TEMA 5 - EJERCICIOS

18.- Dado el vector aleatorio (X,Y) cuya función de densidad conjunta es f(x,y)=x+y si 0<x<1, 0<y<1 (0 en el resto), obtenga su covarianza y su coeficiente de correlación. ¿Son X e Y incorreladas? ¿e independientes?

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{si } 0<x<1,\ 0<y<1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Obtenga su covarianza y su coeficiente de correlación

b) ¿Son X, Y incorreladas?, ¿e independientes?

a) $Cov(X,Y) = E[X\cdot Y] - E[X]\cdot E[Y]$

$$E[X\cdot Y] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 xy(x+y)\,dy\right)dx$$

$$\int xy(x+y)\,dy = \int x^2y + xy^2\,dy = \frac{x^2y^2}{2} + \frac{xy^3}{3}$$

$$\int_0^1 xy(x+y)\,dy = \left[\frac{xy^2}{2} + \frac{xy^3}{3}\right]_0^1 = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{3}$$

$$\int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{3}\right)dx = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{6}\Big]_0^1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f_1(x)\,dx =$$

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^1 (x+y)\,dy = xy + \frac{y^2}{2}\Big]_0^1 = x + \frac{1}{2}$$

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + x & \text{si } 0<x<1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$. luego

$$E[X] = \int_0^1 x\left(\frac{1}{2}+x\right)dx = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}x^3\Big]_0^1 = \frac{1}{4}+\frac{1}{3} = \frac{7}{12}$$

De igual forma

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_2(y)\, dy$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dx = \int_0^1 (x+y)\, dx = \frac{1}{2}x^2 + xy \Big]_0^1 = \frac{1}{2} + y$$

$$f_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} + y & \text{si } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

$$E[Y] = \int_0^1 y \cdot \left(\frac{1}{2} + y\right) dy = \left[\frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{3}y^3\right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$$

Entonces $Cov(x,y) = \frac{1}{3} - \frac{7}{12} \cdot \frac{7}{12} = -\frac{1}{144}$

La varianza de X es: $\sigma_x^2 = E[x^2] - E[x]^2$

$$E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_1(x)\, dx = \int_0^1 x^2\left(\frac{1}{2} + x\right) dx = \int_0^1 \frac{1}{2}x^2 + x^3\, dx$$

$$E[x^2] = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^4 \Big]_0^1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

Luego $\sigma_x^2 = \frac{5}{12} - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{11}{144} \Rightarrow \boxed{\sigma_x = 0'2763}$

$$\sigma_y^2 = E[Y^2] - E[Y]^2$$

$$E[Y^2] = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \cdot f_2(y)\, dy = \int_0^1 y^2\left(\frac{1}{2} + y\right) dy = \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{4}y^4 \Big]_0^1$$

$E[Y^2] = \frac{5}{12}$. Luego:

$$\sigma_y^2 = \frac{5}{12} - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{11}{144} \Rightarrow \boxed{\sigma_y = 0'2763}$$

El coeficiente de correlación lineal es:

$$\rho_{xy} = \frac{Cov(x,y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{-\frac{1}{144}}{\frac{11}{144}} = -\frac{1}{11} \Rightarrow X, Y \text{ no son}$$

incorreladas.

Si X e Y fueran independientes $Cov(X,Y) = 0$. Luego si $Cov(X,Y) \neq 0 \Rightarrow X, Y$ no son independientes.

19.- Consideremos dos v.v.aa. X e Y con la siguiente distribución de probabilidad conjunta:

Y\X	0	1
0	a	b
1	c	d

Demuestre que si son incorreladas son independientes.

Que son incorreladas quiere decir que $Cov(X,Y) = 0$ pero esto no quiere decir que X e Y tengan que ser necesariamente independientes: lo que se verifica es la propiedad de que si X e Y son independientes $\Rightarrow$ $\Rightarrow Cov(X,Y) = 0 \Rightarrow \rho_{XY} = 0 \Rightarrow$ X e Y son incorreladas, pero la propiedad recíproca no tiene porqué darse. Entonces sabemos que $Cov(X,Y) = 0$.

$Cov(X,Y) = E[X \cdot Y] - E[X] \cdot E[Y] = 0$

$E[X \cdot Y] = \sum x_i \cdot y_j \cdot P[X = x_i, Y = y_j] = 0 \cdot 0 \cdot a + 0 \cdot 1 \cdot b + 1 \cdot 0 \cdot c + 1 \cdot 1 \cdot d = d$

La distribución marginal de probabilidad de X es:

x	$P[X=x]$
0	$a+c$
1	$b+d$

$\Rightarrow E[X] = 0 \cdot (a+c) + 1 \cdot (b+d) = b+d \Rightarrow E[X] = b+d$

La distribución marginal de Y es

y	$P[Y=y]$
0	$a+b$
1	$c+d$

$\Rightarrow E[Y] = 0 \cdot (a+b) + 1 \cdot (c+d) = c+d \Rightarrow \boxed{E[Y] = c+d}$

Luego $Cov(X,Y) = \boxed{d - (b+d)(c+d) = 0}$ (I)

Sabemos que ha de verificarse $\boxed{a+b+c+d = 1}$ (II)

Y/X	0	1	
0	a	b	$a+b$
1	c	d	$c+d$
	$a+c$	$b+d$	

Para que X Y sean independientes han de verificarse:

$$\left.\begin{array}{l} a = (a+b)(a+c) \\ b = (a+b)\cdot(b+d) \\ c = (a+c)\cdot(c+d) \\ d = (b+d)(c+d) \end{array}\right\}$$ $\to$ esto es cierto según la propiedad (I) que se desprende de $cov(X,Y) = 0$.

* Veamos que $a = (a+b)(a+c)$

Como $a+b+c+d = 1 \Rightarrow a+b = 1-(c+d)$; $a+c = 1-(b+d)$

Por lo tanto:

$$(a+b)(a+c) = [1-(c+d)]\cdot[1-(b+d)] = 1-(b+d)-(c+d)+$$
$$+\underbrace{(c+d)(b+d)}_{\text{Esto es } d \text{ según (I)}} = 1-b-d-c-\cancel{d}+\cancel{d} = 1-(b+c+d) = a$$

* Veamos que $b = (a+b)(b+d)$

Como $a+b+c+d = 1 \Rightarrow a+b = 1-(c+d)$; se cumple que:

$$(a+b)(b+d) = [1-(c+d)]\cdot(b+d) = b+d-\underbrace{(c+d)(b+d)}_{\text{Esto es } d \text{ según (I)}} = b+d-d = b$$

* Veamos que se cumple $c = (a+c)(c+d)$

Como $a+b+c+d = 1 \Rightarrow a+c = 1-(b+d)$. Entonces:

$$(a+c)(c+d) = [1-(b+d)]\cdot(c+d) = c+d-\underbrace{(b+d)(c+d)}_{\text{Esto es } d \text{ según (I)}} = c+d-d = c$$

29º Sean X, Y variables aleatorias independientes, con funciones de probabilidad

$$P[X=x] = e^{-\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_1^x}{x!} \quad x = 0,1,2,\dots$$

$$P[Y=y] = e^{-\lambda_2} \cdot \frac{\lambda_2^y}{y!} \quad y = 0,1,2,\dots$$

a) Obtenga la función generatriz de momentos de X y de Y

b) Obtenga la esperanza y la varianza de X y de Y

c) Obtenga la función generatriz de $Z = X+Y$.

a) $$\phi_x(t) = E[e^{tx}] = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \frac{e^{-\lambda_1} \cdot \lambda_1^x}{x!} = e^{-\lambda_1} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(e^t \cdot \lambda_1)^x}{x!}$$

$$\phi_x(t) = e^{-\lambda_1} \cdot e^{\lambda_1 e^t} \Rightarrow \boxed{\phi_x(t) = e^{\lambda_1 (e^t - 1)}}$$

Del mismo modo podemos obtener $\phi_Y(s) = e^{\lambda_2 (e^s - 1)}$

b)

$$E[X] = \left.\frac{\partial \phi_x(t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \lambda_1 e^t \cdot e^{\lambda_1(e^t-1)}\Big|_{t=0} = \lambda_1.$$

$$E[Y] = \left.\frac{\partial \phi_y(t)}{dt}\right|_{t=0} = \lambda_2 \cdot e^t \cdot e^{\lambda_2(e^t-1)}\Big|_{t=0} = \lambda_2$$

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$$

$$E[X^2] = \left.\frac{\partial^2 \phi_x(t)}{\partial t^2}\right|_{t=0} = \lambda_1 \cdot e^t \cdot e^{\lambda_1(e^t-1)} + \lambda_1^2 \cdot e^{2t} \cdot e^{\lambda_1(e^t-1)}\Big|_{t=0} = \lambda_1(1+\lambda_1)$$

Por tanto $Var[X] = \lambda_1 + \lambda_1^2 - \lambda_1^2 = \lambda_1$. De la misma manera $Var[Y] = \lambda_2$

c) Al ser X e Y independientes $P[X=x, Y=y] = P[X=x] \cdot P[Y=y]$ y también se cumple que $E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y]$. Entonces:

$$\phi_Z(t) = E[e^{tZ}] = E[e^{tX+tY}] = E[e^{tX} \cdot e^{tY}] = E[e^{tX}] \cdot E[e^{tY}]$$

$$\phi_Z(t) = \phi_x(t) \cdot \phi_y(t) = e^{\lambda_1(e^t-1)} \cdot e^{\lambda_2 (e^t-1)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^t-1)}$$

$$\phi_Z(t) = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^t-1)}$$

31º Sea (X,Y) v.a. con función de densidad conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0<x<1,\ 0<y<1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Obtenga su función generatriz

b) Obtenga la función generatriz de $Z = X+Y$

a) $\phi_{(X,Y)}(s,t) = E[e^{sx+ty}] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx+ty} \cdot f(x,y)\, dx\, dy =$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^1 e^{sx+ty}\, dy \right) dx =$$

$$\int e^{sx+ty}\, dy \left\{ \begin{array}{l} w = sx+ty \\ dw = t\, dy \\ dy = \frac{1}{t}\, dw \end{array} \right\} = \int e^{w} \cdot \frac{1}{t}\, dw = \frac{1}{t} \cdot e^{w} = \frac{1}{t} \cdot e^{sx+ty}$$

$$\int_0^1 e^{sx+ty}\, dy = \frac{1}{t} e^{sx+ty} \Big]_0^1 = \frac{1}{t} e^{sx+t} - \frac{1}{t} e^{sx}$$

Luego:

$$\phi_{(X,Y)}(s,t) = \int_0^1 \frac{1}{t} e^{sx+t} - \frac{1}{t} e^{sx}\, dx = \frac{1}{t} \int_0^1 e^{sx+t}\, dx - \frac{1}{t} \int_0^1 e^{sx}\, dx$$

$$\int e^{sx+t}\, dx \left\{ \begin{array}{l} w = sx+t \\ dw = s\, dx \\ dx = \frac{dw}{s} \end{array} \right\} = \int e^{w} \cdot \frac{dw}{s} = \frac{1}{s} e^{sx+t}$$

$$\int_0^1 e^{sx+t}\, dx = \frac{1}{s} e^{sx+t} \Big]_0^1 = \frac{1}{s} e^{s+t} - \frac{1}{s} e^{t}.$$

$$\int_0^1 e^{sx} = \frac{1}{s} e^{sx} \Big]_0^1 = \frac{1}{s} e^{s} - \frac{1}{s}$$

luego la función generatriz de momentos es:

$$\phi_{(X,Y)}(s,t) = \frac{1}{st}\left[e^{s+t} - e^{t} - e^{s} + 1 \right] \text{ siendo } s \neq 0,\ t \neq 0$$

b) La función generatriz de momentos de $Z = X+Y$ es

$$\phi_Z(t) = E[e^{tZ}] = E[e^{tX+tY}] = \phi_{(X,Y)}(t,t)$$

$$\phi_Z(t) = \frac{1}{t^2}\left[e^{2t} - 2e^t + 1\right] \text{ si } t \neq 0.$$

32º) Sea (X,Y) una v.a. bidimensional con función de probabilidad $P[X=m, Y=n] = \frac{1}{2^{m+n}}$ $m,n = 1,2,\ldots$

a) Obtenga su función generatriz de momentos

b) Obtenga la función generatriz de $X+Y$

c) Obtenga la covarianza de (X,Y)

a) $\phi_{(X,Y)}(s,t) = E[e^{sX+tY}] = \sum_i \sum_j e^{sx_i + ty_j} \cdot P[X=x_i, Y=y_j]$

$$\phi_{(X,Y)}(s,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{sm+tn} \cdot P[X=m, Y=n]$$

$$\phi_{(X,Y)}(s,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{sm} \cdot e^{tn} \cdot \frac{1}{2^n \cdot 2^m} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{sm}}{2^m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{tn}}{2^n}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{tn}}{2^n} = \frac{e^t}{2} + \frac{e^{2t}}{4} + \frac{e^{3t}}{8} \ldots$ (suma de los infinitos términos de una progresión geométrica de razón $\frac{e^t}{2}$)

Para que exista esta suma $|r| = \left|\frac{e^t}{2}\right| = \frac{e^t}{2} < 1 \Rightarrow e^t < 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{t < \ln 2}$ y en este caso la suma vale:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{tn}}{2^n} = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{e^t}{2}}{1-\frac{e^t}{2}} = \frac{\frac{e^t}{2}}{\frac{2-e^t}{2}} = \frac{e^t}{2-e^t}.$$ Luego:

$$\phi_{(X,Y)}(s,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{sm}}{2^m} \cdot \frac{e^t}{2-e^t} = \frac{e^t}{2-e^t} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{sm}}{2^m}$$

Del mismo modo que con n, se tiene $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{sm}}{2^m} = \frac{e^s}{2-e^s}$ $\boxed{s < \ln 2}$

Luego la función generatriz de momentos es:

$$\phi_{(x,y)}(s,t) = \frac{e^t}{2-e^t} \cdot \frac{e^s}{2-e^s} \qquad t<\ln 2 \,,\; s<\ln 2$$

$$\phi_{(x,y)}(s,t) = \frac{e^{t+s}}{(2-e^t)(2-e^s)} \qquad t<\ln 2 \,,\; s<\ln 2$$

b) La función generatriz de momento de $Z = X+Y$ es:

$$\phi_Z(t) = E[e^{tZ}] = E[e^{tX+tY}] = \phi_{(x,y)}(t,t) = \frac{e^{2t}}{(2-e^t)^2} \text{ si } t<\ln 2$$

c) La covarianza es: $Cov[X,Y) = E[X\cdot Y] - E[X]\cdot E[Y]$

$$E[X\cdot Y] = \frac{\partial^2 \phi_{(x,t)}}{\partial s\,\partial t}\Bigg|_{\substack{s=0\\t=0}} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \phi_{(x,y)}(s,t)}{\partial t}\right)\Bigg|_{\substack{s=0\\t=0}} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{e^{t+s}\cdot(2-e^t)(2-e^s) - e^{t+s}\cdot(-e^t)(2-e^s)}{(2-e^t)^2\,(2-e^s)^2}\right]_{\substack{t=0\\s=0}} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{e^{t+s}(2-e^t) + e^{t+s}\cdot e^t}{(2-e^t)^2\cdot(2-e^s)}\right]_{\substack{t=0\\s=0}} = \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{e^s + e^s}{2-e^s}\right]_{s=0}$$

$$= \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{2e^s}{2-e^s}\right]_{s=0} = \frac{2\cdot e^s\cdot(2-e^s) - 2e^s\cdot(-e^s)}{(2-e^s)^2}\Bigg|_{s=0} = \frac{4}{1} = 4.$$

$$E[X] = \frac{\partial \phi_{(x,y)}(s,0)}{\partial s}\Bigg|_{s=0} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{e^{s+0}}{(2-e^s)(2-e^0)}\right)_{s=0} =$$

$$E[X] = \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{e^s}{2-e^s}\right]_{s=0} = \left[\frac{e^s(2-e^s) - e^s\cdot(-e^s)}{(2-e^s)^2}\right]_{s=0} = \frac{2}{1} = 2$$

Del mismo modo:

$$E[Y] = \frac{\partial \phi_{(x,y)}(0,t)}{\partial t}\Bigg]_{t=0} = 2.$$

Luego $Cov(X,Y) = E[X\cdot Y] - E[X]\cdot E[Y] = 4 - 2\cdot 2 = 0$