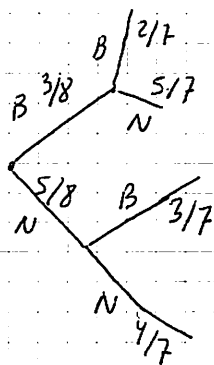


SOLUCION EJERCICIOS TEMA 3

26° x : resultado 1ª extracción $\begin{cases} 1 \text{ blanca} \\ 0 \text{ negra} \end{cases}$
 y : resultado 2ª extracción $\begin{cases} 1 \text{ blanca} \\ 0 \text{ negra} \end{cases}$

a) Distribución probabilidad conjunta

$x \backslash y$	0	1	
0	$5/14$	$15/56$	$35/56$
1	$15/56$	$6/56$	$21/56$
	$35/56$	$21/56$	



$$P(0,0) = \frac{4}{7} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{14}$$

$$P(0,1) = \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{8} = \frac{15}{56}$$

$$P(1,0) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$$

$$P(1,1) = \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{8} = \frac{6}{56}$$

b) Distribución marginal de x

x_i	$P(x_i)$
0	$35/56$
1	$21/56$

Distribución marginal de y

y_i	$P(y_i)$
0	$35/56$
1	$21/56$

$$c) P(y=0/x=0) = \frac{P(0,0)}{P(x=0)} = \frac{\frac{5}{14}}{\frac{35}{56}} = \frac{\frac{20}{56}}{\frac{35}{56}} = \frac{20}{35} = \frac{4}{7}$$

$$P(y=1/x=0) = \frac{P(0,1)}{P(x=0)} = \frac{15/56}{35/56} = \frac{15}{35} = \frac{3}{7}$$

$$P(y=0/x=1) = \frac{P(1,0)}{P(x=1)} = \frac{15/56}{21/56} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}$$

$$P(y=1/x=1) = \frac{P(1,1)}{P(x=1)} = \frac{6/56}{21/56} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$$

Los resultados del apartado c) se pueden recoger en una sola tabla

	$P(Y/X=0)$	$P(Y/X=1)$
$Y=0$	$\frac{4}{7}$	$\frac{5}{7}$
$Y=1$	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$

27º

$X \backslash Y$	10	14	18	
3	0'25	0'15	K	0'72
6	0'10	0'05	0'13	0'28
	0'35	0'2	0'45	

a) $0'25 + 0'15 + K + 0'10 + 0'05 + 0'13 = 1 \Rightarrow K + 0'68 = 1 \Rightarrow K = 0'32$

X	$P(X)$	Y	$P(Y)$
3	0'72	10	0'35
6	0'28	14	0'2
		18	0'45

$c)$	$P(X/Y=10)$
$X=3$	$\frac{5}{7}$
$X=6$	$\frac{2}{7}$

$$P(X=3/Y=10) = \frac{P(X=3, Y=10)}{P(Y=10)} = \frac{0'25}{0'35}$$

$$P(X=6/Y=10) = \frac{P(6, 10)}{P(Y=10)} = \frac{0'10}{0'35} = \frac{2}{7}$$

$$P(Y=10/X=6) = \frac{P(6, 10)}{P(X=6)} = \frac{0'10}{0'28}$$

$$P(Y=14/X=6) = \frac{P(6, 14)}{P(X=6)} = \frac{0'05}{0'28} = \frac{5}{28}$$

$$P(Y=18/X=6) = \frac{P(6, 18)}{P(X=6)} = \frac{0'13}{0'28} = \frac{13}{28}$$

	$P(Y/X=6)$
$Y=10$	$\frac{5}{28}$
$Y=14$	$\frac{5}{28}$
$Y=18$	$\frac{13}{28}$

$$28^{\circ} P[X=i, Y=j] = c(i+j) \quad i=1, 2, 3, 4, \quad j=1, 2, 3$$

a) Valor de c

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 c(i+j) = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^4 c \cdot \sum_{j=1}^3 (i+j) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^4 c \cdot [(i+1) + (i+2) + (i+3)] = 1 \Rightarrow c \cdot \sum_{i=1}^4 (3i+6) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c \cdot [9 + 12 + 15 + 18] = 1 \Rightarrow 54c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{54}$$

b) Probabilidad marginal

Probabilidad marginal de X

$$P[X=i] = \sum_{j=1}^3 P[X=i, Y=j] = \sum_{j=1}^3 \frac{1}{54} (i+j) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P[X=i] = \frac{1}{54} [(i+1) + (i+2) + (i+3)] = \frac{6+3i}{54}$$

$$P[X=i] = \frac{2+i}{18}$$

Probabilidad marginal de Y

$$P[Y=j] = \sum_{i=1}^4 P[X=i, Y=j] = \frac{1}{54} \sum_{i=1}^4 (i+j) =$$

$$P[Y=j] = \frac{1}{54} [(1+j) + (2+j) + (3+j) + (4+j)] =$$

$$P[Y=j] = \frac{10+4j}{54} \Rightarrow P[Y=j] = \frac{5+2j}{27}$$

$$c) P[X=i/Y=j] = \frac{P[X=i, Y=j]}{P[Y=j]} = \frac{\frac{1}{54} (i+j)}{\frac{10+4j}{54}} = \frac{i+j}{10+4j}$$

$$P[Y=j/X=i] = \frac{P[X=i, Y=j]}{P[X=i]} = \frac{\frac{1}{54} (i+j)}{\frac{6+3i}{54}} = \frac{i+j}{6+3i}$$

d) x e y no son independientes ya que

$$P_{ij} \neq P_{i\cdot} \cdot P_{\cdot j}$$

$$P_{ij} = \frac{1}{54} (i+j)$$

$$P_{i\cdot} = \frac{2+i}{18}$$

$$P_{\cdot j} = \frac{5+2j}{27}$$

29°

29.- La función de probabilidad conjunta de (X, Y) esta dada por la siguiente tabla.

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{18}$
1	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$

Obtenga:

- Las funciones de probabilidad marginales de X e Y .
- La función de distribución conjunta de (X, Y) .
- Las funciones de distribución marginales de X e Y .
- Pruebe que X e Y no son independientes.

a) Probabilidad marginal de X

$$P(X=0) = P(X=0, Y=0) + P(X=0, Y=1) = \frac{2}{9} + \frac{5}{18} = \frac{1}{2}$$

$$P[X=1] = P[X=1, Y=0] + P[X=1, Y=1]$$

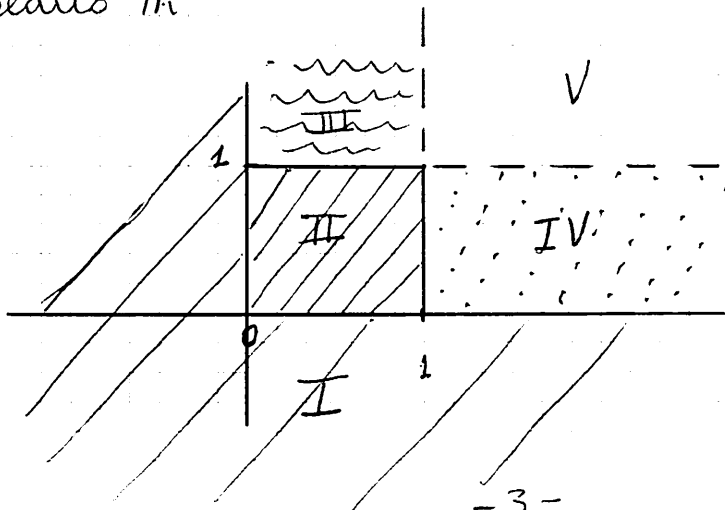
$$P[X=1] = \frac{5}{18} + \frac{2}{9} = \frac{1}{2}$$

x	$P(X=x)$
0	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{2}$

De igual forma la probabilidad marginal de Y es:

y	$P(Y=y)$
0	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{2}$

b) la función de distribución conjunta es $F(x, y) = P[X \leq x, Y \leq y]$. Vamos a particionar el plano $\mathbb{R}^2$



• Si $x < 0$ o $y < 0$ $F(x, y) = 0$ (región I)

• Si $0 \leq x < 1$, $0 \leq y < 1$ (región II)

$$F(x, y) = P[X \leq x, Y \leq y] = P[X=0, Y=0] = \frac{2}{9}$$

• Si $0 \leq x < 1$, $y \geq 1$ (región III)

$$F(x, y) = P[X \leq x, Y \leq y] = P[X=0, Y=0] + P[X=0, Y=1] = \frac{1}{2}$$

• Si $x \geq 1$, $0 \leq y < 1$

$$F(x, y) = P[X \leq x, Y \leq y] = P[X=0, Y=0] + P[X=1, Y=0] = \frac{1}{2}$$

• Si $x \geq 1$, $y \geq 1$

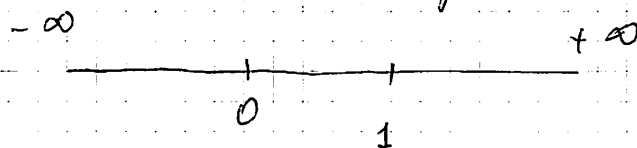
$$F(x, y) = P[X \leq x, Y \leq y] = P[X=0, Y=0] + P[X=0, Y=1] + P[X=1, Y=0] + P[X=1, Y=1] = 1$$

Luego la función de distribución conjunta es:

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \text{ o } y < 0 \\ \frac{2}{9} & \text{si } 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leq x < 1, y \geq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \geq 1, 0 \leq y < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1, y \geq 1 \end{cases}$$

c) Función de distribución marginal de x

$F_1(x) = F(x, +\infty)$. El campo de variación de x se muestra en la siguiente partición de la recta real:



• Si $x < 0 \Rightarrow F_1(x) = 0$

• Si $0 \leq x < 1 \Rightarrow F_1(x) = F(x, +\infty) = P[X \leq x, Y < +\infty] = P[X=0, Y=0] + P[X=1, Y=0] = \frac{1}{2}$

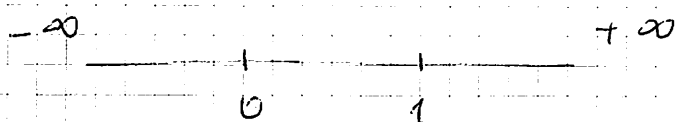
• Si $x \geq 1 \Rightarrow F_1(x) = 1$

Luego la función de distribución marginal de x es:

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Función de distribución marginal de Y :

$F_2(y) = F(+\infty, y] = P[X < +\infty, Y \leq y]$. El campo de variación de Y viene dado por:



• si $y < 0 \Rightarrow F_2(y) = 0$

• si $0 \leq y < 1$

$$F_2(y) = F(+\infty, y) = P[X=0, Y=0] + P[X=1, Y=0] = \frac{1}{2}$$

• si $y \geq 1 \Rightarrow F_2(y) = P[X=0, Y=0] + P[X=1, Y=0] + P[X=0, Y=1] + P[X=1, Y=1] = 1$.

Entonces:

$$F_2(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leq y < 1 \\ 1 & \text{si } y \geq 1 \end{cases}$$

d) Veamos que X e Y no son independientes.

Si X e Y fueran independientes verificaríamos:

$P_{ij} = P_{i \cdot} \cdot P_{\cdot j} \quad \forall i, j$ y esto no es cierto, por ejemplo:

$$P_{00} = \frac{2}{9} \neq P_{0 \cdot} \cdot P_{\cdot 0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

30.- La variable X toma los valores 0 y 1 con probabilidades $1/2$ y $1/2$ respectivamente, y la v.a. Y , los valores 0 y 2 con probabilidades $1/3$ y $2/3$. Si $p = P(X=0, Y=0)$, determine en función de p las siguientes probabilidades:

$$P(X=0, Y=2), P(X=1, Y=0), P(X=1, Y=2)$$

Hagamos la tabla de la distribución de probabilidad

$X \backslash Y$	0	2	
0	p	$\frac{1}{2} - p$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{3} - p$	$p + \frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	

De aquí obtenemos que

$$P[X=0, Y=2] = \frac{1}{2} - p$$

$$P[X=1, Y=0] = \frac{1}{3} - p$$

$$P[X=1, Y=2] = p + \frac{1}{6}$$

31.- Sean X e Y variables aleatorias continuas con densidad conjunta $f(x,y)=c(x^2+y^2)$ si $0 < x < 1$ y $0 < y < 1$ (0 en el resto).

- Determine c.
- Obtenga la función de distribución.
- Obtenga las funciones de densidad marginales y las condicionadas.
- $P(X < 1/2, Y > 1/2)$.
- ¿Son independientes?

En variable aleatoria continua la adición de un punto no varia ni la función de densidad, ni la de probabilidad ni la de distribución. Podemos poner:

$$f(x,y) = \begin{cases} c(x^2+y^2) & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) se debe de cumplir, al ser $f(x,y)$ función de densidad, las dos propiedades siguientes:

$$1^\circ \quad 0 \leq f(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow c(x^2+y^2) \geq 0 \Rightarrow c \geq 0$$

$$2^\circ \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dy \right) dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 \left(\int_0^1 c(x^2+y^2) dy \right) dx = 1.$$

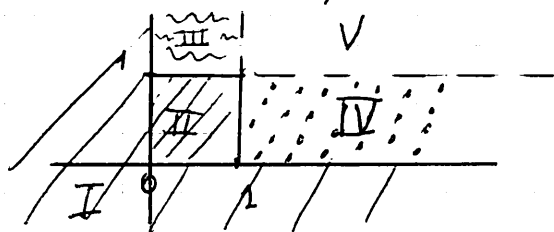
$$\int_0^1 c \cdot (x^2+y^2) dy = c \int_0^1 (x^2+y^2) dy = c \cdot \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_0^1 =$$

$$c \cdot \left(x^2 + \frac{1}{3} \right)$$

$$\int_0^1 c \left(x^2 + \frac{1}{3} \right) dx = 1 \Rightarrow c \cdot \left[\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3} x \right]_0^1 = 1 \Rightarrow c \cdot \frac{2}{3} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \frac{3}{2}$$

b) Para hallar la función de distribución vamos a particionar el plano $\mathbb{R}^2$



- si $x < 0$ o $y < 0$ $F(x,y) = 0$ (region I)
- si $0 \leq x < 1$, $0 \leq y < 1$ (region II)

$$F(x,y) = \int_0^x \left(\int_0^y \frac{3}{2} (x^2 + y^2) dy \right) dx$$

$$\int_0^y \frac{3}{2} (x^2 + y^2) dy = \frac{3}{2} \left(x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right) = \frac{3}{2} x^2 y + \frac{1}{2} y^3$$

$$\int_0^x \frac{3}{2} x^2 y + \frac{1}{2} y^3 dx = \frac{3}{2} \cdot \frac{x^3}{3} y + \frac{1}{2} y^3 x = \frac{x^3 y + x y^3}{2}$$

- si $0 \leq x < 1$, $y \geq 1$ (region III)

$$F(x,y) = \int_0^x \left(\int_0^1 \frac{3}{2} (x^2 + y^2) dy \right) dx$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{3}{2} (x^2 + y^2) dy &= \frac{3}{2} \left[x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right]_0^1 = \frac{3}{2} \left(x^2 + \frac{1}{3} \right) = \\ &= \frac{3}{2} x^2 + \frac{1}{2} = \frac{3x^2 + 1}{2} \rightarrow \int_0^x \frac{3x^2 + 1}{2} dx = \frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{2} x = F(x,y) \end{aligned}$$

- si $x \geq 1$, $0 \leq y < 1$

$$F(x,y) = \int_0^1 \left(\int_0^y \frac{3}{2} (x^2 + y^2) dy \right) dx$$

$$\int_0^y \frac{3}{2} (x^2 + y^2) dy = \frac{3}{2} x^2 y + \frac{1}{2} y^3$$

$$\int_0^1 \frac{3}{2} x^2 y + \frac{1}{2} y^3 dx = \left[\frac{1}{2} x^3 y + \frac{1}{2} x y^3 \right]_0^1 = \frac{1}{2} y + \frac{1}{2} y^3$$

- si $x \geq 1$, $y \geq 1$

$$F(x,y) = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{3}{2} (x^2 + y^2) dy \right) dx = 1.$$

luego la función de distribución conjunta es:

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \text{ o } y < 0 \\ \frac{xy^3 + x^3y}{2} & \text{si } 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1 \\ \frac{x+x^3}{2} & \text{si } 0 \leq x < 1, y \geq 1 \\ \frac{y+y^3}{2} & \text{si } x \geq 1, 0 \leq y < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1, y \geq 1 \end{cases}$$

c) Función de densidad marginal de x

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dy = \int_0^1 \frac{3}{2} (x^2 + y^2) dy \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$f_1(x) = \left[\frac{3}{2} \left(x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right) \right]_0^1 = \frac{3}{2} x^2 + \frac{1}{2} \quad 0 \leq x \leq 1$$

luego:

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} x^2 + \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

la función de densidad marginal de y es:

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx \quad \text{si } 0 \leq y \leq 1$$

$$f_2(y) = \int_0^1 \frac{3}{2} (x^2 + y^2) dx = \left[\frac{3}{2} \left(\frac{x^3}{3} + xy^2 \right) \right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} y^2$$

luego:

$$f_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{3}{2} y^2 & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Función de densidad condicionada $f(x/y=y)$

$$f(x/y=y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{\frac{3}{2} (x^2 + y^2)}{\frac{1}{2} (1 + 3y^2)} = \frac{3x^2 + 3y^2}{1 + 3y^2} \quad \begin{matrix} \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{matrix}$$

$$f(x/y=y) = \begin{cases} \frac{3x^2+3y^2}{1+3y^2} & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Función de densidad condicionada $f(y/x=x)$

$$f(y/x=x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{\frac{3}{2}(x^2+y^2)}{\frac{1}{2}(3x^2+1)} = \frac{3x^2+3y^2}{1+3x^2} \quad \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$$

$$\text{Luego } f(y/x=x) = \begin{cases} \frac{3x^2+3y^2}{1+3x^2} & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

$$d) P\left[X < \frac{1}{2}, Y > \frac{1}{2}\right] = \int_{-\infty}^{1/2} \left(\int_{1/2}^{+\infty} f(x,y) dy \right) dx$$

$$P\left[X < \frac{1}{2}, Y > \frac{1}{2}\right] = \int_0^{1/2} \left(\int_{1/2}^1 \frac{3}{2}(x^2+y^2) dy \right) dx$$

$$\int_{1/2}^1 \frac{3}{2}(x^2+y^2) dy = \frac{3}{2} \left[x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right]_{1/2}^1 = \frac{3}{2} \left[\left(x^2 + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}\right) \right]$$

$$\int_{1/2}^1 \frac{3}{2}(x^2+y^2) dy = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{24} \right) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{7}{16}$$

$$P\left[X < \frac{1}{2}, Y > \frac{1}{2}\right] = \int_0^{1/2} \left(\frac{3}{4}x^2 + \frac{7}{16} \right) dx = \left[\frac{1}{4}x^3 + \frac{7}{16}x \right]_0^{1/2} = \frac{1}{32} + \frac{7}{32} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Luego } P\left[X < \frac{1}{2}, Y > \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{4}$$

e) X e Y no son independientes ya que $f(x,y) \neq f_1(x) \cdot f_2(y)$

$$f_1(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x^2 = \frac{1}{2}(1+3x^2) \quad f_2(y) = \frac{1}{2}(1+3y^2)$$

$$f_1(x) \cdot f_2(y) = \frac{1}{4}(3x^2+3y^2+1+9x^2y^2) \neq \frac{3}{2}(x^2+y^2)$$

32.- Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional con función de densidad conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} k(x+y) & 0 \leq x \leq 2 \quad 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Obtenga:

a) el valor de k .

b) la función de distribución.

c) las funciones de densidad marginales de X y de Y .

d) las funciones de distribución marginales de X y de Y .

e) la función de densidad y la función de distribución de Y condicionada a $X=x$.

f) ¿Son X e Y independientes?

a) Al ser f función de densidad debe verificar que:

$$f(x, y) \geq 0 \Rightarrow k(x+y) \geq 0 \quad 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1 \Rightarrow k > 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \right) dx = 1 \Rightarrow \int_0^2 \left(\int_0^1 k(x+y) dy \right) dx = 1$$

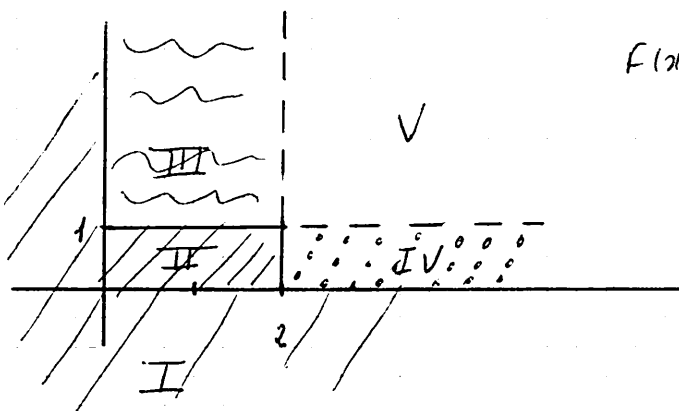
$$\Rightarrow k \int_0^2 \left(\int_0^1 (x+y) dy \right) dx = 1$$

$$\int_0^1 (x+y) dy = \left[xy + \frac{1}{2} y^2 \right]_0^1 = x + \frac{1}{2}$$

$$\int_0^2 \left(x + \frac{1}{2} \right) dx = \left[\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} x \right]_0^2 = 3$$

$$\text{Luego } 3k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{3}$$

b) Para hallar la función de distribución particionamos $\mathbb{R}^2$



$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \left(\int_{-\infty}^y f(x, y) dy \right) dx$$

• Si $x < 0$ o $y < 0 \Rightarrow F(x, y) = 0$ (región I)

• Si $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y < 1$ (región II)

$$F(x, y) = \int_0^x \left(\int_0^y \frac{1}{3} (x+y) dy \right) dx$$

$$\int_0^y \frac{1}{3} (x+y) dy = \frac{1}{3} (xy + \frac{1}{2} y^2) = \frac{1}{3} xy + \frac{1}{6} y^2$$

$$\int_0^x \left(\int_0^y \frac{1}{3} (x+y) dy \right) dx = \int_0^x \left(\frac{1}{3} xy + \frac{1}{6} y^2 \right) dx = \frac{1}{6} x^2 y + \frac{1}{6} y^2 x$$

$$F(x, y) = \frac{1}{6} xy (x+y)$$

• si $0 \leq x < 1$, $y \geq 1$ (region III)

$$F(x, y) = \int_0^x \left(\int_0^1 \frac{1}{3} (x+y) dy \right) dx$$

$$\int_0^1 \frac{1}{3} (x+y) dy = \frac{1}{3} \left(xy + \frac{1}{2} y^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} x + \frac{1}{6}$$

$$F(x, y) = \int_0^x \left(\frac{1}{3} x + \frac{1}{6} \right) dx = \frac{1}{6} x^2 + \frac{1}{6} x = \frac{1}{6} x (x+1)$$

• si $x \geq 2$, $0 \leq y \leq 1$

$$F(x, y) = \int_0^2 \left(\int_0^y \frac{1}{3} (x+y) dy \right) dx$$

$$\int_0^y \frac{1}{3} (x+y) dy = \frac{1}{3} xy + \frac{1}{6} y^2 \Rightarrow F(x, y) = \int_0^2 \left(\frac{1}{3} xy + \frac{1}{6} y^2 \right) dx =$$

$$\Rightarrow F(x, y) = \left[\frac{1}{6} x^2 y + \frac{1}{6} x y^2 \right]_0^2 = \frac{2}{3} y + \frac{1}{3} y^2 = \frac{1}{3} (2y + y^2)$$

• si $x \geq 2$, $y \geq 1 \Rightarrow F(x, y) = 1$.

Entonces la función de distribución es

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \text{ o } y < 0 \\ \frac{1}{6} xy (x+y) & \text{si } 0 \leq x < 2, 0 \leq y < 1 \\ \frac{1}{6} x (x+1) & \text{si } 0 \leq x < 2, y \geq 1 \\ \frac{1}{3} (2y + y^2) & \text{si } x \geq 2, 0 \leq y < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 2, y \geq 1 \end{cases}$$

c) función de densidad marginal de x

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dy = \int_0^1 \frac{1}{3} (x+y) dy = \left[\frac{1}{3} xy + \frac{1}{6} y^2 \right]_0^1$$

$$f_1(x) = \frac{1}{3} x + \frac{1}{6} \quad 0 \leq x \leq 2 \quad \text{Entonces:}$$

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} x + \frac{1}{6} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

función de densidad marginal de y

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx = \int_0^2 \frac{1}{3} (x+y) dx = \frac{1}{3} \left[\frac{x^2}{2} + xy \right]_0^2$$

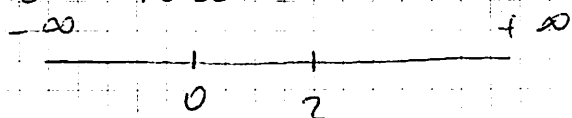
$$f_2(y) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} y \quad \text{si } 0 \leq y \leq 1$$

$$\text{luego } f_2(y) = \begin{cases} \frac{2}{3} + \frac{2}{3} y & \text{si } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

d) Función de distribución marginal de x

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^x f_1(x) dx$$

El campo de variación de x viene dado por la partición de la recta real:



- si $x < 0 \Rightarrow F_1(x) = 0$
- si $0 \leq x < 2 \Rightarrow F_1(x) = \int_0^x \frac{1}{3} x + \frac{1}{6} dx = \frac{1}{6} x^2 + \frac{1}{6} x = \frac{1}{6} x(x+1)$
- si $x \geq 2 \Rightarrow F_1(x) = \int_0^2 \frac{1}{3} x + \frac{1}{6} dx = 1$

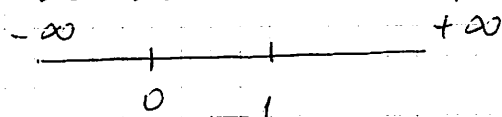
luego la función de distribución marginal de x es:

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{6} x(x+1) & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Función de distribución marginal de Y

$$F_2(y) = \int_{-\infty}^y f_2(y) dy$$

El campo de variación de Y viene dado por:



• Si $y < 0 \Rightarrow F_2(y) = 0$

• Si $0 \leq y < 1$

$$F_2(y) = \int_0^y \frac{2}{3} + \frac{2}{3} y dy = \frac{2}{3} \left(y + \frac{1}{2} y^2 \right) = \frac{2}{3} y + \frac{1}{3} y^2$$

• Si $y \geq 1 \Rightarrow F_2(y) = \int_0^1 \frac{2}{3} + \frac{2}{3} y dy = 1$

Luego la función de distribución marginal de Y es:

$$F_2(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ \frac{2}{3} y + \frac{1}{3} y^2 & \text{si } 0 \leq y < 1 \\ 1 & \text{si } y \geq 1 \end{cases}$$

c) Función de densidad de Y condicionada a $X=x$

$$f(y/x=x) = \frac{f(x+y)}{f_1(x)} = \frac{\frac{1}{3}(x+y)}{\frac{1}{3}(x+\frac{1}{2})} = \frac{x+y}{x+\frac{1}{2}} \quad \text{si } 0 \leq y \leq 1 \quad 0 \leq x \leq 2$$

$$\text{Luego } f(y/x=x) = \begin{cases} \frac{x+y}{x+\frac{1}{2}} & \text{si } 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Función de distribución de Y condicionada a $X=x$

$$F(y/x=x) = \int_{-\infty}^y f(y/x=x) dy = \int_0^y \frac{x+y}{x+\frac{1}{2}} dy \Rightarrow$$

$$F(y/x=x) = \frac{1}{x+\frac{1}{2}} \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) = \frac{2xy + y^2}{2x+1} \quad \text{luego:}$$

$$F(y/x=x) = \begin{cases} \frac{2xy + y^2}{2x+1} & \text{si } 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

f) X e Y no son independientes ya que

$$f(x,y) \neq f_1(x) \cdot f_2(y)$$

$$f_1(x) \cdot f_2(y) = \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}\right)\left(\frac{2}{3}y + \frac{2}{3}\right) \neq \frac{1}{3}(x+y)$$

33.- Sea $f(x,y)=x+y$ si $0 < x < 1$ y $0 < y < 1$ (0 en el resto) la función de densidad de (X,Y) .

a) Calcule las funciones de densidad marginales.

b) ¿Son X e Y independientes? Calcule las densidades condicionadas.

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{si } 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Función de densidad marginal de x

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy = \int_0^1 (x+y) dy = \left[xy + \frac{1}{2} y^2 \right]_0^1 = x + \frac{1}{2} \quad \text{si}$$

$$0 \leq x \leq 1$$

$$\text{luego } f_1(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Función de densidad marginal de Y

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx = \int_0^1 (x+y) dx = \frac{1}{2} + y \quad \text{si } 0 \leq y \leq 1$$

$$\text{luego } f_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} + y & \text{si } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Función de densidad de x condicionada a $Y=y$

$$f(x/Y=y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{x+y}{\frac{1}{2}+y} = \frac{2(x+y)}{1+2y} \quad \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$$

luego:

$$f(x/Y=y) = \begin{cases} \frac{2(x+y)}{1+2y} & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Función de densidad de Y condicionada a $X=x$

$$f(y/X=x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{x+y}{x+\frac{1}{2}} = \frac{2(x+y)}{1+2x} \quad \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$$

$$\text{Luego } f(y/x=x) = \begin{cases} \frac{2(x+y)}{1+2y} & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

X e Y no son independientes ya que $f(x,y) \neq f_1(x) \cdot f_2(y)$

$$x+y \neq (x+\frac{1}{2})(y+\frac{1}{2})$$

34.- Sea (X,Y) una variable aleatoria bidimensional con función de densidad $f(x,y)=(2x+y)/210$ si $2 < x < 6$ y $0 < y < 5$ (0 en el resto). Halle $P(X+Y > 4)$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x+y}{210} & \text{si } 2 < x < 6, \quad 0 < y < 5 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

$P[X+Y > 4] = P[Y > 4-x] = 1 - P[Y \leq 4-x]$. Tenemos dos posibilidades para resolver este problema:

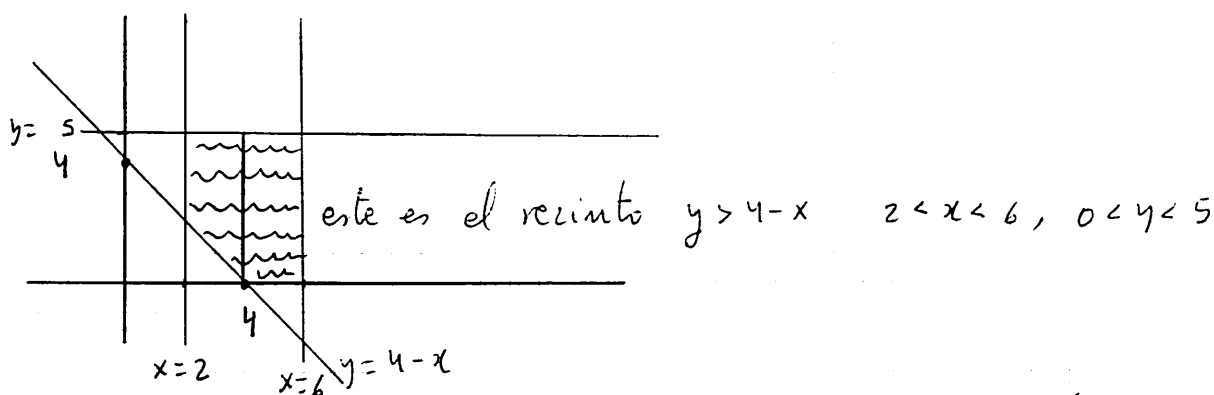
a) Calcular directamente $P[X+Y > 4] = P[Y > 4-x]$

b) Pasar al caso contrario mediante la expresión

$$P[X+Y > 4] = P[Y > 4-x] = 1 - P[Y \leq 4-x]$$

Vamos a proceder de las dos formas

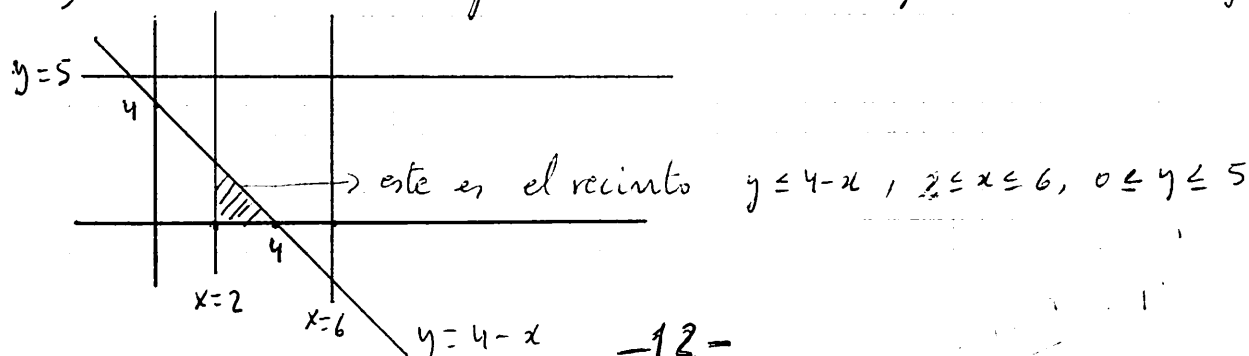
a) Dibujamos el recinto



$$P[X+Y > 4] = P[Y > 4-x] = \int_2^4 \left(\int_{4-x}^5 \frac{2x+y}{210} dy \right) dx + \int_4^6 \left(\int_0^5 \frac{2x+y}{210} dy \right) dx$$

los cálculos que hay que realizar para obtener la solución son muy pesados, no los vamos a hacer.

b) de nuevo dibujamos el recinto para hallar $P[Y \leq 4-x]$



Entonces:

$$P[x+y < 4] = 1 - P[y \leq 4-x]$$

$P[y \leq 4-x] = \int_2^4 \left(\int_0^{4-x} \frac{2x+y}{210} dy \right) dx$, los cálculos que hay que realizar son más fáciles que en el caso anterior

$$\begin{aligned} \int_0^{4-x} \frac{2x+y}{210} dy &= \frac{1}{210} \left[2xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^{4-x} = \frac{1}{210} \left(8x - 2x^2 + \frac{16 - 8x + x^2}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{210} \left(4x - \frac{7}{2} x^2 + 8 \right) = \frac{2}{105} x - \frac{7}{410} x^2 + \frac{4}{105} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_2^4 \left(\frac{2}{105} x - \frac{7}{410} x^2 + \frac{4}{105} \right) dx &= \left[\frac{1}{105} x^2 - \frac{7}{1230} x^3 + \frac{4}{105} x \right]_2^4 = \\ &= \frac{16}{105} - \frac{7 \cdot 64}{1230} + \frac{16}{105} - \frac{4}{105} + \frac{56}{1230} - \frac{8}{105} = \frac{20}{105} - \frac{392}{1230} = -\frac{184}{1435} \end{aligned}$$

Hemos obtenido que $P[y \leq 4-x] = -\frac{184}{1435}$ ¡esto no es posible!, ¿qué pasa? No me he equivocado en los cálculos, los he repasado varias veces. La función $f(x,y)$ que nos proponen no es función de densidad, si lo fuera debería cumplir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy dx \Rightarrow \int_2^6 \left(\int_0^5 \frac{2x+y}{210} dy \right) dx = 1$$

esto no se verifica

$$\int_0^5 \frac{2x+y}{210} dy = \frac{1}{210} \left[2xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^5 = \frac{1}{210} \left[10x + \frac{25}{2} \right] = \frac{1}{21} x + \frac{5}{84}$$

$$\int_2^6 \left(\frac{1}{21} x + \frac{5}{84} \right) dx = \left[\frac{1}{42} x^2 + \frac{5}{84} x \right]_2^6 = \frac{36}{42} + \frac{30}{84} - \frac{4}{42} - \frac{10}{84} =$$

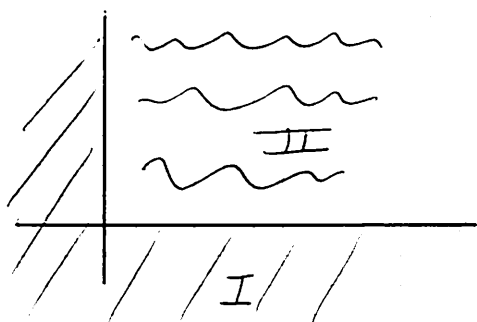
$$= \frac{32}{42} - \frac{20}{84} = \frac{64}{84} - \frac{20}{84} = \frac{44}{84} \neq 1.$$

35.- La función de densidad conjunta de (X,Y) es $f(x,y)=e^{-(x+y)}$ si $x>0$ e $y>0$ (0 en el resto). Halle:

- Función de distribución.
- $P(X \leq 3, Y \leq 4)$.
- Densidades marginales de X e Y .
- Densidades condicionadas.
- ¿Son X e Y independientes?
- Si X e Y representan las ventas en miles obtenidas por un comercio con dos tipos de artículos A y B , ¿cuál es la probabilidad de que las ventas totales superen las 10.000 u.m.?

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & \text{si } x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Vamos a ver como es la partición de $\mathbb{R}^2$



• Si $x < 0$ o $y < 0$ $f(x,y) = 0$

• Si $x \geq 0, y \geq 0$

$$F(x,y) = \int_0^x \left(\int_0^y e^{-(x+y)} dy \right) dx$$

$$\int e^{-(x+y)} dy \begin{cases} t = -x+y \\ dy = -dt \end{cases} = - \int e^t dt = -e^{-(x+y)}$$

$$\int_0^y e^{-(x+y)} dy = -e^{-(x+y)} \Big|_0^y = e^{-x} - e^{-(x+y)}$$

$$F(x,y) = \int_0^x (e^{-x} - e^{-(x+y)}) dx = \int_0^x e^{-x} dx - \int_0^x e^{-(x+y)} dx = \left[-e^{-x} + e^{-(x+y)} \right]_0^x$$

$= e^{-(x+y)} - e^{-x} + 1 - e^{-y}$. Luego la función de distribución es:

$$F(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} - e^{-x} + 1 - e^{-y} & \text{si } x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

$$b) P[X \leq 3, Y \leq 4] = F(3, 4) = e^{-7} - e^{-3} - e^{-4} + 1$$

$$P[X \leq 3, Y \leq 4] = \frac{1}{e^7} - \frac{1}{e^3} - \frac{1}{e^4} + 1 = \frac{1 - e^4 - e^3 + e^7}{e^7}$$

c) Función de densidad marginal de X

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_0^{+\infty} e^{-(x+y)} dy = \left[-e^{-(x+y)} \right]_0^{+\infty} = 0 + e^{-x}$$

$x \geq 0$.

luego

$$f_1(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Función de densidad marginal de Y

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \int_0^{+\infty} e^{-(x+y)} dx = \left[-e^{-(x+y)} \right]_0^{+\infty} = e^{-y} \text{ si } y \geq 0$$

luego

$$f_2(y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{si } y \geq 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

d) Función de densidad de x condicionada a $Y=y$

$$f(x/Y=y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} = \frac{e^{-(x+y)}}{e^{-y}} \text{ si } x \geq 0, y \geq 0$$

$$f(x/Y=y) = \frac{e^{-x} \cdot e^{-y}}{e^{-y}} = e^{-x} \text{ si } x \geq 0, y \geq 0$$

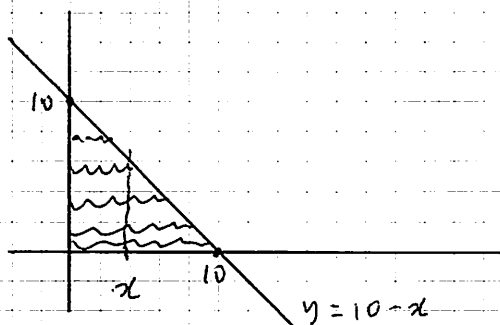
Función de densidad de y condicionada a $X=x$

$$f(y/X=x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} = \frac{e^{-(x+y)}}{e^{-x}} = e^{-y} \text{ si } x \geq 0, y \geq 0$$

e) X e Y son independientes ya que

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y) \text{ o tambien porque } f(x/Y=y) = f_1(x), \\ f(Y/X=x) = f_2(y)$$

f) Nos piden $P[x+y > 10] = 1 - P[x+y < 10] = 1 - P[y < 10-x]$



$$P[y \leq 10-x] = \int_0^x \left(\int_0^{10-x} e^{-(x+y)} dy \right) dx =$$

$$\int_0^{10-x} e^{-(x+y)} dy = \left[-e^{-(x+y)} \right]_0^{10-x} = e^{-x} + e^{-10}$$

$$\int e^{-x} + e^{-10} dx = -e^{-x} + e^{-10} \cdot x$$

$$\int_0^x e^{-x} + e^{-10} dx = \left[-e^{-x} + e^{-10} x \right]_0^x = 1 - e^{-x} + x e^{-10}$$

luego:

$$P[y \leq 10-x] = 1 - e^{-x} + x e^{-10}$$

36.- La función de densidad de (X,Y) es:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{96} & \text{si } 0 < x < 4, \quad 1 < y < 5 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

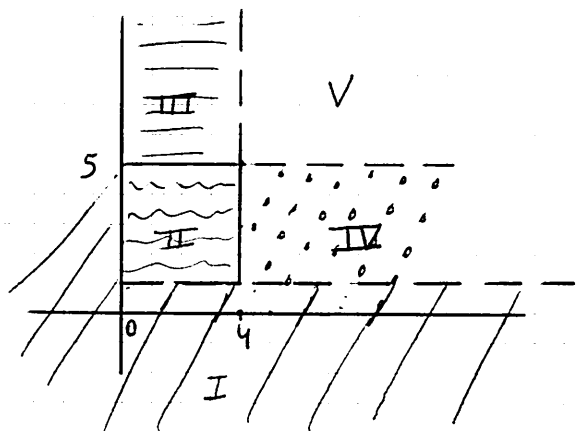
Calcule:

a) $P(1 < X < 2, 2 < Y < 3)$

b) $P(X > 3, Y < 2)$

c) $F(2,3)$

En este caso la mejor estrategia es calcular la función de distribución conjunta $F(x,y)$. Para ello necesitamos la partición de $\mathbb{R}^2$.



$$F(x,y) = \int_{-\infty}^x \left(\int_{-\infty}^y f(x,y) dy \right) dx$$

• Si $x < 0$ ó $y < 0$ $F(x,y) = 0$ (región I)

• Si $0 \leq x < 4$, $1 \leq y < 5$ (región II)

$$F(x,y) = \int_0^x \left(\int_1^y \frac{xy}{96} dy \right) dx$$

$$\int \frac{xy}{96} dy = \frac{xy^2}{192} \Rightarrow \int_1^y \frac{xy}{96} dy = \frac{xy^2}{192} \Big|_1^y = \frac{xy^2}{192} - \frac{x}{192}$$

$$\int_0^x \left(\frac{xy^2}{192} - \frac{x}{192} \right) dx = \frac{x^2 y^2}{384} - \frac{x^2}{384} \Big|_0^x = \frac{x^2(y^2 - 1)}{384}$$

$$F(x,y) = \frac{x^2(y^2 - 1)}{384}$$

• Si $0 \leq x < 4$, $y \geq 5$ (región III)

$$F(x,y) = \int_0^x \left(\int_1^5 \frac{xy}{96} dy \right) dx$$

$$\int_1^5 \frac{xy}{96} dy = \left[\frac{xy^2}{192} \right]_1^5 = \frac{25x}{192} - \frac{x}{192} = \frac{24x}{192}$$

$$\int_0^x \frac{24x}{192} dx = \left[\frac{12x^2}{192} \right]_0^x = \frac{1}{16} x^2; F(x, y) = \frac{1}{16} x^2$$

• Si $x \geq 4, 1 \leq y < 5$ (región IV)

$$F(x, y) = \int_0^4 \left(\int_1^y \frac{xy}{96} dy \right) dx = \int_0^4 \frac{x(y^2 - 1)}{192} dx = \frac{x^2(y^2 - 1)}{384} \Big|_0^4$$

$$F(x, y) = \frac{y^2 - 1}{24}$$

• Si $x \geq 4, y \geq 5$ (región V) $F(x, y) = 1$.

Entonces la función de distribución conjunta es:

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \text{ o } y < 0 \\ \frac{x^2(y^2 - 1)}{384} & \text{si } 0 \leq x < 4, 1 \leq y < 5 \\ \frac{x^2}{16} & \text{si } 0 \leq x < 4, y \geq 5 \\ \frac{y^2 - 1}{24} & \text{si } x \geq 4, 1 \leq y < 5 \\ 1 & \text{si } x \geq 4, y \geq 5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a) P[1 < X < 2, 2 < Y < 3] &= P[1 < X \leq 2, 2 < Y \leq 3] = F(2, 3) + F(1, 2) - F(1, 3) - F(2, 2) = \\ &= \frac{4(9-1)}{384} + \frac{1(4-1)}{384} - \frac{1(9-1)}{384} - \frac{4(4-1)}{384} = \frac{32+3-8-12}{384} = \frac{15}{384} \end{aligned}$$

$$P[1 < X < 2, 2 < Y < 3] = \frac{5}{128}$$

$$b) P[X > 3, Y < 2] = \int_3^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^2 f(x, y) dy \right) dx = \int_3^4 \left(\int_1^2 \frac{xy}{96} dy \right) dx =$$

$$\int \frac{xy}{96} dy = \frac{xy^2}{192} \Rightarrow \int_1^2 \frac{xy}{96} dy = \left[\frac{xy^2}{192} \right]_1^2 = \frac{4x}{192} - \frac{x}{192} = \frac{3x}{192} = \frac{x}{64}$$

$$\int_3^4 \frac{x}{64} dx = \left[\frac{x^2}{128} \right]_3^4 = \frac{16}{128} - \frac{9}{128} = \frac{7}{128} \text{ Luego } P[X > 3, Y < 2] = \frac{7}{128}$$

$$c) F(2, 3) = \frac{4(9-1)}{384} = \frac{32}{384} = \frac{1}{12}$$

37.- Sea (X,Y) una v.a. bidimensional de tipo discreto con función de probabilidad conjunta dada por la tabla siguiente, y sean U y V dos v.a.a. definidas como $U=|X|$ y $V=Y^2$.

XY	-2	1	2
-1	$1/6$	$1/6$	$1/12$
0	$1/12$	$1/12$	0
1	$1/6$	$1/6$	$1/12$

Obtenga la función de probabilidad de (U,V) y las funciones de probabilidad marginales de U y de V .

El campo de variación de U (rango de U) es $R_U = 0, 1$

El campo de variación de V (rango de V) es $R_V = 1, 4$

La función de probabilidad conjunta de u, v es:

$u \backslash v$	1	4
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

$$P[U=0, V=1] = P[X=0, Y=1] = \frac{1}{12}$$

$$P[U=0, V=4] = P[X=0, Y=-2] + P[X=0, Y=2] = \frac{1}{12} + 0 = \frac{1}{12}$$

$$P[U=1, V=1] = P[X=-1, Y=1] + P[X=1, Y=1] = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P[U=1, V=4] = P[X=-1, Y=-2] + P[X=-1, Y=2] + P[X=1, Y=-2] + P[X=1, Y=2] = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Función de probabilidad marginal de u :

$$P[U=0] = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$P[U=1] = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

u	$P(u)$
0	$1/6$
1	$5/6$

Función de probabilidad marginal de v

$$P(V=1) = \frac{1}{12} + \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$$

$$P(V=4) = \frac{1}{12} + \frac{1}{2} = \frac{7}{12}$$

v	$P(v)$
1	$5/12$
4	$7/12$

38.- Se sabe que $P(X=x, Y=y) = x(y+1)/18$ $x=1,2$ $y=0,1,2$

a) Obtenga la distribución de $X+Y$.

b) ¿Son X e Y independientes?

a) El campo de variación de $x+y$ es : 1, 2, 3, 4.

$$P[X+Y = 1] = P[X=1, Y=0] = \frac{1}{18}$$

$$P[X+Y = 2] = P[X=1, Y=1] + P[X=2, Y=0] = \frac{2}{18} + \frac{2}{18} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$$

$$P[X+Y = 3] = P[X=1, Y=2] + P[X=2, Y=1] = \frac{3}{18} + \frac{4}{18} = \frac{7}{18}$$

$$P[X+Y = 4] = P[X=2, Y=2] = \frac{6}{18}$$

La función de probabilidad de $x+y$ es:

$x+y$	$P[X+Y = x+y]$
1	1/18
2	4/18
3	7/18
4	6/18

b) Vamos a tabular la función $P(X=x, Y=y) = \frac{x(y+1)}{18}$
 $x=1,2$; $y=0,1,2$

$X \backslash Y$	0	1	2	
1	1/18	2/18	3/18	$6/18 = \frac{1}{3}$
2	2/18	4/18	6/18	
	1/6	1/3	1/2	

Si X e Y fueran independientes $P_{ij} = P_{i \cdot} \cdot P_{\cdot j}$ $\forall i, j$ y esto se verifica siempre.
 Luego X e Y son independientes.