TEMA I - PROBABILIDAD

INTRODUCCIÓN

Hay dos tipos de fenómenos:

a) Fenómenos deterministas, cuyo resultado se puede conocer sin necesidad de experimentación.

b) Fenómenos aleatorios en los que para conocer su resultado necesitamos experimentarlo. Por ejemplo, si lanzamos una moneda al aire no podremos augurar el resultado hasta que no se realice el experimento.

Espacio muestral

Llamamos espacio muestral de un experimento aleatorio E al conjunto Ω formado por todos los resultados posibles en el experimento. A cada uno de estos resultados se le llama suceso. Hay dos tipos de sucesos:

- Sucesos elementales, cuando no se pueden descomponer en otros más simples. Por ejemplo si el experimento es lanzar un dado, A=" obtener el nº 2 " es un suceso elemental.

- Sucesos compuestos, cuando se pueden descomponer en otros más simples. Por ejemplo,si el experimento es lanzar un dado y A= " obtener nº par " entonces $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, donde $A_1 =$ " obtener nº 2" , $A_2 =$ " obtener nº 4" , $A_3 =$ " obtener nº 6" .

OPERACIONES CON SUCESOS

Suceso contrario o suceso complementario

Dado un suceso A, se define su suceso contrario o complementario como aquel que se verifica si no se cumple A. Se representa por $\overline{A}$ o bien por A^c. Por ejemplo si $A =$ " obtener puntuación mayor que 2" , entonces $\overline{A} =$ " obtener puntuación menor o igual que 2 ".

Suceso seguro

Es aquel que se verifica siempre. Se representa por E.

Suceso imposible

Es aquel que no se verifica jamás. Se representa por ϕ. Es evidente que $\overline{E} = \phi$ y que $\overline{\phi} = E$

Unión o disyunción de sucesos

Dados los sucesos A y B, se define su unión como un nuevo suceso que representamos por $A \cup B$ y que se verifica si se cumple A o se cumple B.

Intersección o conjunción de sucesos

Dados los sucesos A y B, se define su intersección como un nuevo suceso que representamos por $A \cap B$ y que se verifica si se cumplen A y B simultáneamente.

Diferencia de sucesos

Dados dos sucesos A y B, se define su diferencia como un nuevo suceso que representamos por A-B (se lee A y no B) verificándose si se cumple A y no se cumple B.

Proposición

Se verifica que $A - B = A \cap \overline{B}$

Demostración:

$$\forall x \in A - B \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x \in A \\ y \\ x \notin B \end{array} \right. \Longleftrightarrow x \in A \cap \overline{B}$$

Diferencia simétrica de sucesos

Dados los sucesos A y B, se define su diferencia simétrica como un nuevo suceso que representamos por $A \triangle B$ que se verifica si ocurre A o B pero no ambos a la vez. De la definición se desprende esta propiedad:

Proposición:

- $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$
- $A \triangle B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$

Inclusión de sucesos

Dados los sucesos A y B, se dice que A está contenido en B y se representa por $A \subset B$ si siempre que se verifique a se cumple B. Por ejemplo, en el lanzamiento de un dado sean los sucesos $A =$ sacar 2, $B =$ sacar par. Entonces $A \subset B$.

Como es de suponer, la unión e intersección de sucesos tienen las mismas propiedades que la de conjuntos.

PROPIEDADES DE LA UNIÓN E INTERSECCIÓN DE SUCESOS

Para cualesquiera sucesos A, B y C se verifica:

UNIÓN	INTERSECCIÓN
$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \cup \phi = A$	$A \cap E = A$
$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$	$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$

De las 14 propiedades anteriores, todas son muy intuitivas y fáciles de demostrar. Tal vez la única que entrañe alguna dificultad sea la ley de Morgan (la última). Si asimilamos las ideas de suceso y conjunto, para demostrar que dos sucesos A y B son iguales se emplea la doble inclusión, es decir que si quiero demostrar que $A = B$ lo haré en dos pasos, demostrando que $A \subset B$ y que $B \subset A$. Si $A \subset B$ y $B \subset A \Rightarrow A = B$. Vamos a demostrar, por ejemplo, que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

a) Demostraremos primero que $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$:

$$\forall x \in \overline{A \cup B} \Rightarrow x \notin A \cup B \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x \notin A \\ o \\ x \notin B \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x \in \overline{A} \\ y \\ x \in \overline{B} \end{array} \right\} \Rightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$$

Hemos probado, hasta el momento, que $\forall x \in \overline{A \cup B} \Rightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$ esto quiere decir que $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

b)Ahora vamos a demostrar que $\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$:

$$\forall x \in \overline{A} \cap \overline{B} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x \in \overline{A} \\ y \\ x \in \overline{B} \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x \notin A \\ o \\ x \notin B \end{array} \right\} \Longleftrightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \in \overline{A \cup B}$$

Por tanto hemos probado que $\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. Si aplicamos la doble inclusión queda probada esta ley de Morgan.

Definición: álgebra de sucesos.- Sea Ω un espacio muestral y $\mathcal{A} \subset \Omega$ un subconjunto de sucesos. Se dice que $\mathcal{A}$ es un álgebra de sucesos si se verifican las dos propiedades siguientes:

i) $\forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$

ii) $\forall A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

Lo que caracteriza entonces a un álgebra de sucesos es que es un conjunto cerrado para las operaciones suceso contrario y unión de sucesos (esto quiere decir que si un suceso pertenece al álgebra, su contrario también pertenece y que si dos sucesos pertenecen al álgebra, su unión también pertenece). De la definición de álgebra de sucesos se pueden deducir las siguientes propiedades:

1º $\Omega \in \mathcal{A}$

Demostración:

Sea $A \in \mathcal{A}$, entonces $\overline{A} \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup \overline{A} = \Omega \in \mathcal{A}$

2º $\phi \in \mathcal{A}$

Demostración:

Como $\Omega \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{\Omega} = \phi \in \mathcal{A}$

3º $\forall A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$

Demostración:

Sean $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A}, \overline{B} \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \cup \overline{B} \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} \in \mathcal{A}$. Si aplicamos la ley de Morgan $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{\overline{A}} \cap \overline{\overline{B}} = A \cap B \in \mathcal{A}$

4º si $A_1, A_2, ..., An \in \mathcal{A}$ entonces:

$$\bigcup_{i=1}^{n} Ai \in \mathcal{A}$$

Demostración:

Vamos a recordar el principio de inducción. Sea p una propiedad que depende del número natural n. Si comprobamos que p es cierta para n=1, n=2, suponemos que p es cierta para n = k y demostramos que p se verifica para n = k+1, entonces p es cierta $\forall n \in \mathbb{N}$. Aplicamos a esta propiedad el principio de inducción. Para n = 2 la propiedad es cierta por definición de álgebra de sucesos: si $A_1, A_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$. Suponemos que la propiedad es cierta para n = K, es decir que se verifica:

$$A_1, A_2, ..., Ak \in \mathcal{A} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \cup .... \cup A_k \in \mathcal{A}$$

Vamos demostrar la propiedad para n = k+1, es decir:

$$A_1 \cup A_2 \cup .... \cup A_k \cup A_{k+1} \in \mathcal{A}$$

Si aplicamos la propiedad asociativa tenemos que:

$$A_1 \cup A_2 \cup .... \cup A_k \cup A_{k+1} = \underbrace{(A_1 \cup A_2 \cup .... \cup A_k)}_{suceso\ B\ perteneciente\ a\ \mathcal{A}} \cup A_{k+1} = B \cup A_{k+1} \in \mathcal{A}$$

5º si $A_1, A_2, ..., An \in \mathcal{A}$ entonces:

$$\bigcap_{i=1}^{n} Ai \in \mathcal{A}$$

Esta propiedad se demuestra de forma similar a la propiedad 4º.

Observación:

Se podría dar una definición equivalente de álgebra de sucesos del siguiente modo. *se dice que* $\mathcal{A}$ *es un álgebra de sucesos si*:

i) $\forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$

ii) $\forall A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$

A partir de esta última definición se podrían demostrar, de igual forma, todas las propiedades anteriores. La única propiedad que cambia es la propiedad 3º que diría $\forall A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$ y se demostraría así:

$$\forall A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \overline{A} \in \mathcal{A} \\ y \\ \overline{B} \in \mathcal{A} \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{A} \cap \overline{B} \in \mathcal{A}$$

Definición: $\sigma-$álgebra de sucesos

Es una extensión del concepto de álgebra de sucesos, se exige que si un conjunto infinito de sucesos pertenece a $\mathcal{A}$, la unión infinita también pertenezca a $\mathcal{A}$, de forma más rigurosa, sea Ω un espacio muestral, $\mathcal{A} \subset \Omega$ un subconjunto. Se dice que $\mathcal{A}$ es una $\sigma-$álgebra de sucesos si se verifican estas dos propiedades:

i) $\forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$

ii) Si $\{A_{i1 \leq i \leq n} \in \mathcal{A}$ entonces:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{A}, \quad \bigcup_{i=1}^{n} \in \mathcal{A}$$

CONCEPTO DE PROBABILIDAD

La probabilidad de un suceso nos da una medida que nos informa de la posibilidad de que ocurra el suceso. Hay dos formas de dar una definición de probabilidad:

a) Probabilidad clásica, de Laplace o " a posteriori ", que se rige por la ley: $probabilidad\ de\ A\ = \dfrac{n^o\ casos\ favorables\ al\ suceso\ A}{n^o\ casos\ posibles\ en\ el\ experimento}$. Esta medida de probabilidad no funciona en el caso de que el espacio muestral contenga infinitos sucesos o que haya una repetición indefinida de sucesos, siempre en las mismas condiciones.

b) Probabilidad frecuentista o " a posteriori "

Se llama frecuencia absoluta de un suceso al número de veces que se repite el suceso en un experimento, se representa por $f_a(A)$. La frecuencia relativa del suceso A, que representaremos por $f_r(A)$, se obtiene dividiendo la frecuencia absoluta entre el número total de sucesos del experimento. Se define la probabilidad de A como $P(A) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_r(A) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f_a(A)}{n}$

Propiedades:

1ª Sea n_1 la frecuencia absoluta del suceso A en un experimento con n sucesos totales. Entonces $0 \leq n_1 \leq n \Rightarrow 0 \leq \dfrac{n_1}{n} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq f_r(A) \leq 1$. Por tanto se verifica que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 \leq \lim\limits_{n\to+\infty} f_r(A) \leq \lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$, es decir $0 \leq P(A) \leq 1$

2ª Supongamos que el experimento tiene como posibles sucesos $A_1, A_2, ..., A_k$ con frecuencias absolutas $n_1, n_2, ..., n_k$ respectivamente. Entonces el número de sucesos es $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$ (habrá sucesos repetidos, claro está). Si dividimos por n $\dfrac{n_1}{n} + \dfrac{n_2}{n} + ... + \dfrac{n_k}{n} = 1 \Rightarrow P(\Omega) = 1$

3ª Si tenemos dos sucesos $A_1,\ A_2$ incompatibles $(A_1 \cap A_2 = \phi)$ entonces:

$$P(A_1 \cap A_2) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^o\ de\ veces\ que\ aparece\ (A_1 \cap A_2)}{n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^o\ de\ veces\ que\ aparece\ A_1 + n^o\ de\ veces\ que\ aparece\ A_2}{n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^o\ de\ veces\ que\ aparece\ A_1}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{n^o\ de\ veces\ que\ aparece\ A_2}{n}$$
$$= P(A_1) + P(A_2)$$

Nunca aparecerán a la vez $A_1\ y\ A_2$ pero el número de veces que aparece $A_1\ o\ A_2$ es el número de veces que aparece A_1 + número de veces que aparece A_2.

Las propiedades que hemos visto de la definición a posteriori de probabilidad dan pie a la siguiente definición axiomática de probabilidad.

ESPACIO PROBABILÍSTICO O ESPACIO DE PROBABILIDAD

Un espacio de probabilidad es una terna $(\Omega,\ \mathcal{A}, P)$, donde:

i) Ω es el espacio muestral (suceso seguro)

ii) $\mathcal{A} \subset \Omega$ es una $\sigma-$álgebra de sucesos

iii) P es una aplicación en la forma $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ que verifica las siguientes propiedades llamadas axiomas de **Kolmogorov**:

1º $\forall A \in \mathcal{A} \rightarrow P(A) \geq 0$

2º $P(\Omega) = 1$

3º Si $A_1, A_2, ..., An \in \mathcal{A}$ son incompatibles dos a dos, es decir si:

$$A_i \cap A_j = \begin{cases} A_i & si \quad i = j \\ \phi & si \quad i \neq j \end{cases} \quad entonces:$$

P$(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$. De estos tres axiomas se desprenden las siguientes propiedades:

- P$(\overline{A}) = 1 - P(A)$

<u>Demostración</u>:

Como $\Omega = A \cup \overline{A} \Rightarrow P(\Omega) = P(A \cup \overline{A})$. Al ser $A \cap \overline{A} = \phi$ aplicando el tercer axioma $P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$. Ya que $P(\Omega) = 1 \Rightarrow P(A) + P(\overline{A}) = 1 \Rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A})$

- P$(\phi) = 0$

<u>Demostración</u>:

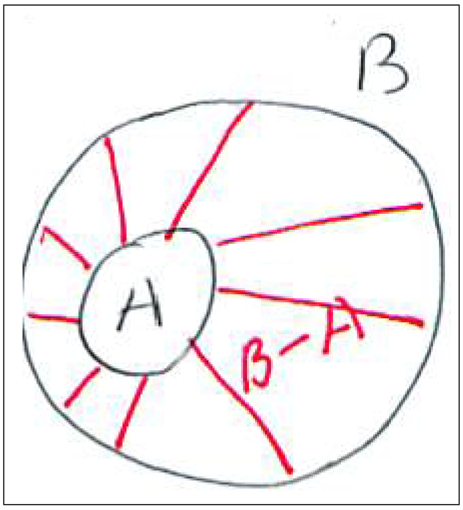

Figura 1: Descomposición de B como unión de $A \cap B$ y (B-A)

Como $\overline{\Omega} = \phi \Rightarrow P(\phi) = P(\overline{\Omega}) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$

- $\forall A, B \in \mathcal{A}$ *tales que* $A \subset B$ *se verifica que* $P(A) \leq P(B)$

Demostración:

Si $A \subset B$ *se verifica* $B = A \cup (B - A)$ además $A \cap (B - A) = \phi$ tal y como se muestra en la figura 1. Si aplicamos el tercer axioma $P(B) = P[A \cup (B - A)] = P(A) + P(B - A) \geq P(A)$ al ser $P(B - A) \geq 0$

- $\forall A, B \in \mathcal{A}$ *tales que* $A \subset B$ *se verifica que* $P(B-A) = P(B) - P(A)$

Demostración:
Si $A \subset B$ se verifica que $B = A \cup (B - A)$, además $A \cap (B - A) = \phi$. La idea la mostramos en la Figura 2. Según el tercer axioma se verifica que $P(B) = P[(B-A) \cup (A \cap B)] \Rightarrow P(B) = P(B-A) + P(A \cap B) \Rightarrow P(B-A) =$ $= P(B) - P(A \cap B)$

- $\forall A in \mathcal{A}$ *se verifica que* $P(A) \leq 1$

Demostración:

Según una propiedad anterior *si* $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$. En particular esta propiedad se cumple si tomamos $B = \Omega$. Por tanto $P(A) \leq P(\Omega) = 1$. Por tanto podemos afirmar que $\forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow 0 \leq a \leq 1$

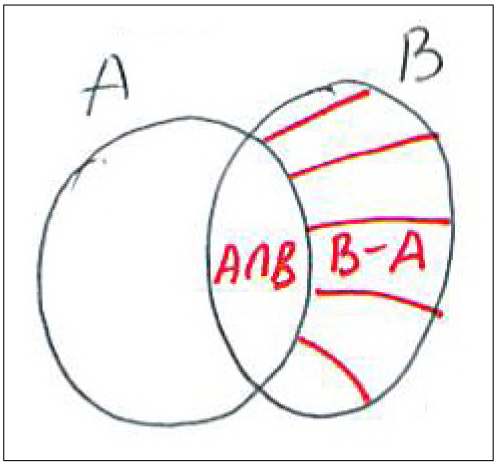

Figura 2: Descomposición de B como unión de $A \cap B$ y (B-A)

- $\forall A, B \in \mathcal{A}$ *se verifica que* $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Demostración:

Se tiene que $A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$, además esta unión es disjunta por lo que $P(A \cup B) = P(A - B) + P(B - A) + P(A \cap B)$. Aplicando las propiedades anteriores se obtiene que $P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + $ $+ P(B) - \cancel{P(A \cap B)} + \cancel{P(A \cap B)} = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

- **Corolario**. – *Sea* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio probabilístico y $A,\ B,\ C \in \mathcal{A}$. Entonces se verifica que $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

Demostración:

Aplicando la propiedad asociativa de la unión de sucesos se tiene que $P(A \cup B \cup C) = P[(A \cup B) \cup C] = P(A \cup B) + P(C) - P[(A \cup B) \cap C] =$ $= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P[(A \cap C) \cup (B \cap C)] = P(A) +$ $+ P(B) + P(C) - P(A \cap B) - [P((A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap C \cap B \cap C) =$ $= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

EJERCICIOS

1º Sabiendo que $P(A) = \frac{1}{2},\ P(\overline{B}) = \frac{5}{8}\ yque\ P(A \cup B) = \frac{3}{4}$, calcula:

a) $P(A \cap B)$

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$

c) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$

<u>**Solución**</u>

a) Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) +$ $+P(B) - P(A \cup B) \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} - \frac{3}{4} = \frac{4+3-6}{8} = \frac{1}{8}$, ya que $P(B) = 1- \ = P(\overline{B}) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

c) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

2º Si A y B son dos sucesos tales que $P(A) = 0{,}6,\ P(B) = 0{,}7\ y\ P(A \cup B).P(A \cap B) = 0{,}4$, calcular:
a) $P(A \cup B)$

b) $P(A \cap B)$

3º Sean A y B dos sucesos tales que P(A)=0.3, P(B)=k y P($A \cup B$))=0.8 ¿ Para qué valores de k son incompatibles los sucesos A y B ?

4º En una baraja hemos suprimido varias cartas. Entre las que quedan se dan las siguientes probabilidades, P(rey)=0.15, P(bastos)=0.3, P(carta que no sea ni rey ni bastos)=0.6

a) ¿Está entre ellas el rey de bastos?. En caso afirmativo halla su probabilidad

b) ¿ Cuántas cartas quedan ?

5º En un centro hay 1000 alumnos repartidos así:

alumnos	Chicos	Chicas
usan gafas	187	113
no usan gafas	413	287

Se elige al azar un alumno. Calcular la probabilidad de que sea: a) chico, b) chica, c) no use gafas, d) sea una chica con gafas.

6º Sean A y B dos sucesos tales que P$(A \cup B) = \frac{3}{4}$, $P(\overline{B}) = \frac{2}{3}$ y $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Hallar P(B), P(A) y P$(\overline{A} \cap B)$

7º Determinar si son compatibles o incompatibles los sucesos A y B en los siguientes casos:

a) $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$

b) $P(A) = 0$, $P(B) = \frac{1}{2}$

8º Sean A y B dos sucesos tales que $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{1}{3}$. Hallar $P(A \cup B)$ y $P(A \cap B)$

PROBABILIDAD CONDICIONADA

Hasta el momento hemos calculado probabilidades de sucesos suponiendo que la única información disponible la suministra el espacio muestral. Algunas veces sabemos que ha ocurrido un suceso A y queremos usar esa información para estudiar si ocurre otro suceso B. De esto trata la probabilidad condicionada.

Definición de Probabilidad condiciona.- Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad, con $P(A) > 0$ para cierto suceso $A \in \mathcal{A}$. A partir de este espacio de probabilidad definimos otro $(\Omega, \mathcal{A}, P(\bullet/A)$ donde:

$$\begin{array}{rcl} P(\bullet/A) : \mathcal{A} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ \text{B} & \longmapsto & P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \end{array}$$

Si es cierto que esta terna es un espacio de probabilidad deberá cumplir los tres axiomas de Kolmogorov. Veamos que se cumplen:

1º $\forall B \in \mathcal{A} \Rightarrow P(B/A) \geq 0$

Demostración:

$P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$, como $P(A \cap B) \geq 0,\ P(A) \geq 0 \Rightarrow P(B/A) \geq 0$

2º $P(\Omega/A) = 1$

Demostración:

$$P(\Omega/A) = \frac{P(\Omega \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

3º Si $B_1 \cap B_2 = \phi \Rightarrow P(B_1 \cup B_2/A) = P(B_1/A) + P(B_2/A)$

Demostración:

$$P(B_1 \cup B_2/A) = \frac{P[(B_1 \cup B_2) \cap A]}{P(A)} = \frac{P[(B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A)]}{P(A)}$$

Como $B_1 \cap B_2 = \phi \Rightarrow (B_1 \cap A) \cap (B_2 \cap A) = (B_1 \cap B_2) \cap A = \phi \cap A = \phi$

Por tanto $P(B_1 \cup B_2/A) = \dfrac{P(B_1 \cap A + P(B_2 \cap A}{P(A)} = \dfrac{P(B_1 \cap A)}{P(A)} + \dfrac{P(B_2 \cap A)}{P(A)} = P(B_1/A) + P(B_2/A)$. Esta propiedad se podría extender por inducción a n sucesos, es decir si $B_1,\ B_2,\ .....B_n$ son incompatibles dos a dos, es decir

$B_i \cap B_j = \left\{ \begin{array}{c} B_i = B_j \ si \ i = j \\ \phi \quad si \ \ i \neq j \end{array} \right.$, *entonces* P($B_1 \cup B_2 \cup .....\cup B_n) = P(B_1/A)+$ $+P(B_2/A)+.......+P(B_n/A)$. Podemos afirmar que se cumplen todas las propiedades del espacio probabilístico.

Propiedades de la probabilidad condicionada

1ª $P(\Omega/A) = 1$

Demostración:

$$P(\Omega/A) = \frac{P(\Omega \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

2ª $\forall B \in \mathcal{A} \Rightarrow P(\overline{B}/A) = 1 - P(B/A)$

Demostración:

$$\Omega = B \cup \overline{B} \Rightarrow P(\Omega/A) = P(B \cup \overline{B}/A) \Rightarrow P(\Omega/A) = \frac{P[(B \cup \overline{B}) \cap A]}{P(A)} =$$
$$= \frac{P[(B \cap A) \cup (\overline{B} \cap A)]}{P(A)} \Rightarrow \frac{P(B \cap A)}{P(A)} + \frac{P(\overline{B} \cap A)}{P(A)} = 1 \Rightarrow P(B/A) +$$
$$+P(\overline{B}/A) = 1 \Rightarrow P(\overline{B}/A) = 1 - P(B/A)$$

3ª $\forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow P(\phi/A) = 0$

Demostración:

$$P(\phi/A) = \frac{P(\phi \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\phi)}{P(A)} = \frac{0}{P(A)} = 0$$

4ª Si $C \subset B \Rightarrow P(C/A) \leq P(B/A)$

Demostración:

Al ser $C \subset B \Rightarrow C \cap A \subset B \cap A$. Por lo tanto, según hemos visto anteriormente, $P(C/A) = \dfrac{P(C \cap A)}{P(A)} \leq \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = P(B/A) \Rightarrow P(C/A) \leq$ $\leq P(B/A)$

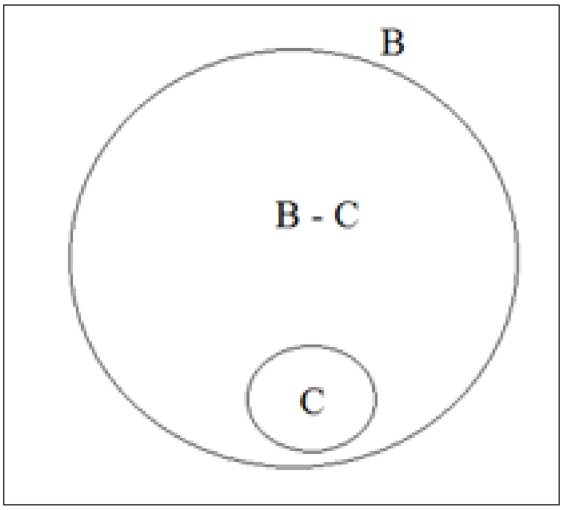

Figura 3:

5ª Si $C \subset B \Rightarrow P(B - C/A) = P(B/A) - P(C/A)$

<u>Demostración</u>:

Según podemos observar en la Figura 3 se puede expresar B como $B = (B - C) \cup C$, además estos sucesos son incompatibles por lo que $(B-C) \cap C = \phi$. Por tanto $P(B/A) = P[B = (B-C) \cup C/a] = P(B-C/A) + P(C/A) \Rightarrow P(B-C/A) = P(B/A) - P(C/A)$

6ª Si $C \not\subset B$, en general se verifica que $P(B - C/A) = P(B/A) - -P(B \cap C/A)$

<u>Demostración</u>:

Tal y como se indica en la figura 4, tenemos que $B = (B - C) \cup (B \cap C)$ y estos dos sucesos (B-C) Y $(B \cap C)$ son incompatibles. Luego:

$P(B/A) = P[(B - C) \cup (B \cap c)/A) = P[(B - C)/A] + P[(B \cap C)/A]$ y por tanto $P[(B - C)/A = P(B/A) - P[(B \cap C)/A]$

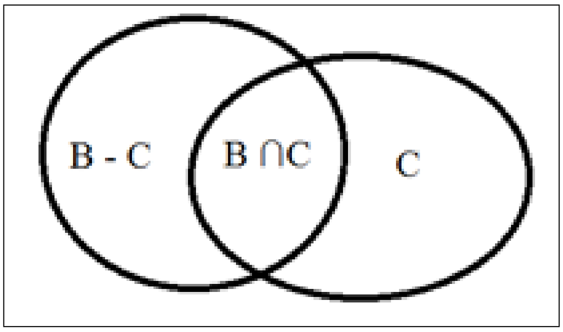

Figura 4:

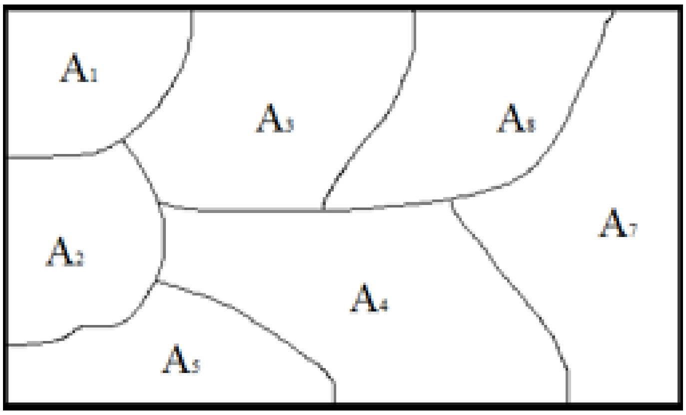

Figura 5: Partición del espacio muestral

Partición del espacio muestral en sucesos elementales

Sea Ω un espacio muestral y $A_1, A_2, ..., A_n$ sucesos. Se dice que estos sucesos son una partición del espacio muestral en sucesos elementales si se verifica:

a) $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup, ..., \cup A_n$

b) $A_i \cap A_j = \begin{cases} A_i = A_j \; si \; i = j \\ \phi \quad si \;\; i \neq j \end{cases}$

TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL

Sea $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ una partición del espacio muestral en sucesos elementales. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad. Entonces $\forall A \in \mathcal{A}$ se verifica que $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).P(A/A_i)$

Demostración:

Como $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup .... \cup A_n$, *al ser* $\Omega \cap A = A \Rightarrow A = (A_1 \cup A_2 \cup .... \cup \cup A_n) \cap A = (A_1 \cap A) \cup (A_2 \cap A) \cup .....(A_n \cap A)$. Al ser los *Ai incompatibles dos a dos* $\forall i = 1, 2, ...n$ también lo son partes de A_i, es decir que $(A_2 \cap A)$ son incompatibles dos a dos. Por lo tanto $P(A) =$
$= P[(A_1 \cap A) \cup (A_2 \cap A) \cup .....(A_n \cap A)] = \sum_{i=1}^{n} P(Ai \cap A)$. Por la definición de probabilidad condicionada $P(A/Ai) = \dfrac{P(Ai \cap A)}{P(A_i)} \Rightarrow P(A \cap Ai) = P(A_i)P(A/A_i)$.
Sustituyendo este valor en la expresión anterior obtenemos $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).P(A/A_i)$

TEOREMA DE BAYES

Sea $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ una partición del espacio muestral en sucesos elementales. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad. Entonces $\forall A \in \mathcal{A}$ se cumple que:

$$P(A_i/A) = \frac{P(A_i)P(A/A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i).P(A/A_i)}$$

Demostración:

Se tiene que $P(A \cap A_i) = P(A_i)P(A/A_i) = P(A)P(Ai/A) \Rightarrow P(A_i/A) = \dfrac{P(A_i).P(A/A_i)}{P(A)}$ (*). Según el teorema de la probabilidad total $P(A) =$
$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i).P(A/A_i)$ Si sustituimos en la expresión (*) obtenemos:

$$P(A_i/A) = \frac{P(A_i)P(A/A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i).P(A/A_i)}$$

UN BREVE REPASO DE COMBINATORIA

a) Variaciones ordinarias.- Se llaman variaciones ordinarias de m elementos tomados n a n a las distintas agrupaciones de n elementos que se pueden hacer con los m elementos dados de forma que cada dos agrupaciones difieran entre sí bien por el orden de sus elementos, bien por la naturaleza de los mismos. No se pueden repetir elementos en una misma agrupación. Para calcularlas se emplea la fórmula $V_m^n = m(m-1).......(m-n+1)$

b) Variaciones con repetición.- Se definen de la misma forma que las variaciones ordinarias con la salvedad de que no se pueden repetir elementos en una misma agrupación. Para calcularlas se emplea la fórmula :
$VR_m^n = m^n$

Ejemplo

¿Cuántos números de 4 cifras podemos formar con los dígitos del conjunto { 1,3,4,5,8 } ? ¿Y si las cifras han de ser distintas?

Solución:

i) Formamos uno de los números, por ejemplo 1345. Si variamos el orden de los dígitos 5431 obtenemos un número distinto. Luego importa el orden. La naturaleza de los elementos que intervienen en la formación de una agrupación también varía, si ahora elegimos el número 8314, al compararlo con 1345 hemos variado la naturaleza al cambiar el 5 por un 8. Además se pueden repetir los elementos ya que son válidas las agrupaciones 5551, 4444, 8383, tc. Al cambiar orden y naturaleza y poderse repetir los dígitos se trata de variaciones con repetición de 5 elementos tomados 4 a 4:

$VR_5^4 = 5^4 = 625$

ii) si las cifras han de ser distintas varían el orden y la naturaleza pero no se pueden repetir elementos. Se trata entonces de variaciones ordinarias:

$V_5^4 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$

c) Permutaciones ordinarias.- Se llaman permutaciones de m elementos a las distintas agrupaciones de m elementos que podemos hacer con los m elementos que nos dan, de forma que cada dos grupos difieran por el orden de sus elementos. No se pueden repetir elementos en una misma agrupación.

Para su cálculo se emplea la expresión $P_m = m! = m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$

d) Permutaciones con repetición.- Se definen de igual forma que las permutaciones ordinarias pero se pueden repetir elementos en un grupo. Si se repite α-veces el primer elemento, β- veces el segundo,γ-veces el tercero, etc la expresión para su cálculo es $PR_m^{\alpha,\beta,\gamma,\cdot,\cdot,\cdot} = \dfrac{m!}{\alpha!\beta!\gamma!\cdots}$, donde $\alpha+\beta+\gamma+\cdots = m$

e) Combinaciones.- Se llaman combinaciones de m elementos tomados n a n, a las distintas agrupaciones de n elementos que podemos formar con los m elementos dados de forma que cada dos de estas agrupaciones difieran por la naturaleza de sus elementos. No se pueden repetir elementos en un mismo grupo.Para su cálculo se emplea la expresión:

$$C_m^n = \frac{V_m^n}{P_n} = \frac{m!}{n!(m-n)!} = \binom{m}{n}$$

<u>Definición</u>(independencia de sucesos): Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad. Se dice que los sucesos $A, B \in \mathcal{A}$ son independientes si:

- P(A|B)= P(A)
- P(B|A)= P(B)

<u>Teorema</u>: Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y sean $A, B \in \mathcal{A}$. Entonces:

$$A, B \textit{ son independientes } \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

<u>Demostración</u>:

Según la definición de probabilidad condicionada tenemos que $P(A/B) = = \dfrac{P(A \cap B}{P(B)} \Longleftrightarrow P(A \cap B = P(A/B) \cdot P(B)$. Si suponemos que A y B son independientes tenemos que $P(A/B) = P(A) \Longleftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Podemos dar entonces la siguiente definición de sucesos independientes: dados dos sucesos $A, B \in \mathcal{A}$ se dice que A y B son independientes si verifican alguna de las tres propiedades siguientes

i) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

ii) $P(A/B) = P(A) \ si \ P(B) > 0$

iii) $P(B/A) = P(B) \ si \ P(A) > 0$

Proposición: Todo suceso $A \in \mathcal{A}$ es independiente de $\phi \ y \ de \ \Omega$

Demostración

$P(A \cap \Omega) = P(A) = P(A) \cdot P(\Omega)$ ya que $P(\Omega) = 1$

$P(A \cap \phi) = P(\phi) = 0 = P(\phi).P(A)$

Proposición:Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad. Supongamos que $A, B \in \mathcal{A}$ son independientes. Entonces:

i) A y $\overline{B}$ son independientes

ii) $\overline{A}$ y B son independientes

iii) $\overline{A}$ y $\overline{B}$ son independientes

Demostración:

i) Se tiene que $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$, ademas los sucesos $A \cap B \ y \ A \cap \overline{B}$ son incompatibles, aplicando los axiomas de Kolmogorov, $P(A) = P[(A \cap B) \cup \cup (A \cap \overline{B})] \Rightarrow P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$. Por ser A y B independientes $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Luego $P(A) = P(A) \cdot P(B) + P(A \cap \overline{B}) \Rightarrow P(A \cap \overline{B}) = = P(A) - P(A) \cdot P(B) \Rightarrow P(A \cap \overline{B}) = P(A) \cdot (1 - P(B)) = P(A) \cdot P(\overline{B})$ con lo que A y $\overline{B}$ son independientes.

ii) Al igual que en i) se tiene que $B = (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap B)$. Además como los sucesos de esta unión son incompatibles aplicando los axiomas de Kolmogorov se tiene que $P(B) = P(\overline{A} \cap B) + P(A \cap B)$. Al ser A y B independientes $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ con lo que $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A) \cdot P(B) \Rightarrow P(\overline{A} \cap B) = P(B) \cdot (1 - P(A)) \Rightarrow P(\overline{A} \cap B) = P(B) \cdot (1 - P(A)) = P(\overline{A}) \cdot P(B)$, entonces $\overline{A}$ y B son independientes.

iii) Según las leyes de Morgan $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$. Por tanto $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$. Al ser A y B independientes se verifica que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ con lo que $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P(B) = (1 - P(A)) - (1 - P(A)) \cdot P(B) =$

$(1 - P(A)) \cdot (1 - P(B)) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B})$. Hemos probado que $P(\overline{A} \cap \overline{B}) =$ $= P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B})$ con lo que los sucesos $\overline{A}$ y $\overline{B}$ son independientes.