TEMA 2 - VARIABLE ALEATORIA

Consideramos fenómenos aleatorios cuyo resultado es un número o puede convertirse en un número. Por ejemplo el resultado de elegir a un español al azar y medir su estatura es un número; el resultado de seleccionar al azar una familia y determinar el número de hijos que la componen también es un número. En realidad lo que pretendemos hacer en los dos ejemplos anteriores, es asignar a un suceso elemental del espacio muestral un valor numérico. Pero afinemos más, mientras que la asignación de cada español con su estatura pretende medir, la asignación de una familia con el número de los hijos que la compone pretende contar. Así pues, a groso modo, una variable aleatoria es una función que asocia un suceso elemental con un número, pretendiendo contar (variable aleatoria discreta) o medir (variable aleatoria continua). Vamos a dar una definición formal de variable aleatoria.

Definición: Sea $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espacio probabilístico. Una variable aleatoria es una función medible en la forma:

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

Esto quiere decir que la preimagen de todo conjunto no acotado inferiormente pertenece a la $\sigma - algebra\ \mathcal{A}$, es decir:

$$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow X^{-1}\{(-\infty, x)\} = \{w \in \Omega / X(w) \leq x\} \in \mathcal{A}$$

En la notación hemos de tener en cuenta que empleamos letras mayúsculas para nombrar la variable aleatoria y la correspondiente letra minúscula x para denotar el número.

EJEMPLOS:
Al lanzar una moneda nos interesa saber si sale cruz. El espacio muestral es:

$$\Omega = \{cara, cruz\}$$

Consideremos la función:

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

$$cara \to 0$$

$$cruz \to 1$$

Entonces X es una variable aleatoria. Para comprobarlo nos bastará con demostrar que X es medible. Recordemos que el álgebra de sucesos asociada al

experimento es $\mathcal{A} = \{\phi, cara, cruz, cara \cup cruz, cara \cap cruz, \Omega\}$

1º Si $x<0$ se tiene que

$$X^{-1}\{(-\infty, x)\} = \{w \in \Omega / X(w) \leq x\} = \phi \in \mathcal{A}$$

2º Si $x=0$ entonces:

$$X^{-1}\{(-\infty, 0)\} = \{w \in \Omega / X(w) \leq 0\} = \{cara\} \in \mathcal{A}$$

3º Si $0<x<1$

$$X^{-1}\{(-\infty, x)\} = \{w \in \Omega / X(w) \leq x\} = \phi \in \mathcal{A}$$

4º Si $x=1$ entonces:

$$X^{-1}\{(-\infty, 1)\} = \{w \in \Omega / X(w) \leq 1\} = \{cara \cup cruz\} \in \mathcal{A}$$

5º Si $x>1$

$$X^{-1}\{(-\infty, x)\} = \{w \in \Omega / X(w) \leq x\} = \Omega \in \mathcal{A}$$

Visto esto podemos afirmar que X es una variable aleatoria.

Variables aleatorias discretas

Una variable aleatoria X en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ se dice discreta si su imagen:

$$X(\omega) = ImX = \{X(w) / w \in \omega\}$$

es finita o infinita numerable (sus elementos se pueden numerar utilizando los números naturales)

Variables aleatorias continuas

Una variable aleatoria X en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ se dice continua si su imagen es un intervalo en la recta real, es decir:

$$X(\omega) = ImX = \{X(w)/w \in \omega\} = I$$

siendo I un intervalo en una de las siguientes formas:

$$I = [a, b], I = [a, +\infty), I = (-\infty, a], I = (-\infty, +\infty)$$

FUNCIÓN DE PROBABILIDAD EN VARIABLE DISCRETA

Sea X una variable aleatoria discreta en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, p)$. Se define la función de probabilidad asociada a x como la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = P(X = x)$. A la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta también se le llama masa puntual de probabilidad. La función de probabilidad de una variable discreta ha de verificar las siguientes propiedades:

- $\forall x \in Im(X) \Rightarrow f(x) = P(X = x) \in [0, 1]$
- Si $\mathrm{x}_1, x_2, ..., x_n$ son todos los valores que puede tomar X entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1$$

Como no puede ser de otra forma, son válidos aquí todos los axiomas de Kolmogorov y las propiedades que de ellos se desprenden. Veamos un ejemplo: pretendemos determinar la función de probabilidad de la variable aleatoria X que expresa el número de caras al lanzar dos monedas al aire. El espacio muestral es $\Omega = \{(c, c), (c, +), (+, c), (+, +)\}$ y la variable aleatoria es $X : \Omega \to \mathbb{R}$ definida por:

$$X(c, c) = 2,\ X(c, +) = 1,\ X(+, c) = 1,\ X(+, +) = 0$$

Vamos a hacer una tabla para obtener la función de probabilidad

Valor de la variable x_i	0	1	2
Probabilidad $f(x_i) = P(X = x_i) = P_i$	1/4	1/2	1/4

La función de probabilidad $f(x) = P(X = x)$ se puede definir por extensión mediante las expresiones:

$$f(0) = P(X = 0) = \frac{1}{4}$$

$$f(1) = P(X = 1) = \frac{1}{2}$$

$$f(2) = P(X = 2) = \frac{1}{4}$$

A partir de la variable aleatoria X se pueden definir infinitas variables aleatorias. Podemos definir, por ejemplo, la variable aleatoria $Y = \sqrt{7X^3 + 6}$ donde X es el número de caras al lanzar dos monedas al aire. La función de probabilidad de Y es $g(y_i) = P(Y = y_i)$ definida mediante la tabla de valores:

Valor de la variable y_i	$\sqrt{6}$	$\sqrt{13}$	$\sqrt{62}$
Probabilidad $f(y_i) = P(X = y_i) = P_i$	$1/4$	$1/2$	$1/4$

FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN

Sea X una variable aleatoria discreta en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, p)$. Se define la función de distribución de X como $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que verifica $F(x) = P[X \leq x]$, es decir que F es la probabilidad de que la variable aleatoria X tome un valor no superior al número real x, de modo más concreto, *F(x)* expresa la masa de probabilidad que hay en el intervalo $(-\infty, x]$. El valor de *F(x)* lo obtenemos sumando todas las probabilidades que no están a la derecha de x, es decir:

$$F(x) = \sum_{x_j \leq x} P[X = x_j] = \sum_{x_j \leq x} f(x_j)$$

Veamos un ejemplo: anteriormente hemos calculado la función de probabilidad de la variable aleatoria x=número de caras obtenidas al lanzar dos monedas, obteniendo la siguiente tabla:

Valor de la variable x_i	0	1	2
Probabilidad $f(x_i) = P(X = x_i) = P_i$	$1/4$	$1/2$	$1/4$

Vamos a añadir a la anterior tabla una tercera fila en la que se exprese el valor de la función de distribución

Valor de la variable x_i	0	1	2
Probabilidad $f(x_i) = P(X = x_i) = P_i$	1/4	1/2	1/4
Distribución $F(x_i) = P[X \leq x_i]$	1/4	3/4	1

La función de distribución tiene las siguientes propiedades:

1ª $F(-\infty) = 0$

demostración:

$$F(-\infty) = \lim_{t \to -\infty} F(t) = \lim_{t \to -\infty} P[X \leq t] = \lim_{t \to -\infty} P[X \leq 0] = \lim_{t \to -\infty} 0 = 0$$

ya que si $t \to -\infty \Rightarrow t << 0$

2ª $F(+\infty = 1)$

demostración:

$$F(+\infty) = \lim_{t \to +\infty} F(t) = \lim_{t \to +\infty} P[X \leq t] = \lim_{t \to +\infty} 1 = 1$$

ya que si $t \to +\infty \Rightarrow t >> 2$

3ª La función de distribución *F(x)* es monótona no decreciente, es decir que si $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$.

demostración:

Si $x_1 < x_2$ entonces se verifica que $F(x_1) = \sum_{x_j \leq x_1} P[X = x_j]$ tiene menos sumandos que $F(x_2) = \sum_{x_j \leq x_2} P[X = x_j]$ y como todos los sumandos son positivos o nulos $\Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$.

4ª La función de distribución *F(x)* es continua por la derecha de cualquier punto, esto quiere decir que

$$\lim_{x \to x_0,\ x > x0} F(x) = \lim_{x \to x_0^+} F(x) = F(x_0)$$

.

demostración:

$\lim_{x \to x_0} F(x) = \lim_{x \to x_0} P[X \leq x]$. *Si* x $\to x_0$ podemos poner que $x = x_0 + \varepsilon$ siendo $\varepsilon \to 0$. Por tanto:

$$\lim_{x \to x_0^+} F(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} P[X \leq x_0 + \varepsilon] = P[X \leq x_0] = F(x_0]$$

Observación: La función de distribución *F(x)* es continua por la izquierda en el punto x_0 si se verifica que $P[x = x_0] = 0$

FUNCIÓN DE DENSIDAD EN VARIABLE CONTINUA

Sea X una variable aleatoria continua en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, p)$. Se dice que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria X si verifica las tres propiedades siguientes:

1ª $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

2ª $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

3ª $P[a \leq x \leq b] = \int_a^b f(x)dx$

FUNCIÓN DE DENSIDAD EN VARIABLE CONTINUA

Sea X una variable aleatoria continua en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, p)$. Se define la función de distribución de la variable X como $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = P[X \leq x]$. Según la tercera propiedad de la función de densidad:

$$F(x) = P[X \leq x] = P[-\infty \leq X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

Veamos una interpretación geométrica de esta definición. Hemos visto que la función de distribución es $F(x_1 = \int_{-\infty}^{x_1} f(x)dx$, esto representa el área de la región limitada por la función de densidad f(x) y la recta $x = x_1$

PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN

1ª $F(-\infty) = 0$

demostración:

Si *G(x)* es una primitiva de la función de densidad *f(x)* entonces:

$$F(-\infty) = \int_{-\infty}^{-\infty} f(x)dx = G(-\infty) - G(-\infty) = 0$$

2ª $F(+\infty) = 1$

demostración:

Se tiene que $F(+\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, esto es una propiedad de la función de densidad.

3ª La función de distribución F(x) es monótona no decreciente, esto es, si $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$

demostración:

Al ser $x_1 < x_2$ el área que representa $F(x_1)$ es menor que la que representa $F(x_2)$

4ª La función de distribución *F(x)* es continua a la derecha en todo punto $x \in \mathbb{R}$, esto es consecuencia de que la función de distribución es derivable (toda función derivable es continua)

5ª La función de densidad se obtiene derivando la función de distribución ya que si $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \Rightarrow F'(x) = f(x)$ según se desprende del teorema fundamental del cálculo.

6ª Sea X una variable aleatoria continua en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, p)$. Entonces si X es continua la probabilidad puntual es cero, es decir, $\forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow P(X = a) = 0$

demostración:

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función de densidad. Entonces $P(a \leq x \leq b) =$
$= \int_a^b f(x)dx$. Podemos poner que:

$$P(X = a) = P(a \leq x \leq a) = \int_a^a f(x)dx = 0$$

7ª Como corolario de la propiedad 6ª, obtenemos que $P(x \leq a) = P(x < a)$

demostración.- Se tiene que:

$$P(x \leq a) = P[(x < a) \cup (x = a)] = P(x < a) + \cancelto{0}{P(x = a)} = P(x < a)$$

8ª Si X es una variable aleatoria continua, verifica:

$$P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a)$$

(observar la figura 1)

Cambio de variable

a) **Variable aleatoria discreta**: en este caso hacer el cambio de variable es muy sencillo. Veamos unos ejemplos

i) Sea X una variable aleatoria cuya función de probabilidad viene dada por la tabla:

x	-2	-1	0	1	2
P(X=x)	1/5	1/6	1/5	1/15	11/30

Se define una nueva variable $Y = X^2$. Obtenga el campo de variación y la función de probabilidad de la variable Y.

Solución:

Calculamos el valor de la expresión $Y = X^2$ para los distintos valores que toma X en la tabla anterior, obteniendo una nueva tabla:

$Y = X^2$	0	1	4
$P(Y = y) = P(X = \sqrt{y}$	1/5	7/30	17/30

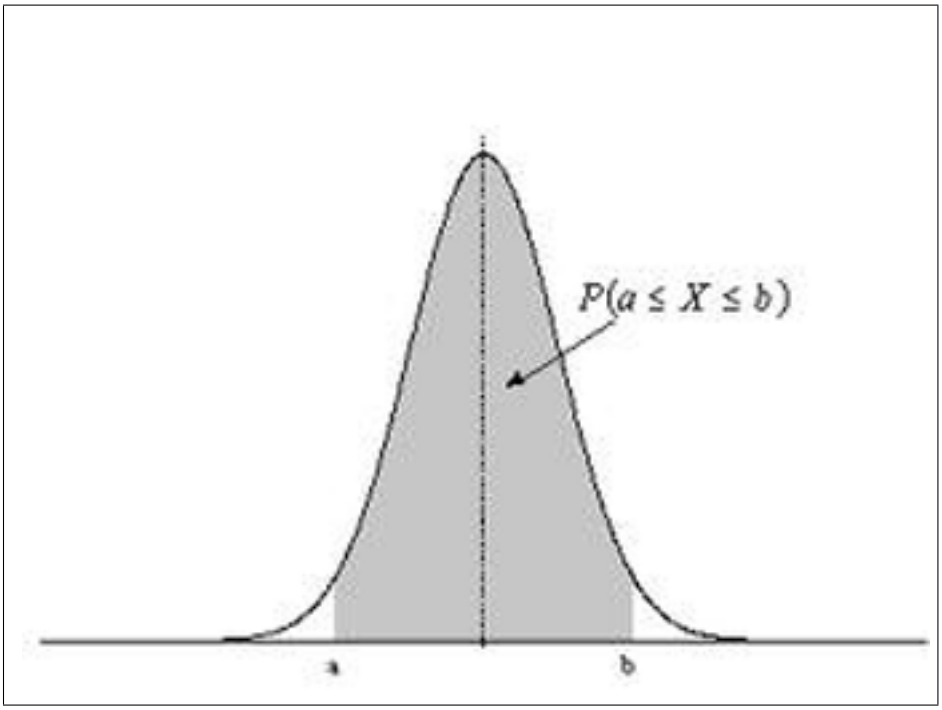

Figura 1: Probabilidad de un intervalo

ii) Sea X una variable aleatoria geométrica con función de probabilidad $P(X = x) = pq^x$ con x=1,2,... Obtenga la función de probabilidad de $Y = X + 1$

Solución:

$P(Y = y) = P(X = y - 1) = pq^{y-1}$. Veamos ahora que valores toma y. Como $y = x + 1$ los valores de y son y=2,3,4,....

b)**Variable aleatoria continua**: en este caso el proceso del cambio de variable es más complicado, hay que tener en cuenta para realizarlo que la función de densidad se obtiene derivando la función de distribución y la regla de la cadena para derivadas. Veamos unos ejemplos

i) La función de densidad de la variable aleatoria X es

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4x^3}{15} & si \quad 1 \leq x \leq 2 \\ \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

a) Sea $Y = -2 + 3X$. Calcule la función de densidad de Y

b) Sea $Z = -2 - 3X$. Calcule la función de densidad de Z

Solución:

a) Sea $F_Y(y)$ la función de distribución de la variable estadística Y. La función de densidad la obtenemos derivando la función de distribución, por tanto: $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(-2 + 3X \leq y) = P(X \leq \frac{y+2}{3}) = F_X(\frac{y+2}{3})$. La función de densidad f de Y la obtenemos derivando la función de distribución, es decir $f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{d}{dy}F_X(\frac{y+2}{3}) = \underbrace{\textit{por la regla de la cadena}}{} = \frac{d}{dx}F_X(\frac{y+2}{3}) \cdot \frac{dx}{dy} = f_X(\frac{y+2}{3}) \cdot \frac{d}{dy}(\frac{y+2}{3}) =$ Por tanto:

$$f_Y(y) = \frac{4 \cdot (\frac{y+2}{3})^3}{15} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4(y+2)^3}{1215}$$

Al ser $1 \leq x \leq 2 \;\; y \;\; x = \frac{y+2}{3} \Rightarrow 1 \leq \frac{y+2}{3} \leq 2 \Rightarrow 1 \leq y \leq 4$. Entonces la función de densidad de la variable Y es:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{4(y+2)^3}{1215} & si \quad 1 \leq y \leq 4 \\ \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

El apartado b) es análogo, se deja como ejercicio