta unificación fue posible gracias a la revisión de Cayley de los conceptos usuales de *distancia* y ángulo sobre los que se funda la Geometría métrica. En esta revisión, la razón doble desempeña la parte principal, y mediante ella, por la introducción de elementos "ideales" propuestos por él, Cayley redujo la Geometría métrica a una especie de Geometría proyectiva.

Para terminar la descripción completa de las armas que Poncelet utilizó, mencionaremos el "principio de dualidad", extraordinariamente fructífero. Para mayor simplicidad, tan sólo consideraremos como actúa el principio en Geometría plana.

Obsérvese desde el primer momento que cualquier curva continua, puede ser considerada en estas dos formas: engendrada por el movimiento de un punto o de una recta. Para darse cuenta de esto último imaginemos la recta tangente trazada en cada punto de la curva. Así *puntos y rectas* están íntima y recíprocamente asociados con respecto a la curva: por cualquier, punto de la curva pasa una recta

de la curva; sobre cualquier recta de la curva hay un punto de la curva. En lugar de *pasar por* de la frase precedente, escríbase *estar en*. Entonces las dos afirmaciones son idénticas, salvo que las palabras "punto" y recta se intercambian.

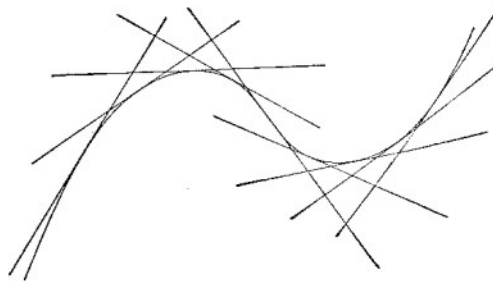


Figura 4

Para hacer universal esta correspondencia "añadamos" al plano usual en que la Geometría euclidiana tiene valor, *el plano métrico*, los "elementos ideales" del tipo ya descrito. El resultado de esta adición es el plano *proyectivo*. Un plano proyectivo está compuesto por todos los puntos y líneas rectas ordinarios de un plano métrico, y, además, por una serie de puntos ideales, todos los cuales, según se acepta, están sobre una línea ideal, de forma tal que cualquiera de esos puntos ideales está sobre cualquier línea ordinaria².

En el lenguaje euclidiano diríamos que las dos líneas paralelas tienen la misma dirección; en fraseología proyectiva esto se expresaría diciendo que "dos líneas paralelas tienen el mismo punto ideal". Además, en la antigua terminología si dos o más rectas tienen la misma dirección, son paralelas; en la nueva, si dos o más rectas tienen el mismo punto ideal, son paralelas. Toda línea recta en el plano proyectivo se concibe como teniendo sobre él un punto ideal ("en el infinito"); todos los puntos ideales se consideran como constituyendo una *recta ideal*, "la recta del infinito".

El propósito de estas concepciones es evitar los enunciados de excepción en la Geometría euclidiana necesarios para la postulada existencia de paralelas. Esto ya

² Esta definición y otras de un carácter similar han sido tomadas de la obra de John Wesley Young, *Projective Geometry* (Chicago, 1930). Este librito es comprensible para todo el que tenga conocimientos elementales de Geometría.

ha sido comentado en relación con el principio de la continuidad formulado por Poncelet.

Con estos juicios preliminares, puede ser ahora establecido el *principio de dualidad* en Geometría plana. Todas las proposiciones de la Geometría proyectiva plana se corresponden doblemente de tal modo que de una propiedad particular se puede deducir inmediatamente otra intercambiando los papeles desempeñados por las palabras punto y línea.

En su Geometría proyectiva, Poncelet exploró este principio hasta el límite. Abriendo al azar cualquier libro de Geometría proyectiva encontraremos casi seguramente páginas de proposiciones impresas a dos columnas: un recurso introducido por Poncelet. Las proposiciones de ambas columnas se corresponden entre sí; probada una, la prueba de la otra es superflua, según afirma el principio de la dualidad. Así, la Geometría se duplica en extensión de un solo golpe sin necesidad de nueva labor. Como un ejemplo de proposiciones dobles mencionaremos el siguiente par:



Figura 5. Dos puntos distintos determinan una recta y sólo una.

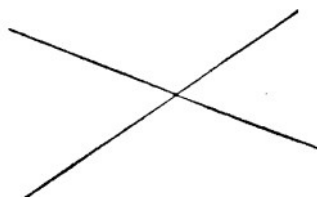


Figura 6. Dos rectas distintas determinan un punto y sólo uno

Como se ve, esto no es muy extraordinario. El parto de los montes ha dado lugar a un ratón.

La proposición de la figura 7 corresponde al *Hexagrammum Mysticum* de Pascal, ya mencionado; la figura 8 es el teorema de Brianchon, que fue *descubierto* por medio del principio de la dualidad. Brianchon (1785-1864) descubrió su teorema siendo estudiante en la Escuela Politécnica, y fue publicado en el *Journal* de esa escuela en

1806. Las figuras de las dos proposiciones realmente no se parecen en nada, y esto indica el poder de los métodos usados por Poncelet.

El descubrimiento de Brianchon fue el que colocó el principio de la dualidad en el terreno de la Geometría. Ejemplos muchos más espectaculares del poder del principio se encuentran en cualquier manual de Geometría proyectiva, particularmente en la ampliación del principio al espacio ordinario tridimensional. En esta extensión los papeles desempeñados por las palabras punto y plano son intercambiables: la línea recta permanece como tal.

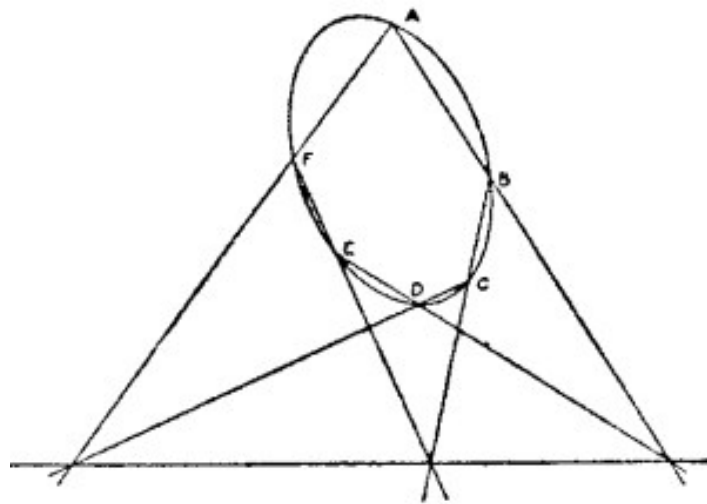


Figura 7. Si A, B, C, D, E, F son puntos de una cónica, los puntos de intersección de los pares de lados opuestos AB y DE, BC y EF, CD y FA del hexágono inscrito en la cónica, están en línea recta.

La notable belleza de la Geometría proyectiva y la flexible elegancia de sus demostraciones la hicieron el estudio favorito de los geómetras del siglo XIX.

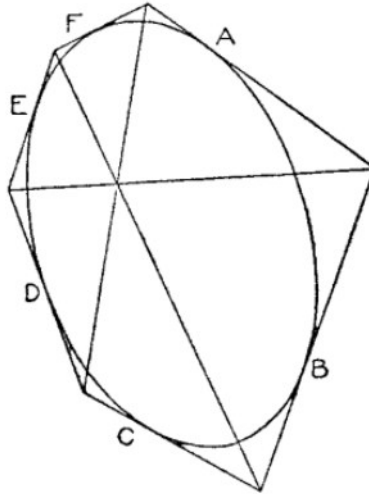


Figura 8. Si A, B, C, D, E, F son tangentes a una cónica, las rectas que unen los pares de vértices opuestos del hexágono circunscrito a la cónica, se cortan en un punto.

Los hombres de talento encontraron una nueva mina de oro, y rápidamente obtuvieron sus tesoros más accesibles. Actualmente, la mayoría de los especialistas parecen estar de acuerdo en que el problema ha sido bien estudiado y tiene interés para los matemáticos profesionales. Sin embargo se concibe que aún puede haber cosas como el principio de dualidad que hayan pasado inadvertidas. De todos modos es un tema fascinante para los aficionados y también para los profesionales en cierta fase de su carrera.

A diferencia de algunos otros campos de la Matemática, la Geometría proyectiva ha dado lugar a excelentes manuales y tratados, de los que son autores excelentes geómetras, incluyendo el mismo Poncelet.