

RELACION DE EJERCICIOS - TEMA 2

1º $\Omega = \{ (C, C), (C, X), (X, C), (X, X) \}$

X : n.º de caras en el experimento

$X(C, C) = 2$; $X(C, X) = X(X, C) = 1$; $X(X, X) = 0$

Entonces los valores que puede tomar la variable estadística son 0, 1, 2. La función de probabilidad es $f(x) = P(X=x)$ y tiene la siguiente tabla:

X	$P(X)$
0	1/4
1	1/2
2	1/4

La función de distribución es $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_j \leq x} P(X=x_j)$
 La tabla de la función de distribución es:

x	$F(x)$
0	1/4
1	3/4
2	1

2º Ω tiene 10 elementos $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 10$

$\Omega = \{ (1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5), (2, 3, 4), (2, 3, 5), (3, 4, 5), (1, 3, 5), (1, 4, 5), (2, 4, 5), (1, 3, 4) \}$

X : suma de los números elegidos

$(1, 2, 3) \xrightarrow{X} 6$

$(1, 2, 4) \xrightarrow{X} 7$

$(1, 2, 5), (1, 3, 4) \xrightarrow{X} 8$

$(2, 3, 4), (1, 3, 5) \xrightarrow{X} 9$

$(2, 3, 5), (1, 4, 5) \xrightarrow{X} 10$

$(2, 4, 5) \xrightarrow{X} 11$

$(3, 4, 5) \xrightarrow{X} 12$

Los valores que puede tomar la variable aleatoria x son: 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

x	$P(x)$
6	$1/10$
7	$1/10$
8	$2/10$
9	$2/10$
10	$2/10$
11	$1/10$
12	$1/10$

$f(x) = P(X=x) = P(x)$ función de probabilidad

La función de distribución es $F(x) = P[X \leq x]$

x	$F(x)$
6	$1/10$
7	$2/10$
8	$4/10$
9	$6/10$
10	$8/10$
11	$9/10$
12	$10/10 = 1$

$$F(x) = \sum_{x_j \leq x} P[X=x_j]$$

3º Si $P(X=x_i)$ es función de probabilidad, debe verificarse que:

$$\sum_i P(X=x_i) = 1 \Rightarrow k + 0'3 + 0'2 + 0'1 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{k = 0'4}$$

$$a) P[X > 3] = 1 - P[X \leq 3] = 1 - P(X=2) = 1 - 0'4 = 0'6$$

$$b) P[X < 5] = P[X=2] + P[X=4] = 0'4 + 0'3 = 0'7$$

$$c) P[3 \leq X \leq 5] = P[X=4] + P[X=5] = 0'3 + 0'2 = 0'5$$

$$4^{\circ} \quad P[X=a] = \frac{k(a-1)}{n} \quad n \quad a=2 \dots n.$$

$\sum_{a=2}^n P[X=a] = 1$, debe verificarse esto al ser función de probabilidad, es decir:

$$P[X=2] + P[X=3] + \dots + P[X=n] = 1$$

$$\frac{k}{n} + \frac{2k}{n} + \frac{3k}{n} + \dots + \frac{k(n-1)}{n} = 1$$

Progresión aritmética de diferencia $\frac{k}{n}$ y con $(n-1)$ términos

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}, \text{ en este caso:}$$

$$1 = \frac{\left[\frac{k}{n} + \frac{k(n-1)}{n} \right] \cdot (n-1)}{2} \Rightarrow 2 = \frac{k + kn - k}{n} (n-1)$$

$$2 = k(n-1) \Rightarrow \boxed{k = \frac{2}{n-1}}$$

$$\text{Si } n=10 \Rightarrow k = \frac{2}{9}$$

$$\begin{aligned} P[X < 6] &= 1 - P[X \geq 6] = 1 - P[X=6] - P[X=7] - P[X=8] - \\ &- P[X=9] - P[X=10] = 1 - \frac{5 \cdot \frac{2}{9}}{10} - \frac{6 \cdot \frac{2}{9}}{10} - \frac{7 \cdot \frac{2}{9}}{10} - \\ &- \frac{8 \cdot \frac{2}{9}}{10} - \frac{9 \cdot \frac{2}{9}}{10} = 1 - \frac{35 \cdot \frac{2}{9}}{10} = 1 - \frac{70}{90} = \frac{2}{9} \end{aligned}$$

$$\boxed{P[X < 6] = \frac{2}{9}}$$

5.º Para que $P(X=k) = C \cdot (1-t)^{k-1} \quad k=1, 2, \dots$ sea función de probabilidad es necesario y suficiente que:

$$0 \leq C \cdot (1-t)^{k-1} < 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} C \cdot (1-t)^{k-1} = 1$$

$$k=1$$

$$\text{Si: } \sum_{k=1}^{\infty} c \cdot (1-t)^{k-1} = 1 \Rightarrow c \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (1-t)^{k-1} = 1. \text{ Como}$$

$\sum_{k=1}^{\infty} (1-t)^{k-1}$ es una progresión geométrica de razón $1-t$ para que se puedan sumar los infinitos términos de la progresión ha de ser $|1-t| < 1$ con lo que:

$$|1-t| < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-t < 1 \Rightarrow t > 0 \\ 0 \\ -1+t < 1 \Rightarrow t < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{0 < t < 2}$$

En este caso $0 < t < 2$ la suma de los infinitos términos vale $\frac{a_1}{1-r}$, es decir:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-t)^{k-1} = \frac{1}{1-(1-t)} = \frac{1}{t} \Rightarrow c \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (1-t)^{k-1} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{c}{t} = 1 \Rightarrow c = t.$$

Luego la condición necesaria y suficiente para que $P(X=K) = c \cdot (1-t)^{K-1}$ sea función de probabilidad es que $c=t$, $0 < t < 2$. Luego:

$P(X=K) = c \cdot (1-c)^{K-1}$ $0 < c < 2$, si queremos hallar la probabilidad de obtener par (para $K=2n$):

$$P(X=2n) = c \cdot (1-c)^{2n-1}$$

$$\text{6.º } P(X=K) = \lambda^K \cdot \frac{e^{-\lambda}}{K!} \quad K=0, 1, 2, \dots \text{ Para que sea}$$

función de probabilidad se debe verificar que

$$0 \leq P(X=K) \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq \lambda^K \cdot \frac{e^{-\lambda}}{K!} < 1$$

$$\bullet \sum_{K=0}^{\infty} \lambda^K \cdot \frac{e^{-\lambda}}{K!} = 1.$$

Fijemos en la expresión

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \cdot \frac{e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1, \text{ esto}$$

siempre se verifica. Para que se cumpla la primera condición $0 \leq \lambda^k \cdot \frac{e^{-\lambda}}{k!} < 1$ ha de ser $\lambda > 0$

(la desigualdad es bastante complicada, no se me ocurre otra cosa)

Si $\lambda = 5$ la función de probabilidad es:

$$P(X=k) = 5^k \cdot \frac{e^{-5}}{k!} \text{ y por tanto:}$$

$$P(X < 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 5^0 \cdot \frac{e^{-5}}{0!} + 5 \cdot \frac{e^{-5}}{1!} + 5^2 \cdot \frac{e^{-5}}{2!} = e^{-5} \left(1 + 5 + \frac{25}{2} \right) = \frac{37}{2} e^{-5}$$

$$\text{ luego } P(X < 3) = \frac{37}{2} \cdot e^{-5} \approx 0.124652019$$

$$f(x) = \begin{cases} k_1(x+1) & \text{si } x \in [0, 4] \\ k_2 \cdot x^2 & \text{si } x \in (4, 6] \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

$$P[X \in [0, 4]] = \frac{2}{3}$$

Para que f sea función de densidad han de verificarse dos condiciones:

$$\bullet f(x) \geq 0 \quad \forall x \Rightarrow k_1 \geq 0, k_2 \geq 0$$

$$\bullet \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \Rightarrow \int_0^4 k_1(x+1) dx + \int_4^6 k_2 x^2 dx = 1$$

$$\Rightarrow k_1 \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_0^4 + k_2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_4^6 = 1 \Rightarrow 12k_1 + \frac{152}{3} k_2 = 1$$

$$\Rightarrow k_2 = \frac{(1 - 12k_1) \cdot 3}{152}$$

Como

$$P[X \in [0, 4]] = P(0 \leq x \leq 4) = \int_0^4 k_1 (x+2) dx = \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_1 \left(\frac{x^2}{2} + x \right)_0^4 = \frac{2}{3} \Rightarrow 12k_1 = \frac{2}{3} \Rightarrow \underline{k_1 = \frac{1}{18}} \Rightarrow$$

$$k_2 = \frac{(1 - \frac{2}{3}) \cdot 3}{152} \Rightarrow \underline{k_2 = \frac{1}{152}}$$

$$P[X < 3] = \int_{-\infty}^3 f(x) dx = \int_0^3 k_1 (x+2) dx = \frac{1}{18} \int_0^3 (x+2) dx$$

$$= \frac{1}{18} \cdot \left(\frac{x^2}{2} + x \right)_0^3 = \frac{1}{18} \left(\frac{9}{2} + 3 \right) = \frac{1}{18} \cdot \frac{15}{2} = \frac{5}{12}$$

Al tratarse de una variable continua la adición o sustracción de un punto da lo mismo, es decir:

$$F(3) = P[X \leq 3] = P[X < 3] = \frac{5}{12}$$

8º

$$f(x) = \begin{cases} \frac{7+x}{k} & -7 \leq x \leq 0 \\ \frac{7-x}{k} & 0 < x < 7 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Para que f sea función de densidad

$$f(x) \geq 0 \Rightarrow k > 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \Rightarrow \int_{-7}^0 \frac{7+x}{k} + \int_0^7 \frac{7-x}{k} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k} \left[\int_{-7}^0 (7+x) dx + \int_0^7 (7-x) dx \right] = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{k} \left[7x + \frac{x^2}{2} \Big|_{-7}^0 + 7x - \frac{x^2}{2} \Big|_0^7 \right] = 1 \Rightarrow \frac{1}{k} \left[49 - \frac{49}{2} + 49 - \frac{49}{2} \right] = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{49}{k} = 1 \Rightarrow \underline{k = 49}$$

$$P[X > 0] = 1 - P[X \leq 0]$$

$$P[X \leq 0] = \int_{-\infty}^0 f(x) dx = \int_{-7}^0 \frac{7+x}{49} dx = \frac{1}{49} \int_{-7}^0 7+x dx$$

$$= \frac{1}{49} \left[7x + \frac{x^2}{2} \right]_{-7}^0 = \frac{1}{49} \left(49 - \frac{49}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

$$g^o: f(x) = \begin{cases} a e^{-bx} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Para que $f(x)$ sea función de densidad ha de verificarse:

$$\bullet f(x) \geq 0 \Rightarrow a \geq 0$$

$$\bullet \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \Rightarrow \int_0^{\infty} a \cdot e^{-bx} = 1 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t a e^{-bx} = 1$$

$$\int a e^{-bx} dx = a \cdot \int e^{-bx} dx \left\{ \begin{array}{l} t = -bx \\ dt = -b dx \\ dx = -\frac{1}{b} dt \end{array} \right\} = a \cdot \int e^t \left(-\frac{1}{b} dt \right)$$

$$= -\frac{a}{b} \int e^t dt = -\frac{a}{b} e^t = -\frac{a}{b} e^{-bx}$$

$$\int_0^t a \cdot e^{-bx} dx = \left[-\frac{a}{b} e^{-bx} \right]_0^t = -\frac{a}{b} e^{-bt} + \frac{a}{b} =$$

$$= \frac{a}{b} \left(1 - \frac{1}{e^{bt}} \right). \text{ Por tanto:}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a}{b} \left(1 - \frac{1}{e^{bt}} \right) = \frac{a}{b} = 1 \Rightarrow a = b$$

Para ser función de densidad se ha de verificar que $a = b$ y la función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot e^{-ax} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Para $a=3$ la función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} 3e^{-3x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

La función de distribución es $F(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^x f(x) dx \Rightarrow$
Entonces:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \int_0^x f(t) dt & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\int f(t) dt = \int 3e^{-3t} dt = 3 \int e^{-3t} dt \quad \left\{ \begin{array}{l} r = -3t \\ dr = -3 dt \\ dt = -\frac{1}{3} dr \end{array} \right. =$$

$$= 3 \int e^r \cdot -\frac{1}{3} dr = - \int e^r dr = -e^{-r} = -e^{-3t}$$

$$\int_0^x f(t) dt = \left[-e^{-3t} \right]_0^x = -e^{-3x} + 1 = 1 - \frac{1}{e^{3x}}$$

Luego la función de distribución es

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{e^{3x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$P(1 < x < 2) = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 3e^{-3x} dx = \left[-e^{-3x} \right]_1^2$$

$$P(1 < x < 2) = \left[-\frac{1}{e^{3x}} \right]_1^2 = \frac{1}{e^3} - \frac{1}{e^6}$$

$$P(x > 3) = 1 - P(x < 3) = 1 - \int_0^3 f(x) dx = 1 - \int_0^3 3e^{-3x} dx =$$

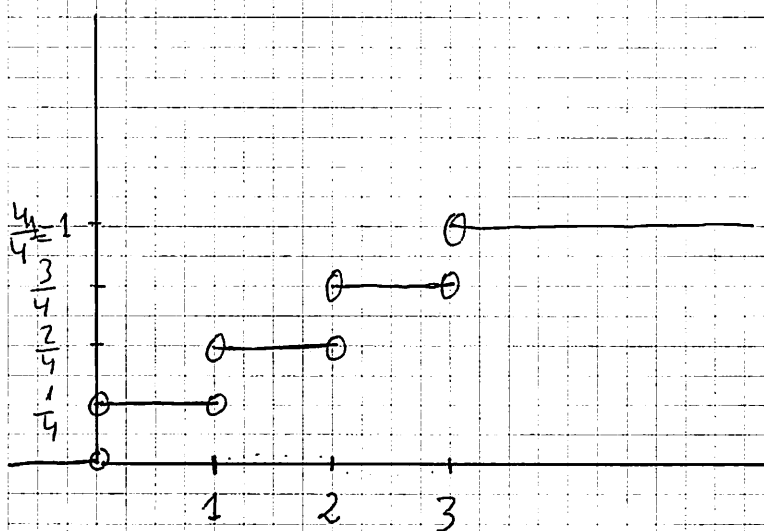
$$= 1 - \left[-e^{-3x} \right]_0^3 = 1 - \left[-\frac{1}{e^{3x}} \right]_0^3 = 1 - \left(1 - \frac{1}{e^9} \right) = \frac{1}{e^9}$$

$$P(X < 1) = \int_{-\infty}^1 f(x) dx = \int_0^1 3e^{-3x} dx = [-e^{-3x}]_0^1 =$$

$$= 1 - \frac{1}{e^3}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{4} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{2}{4} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{3}{4} & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } 3 \leq x \end{cases}$$

En primer lugar observamos la gráfica de $F(x)$



Los puntos donde se aprecia un salto son 0, 1, 2, 3, se trata de una variable discreta. A partir de aquí se calcula la función de probabilidad mediante la expresión

$$P(X = x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$$

$$P(X = 0) = F(0) - 0 = \frac{1}{4}$$

$$P(X = 1) = F(1) - F(0) = \frac{2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$P(X = 2) = F(2) - F(1) = \frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$$

$$P(X=3) = F(3) - F(2) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

b) $P(X = \frac{1}{2}) = F(\frac{1}{2}) - F(0) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$ (de todas formas al tratarse de una variable discreta $P(X = \frac{1}{2}) = 0$)

$$P(1.5 < X < 3) = P(X=2) = \frac{1}{4}$$

11º

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{25} & \text{si } 0 < x < 5 \\ \frac{10-x}{25} & 5 < x \leq 10 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

la función de distribución es $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$

y tenemos que distinguir el intervalo en donde se encuentra x :

* si $x < 0 \Rightarrow f(t) = 0 \Rightarrow F(x) = 0$

* si $0 < x < 5$ $F(x) = \int_0^x \frac{t}{25} dt = \left[\frac{t^2}{50} \right]_0^x = \frac{x^2}{50}$

* si $5 \leq x \leq 10$ $F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^5 f(t) dt + \int_5^x f(t) dt =$

$$F(x) = \int_0^5 \frac{t}{25} dt + \int_5^x \frac{10-t}{25} dt = \left[\frac{t^2}{50} \right]_0^5 + \left[\frac{10}{25}t - \frac{t^2}{50} \right]_5^x$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{5}x - \frac{1}{50}x^2 - \left(\frac{50}{25} - \frac{25}{50} \right) = -\frac{1}{50}x^2 + \frac{2}{5}x - 1$$

* si $x > 10$ $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_0^5 \frac{t}{25} dt + \int_5^{10} \frac{10-t}{25} dt =$

$$= \left[\frac{t^2}{50} \right]_0^5 + \left[\frac{10}{25}t - \frac{t^2}{50} \right]_5^{10} = \frac{1}{2} + \cancel{4} - \cancel{2} - \cancel{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Entonces la función de distribución es como sigue:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2}{50} & \text{si } 0 \leq x < 5 \\ -\frac{x^2}{50} + \frac{2}{5}x - 1 & \text{si } 5 \leq x < 10 \\ 1 & \text{si } x \geq 10 \end{cases}$$

$$P(X \geq 5000) = 1 - P(X < 5) = 1 - F(5)$$

$$F(5) = -\frac{5^2}{50} + \frac{2}{5} \cdot 5 - 1 = -\frac{1}{2} + 2 - 1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Luego } P(X \geq 5) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P(5 < X < 7500) = F(7'5) - F(5) = 0'875 - 0'5 = 0'375$$

$$F(7'5) = -\frac{7'5^2}{50} + \frac{2}{5} \cdot 7'5 - 1 = 0'875$$

12)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{si } 4 \leq x \leq 9 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases} \quad x \text{ en miles de unidades.}$$

Sea X = demanda del producto. Entonces

$$P(X \leq x) \geq \frac{1}{2} \Rightarrow F(x) \geq \frac{1}{2}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_4^x f(t) dt \quad \text{siendo } x \leq 9$$

$$F(x) = \int_4^x \frac{1}{5} dt = \frac{1}{5} [t]_4^x = \frac{1}{5} (x-4) = \frac{x-4}{5}$$

$$\frac{x-4}{5} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow x \geq 4 + \frac{5}{2} = \frac{13}{2} \Rightarrow \boxed{x \geq \frac{13}{2}}$$

Debe tener dispuesto una cantidad de $\frac{13000}{2} = 6.500$ unidades a la venta como mínimo.

13º

x_i	5	6	7	8	9
$P[X=x_i]$	0'2	0'2	0'2	0'2	0'2

$$P[X \geq x] = 0'5 \Rightarrow \sum_{x_j \leq x} P(x_j) \geq 0'5; 4 \leq x \leq 9$$

Entonces: Ha de ser $x \geq 7$ para que se verifique $P[X \geq x] \geq 0'5$. Luego tiene que tener a la venta, como mínimo, 7.000 unidades

14º

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\left(\frac{x}{50}\right)^2} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-\left(\frac{x}{50}\right)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

si $f(x)$ es la función de densidad

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \Rightarrow F'(x) = f(x)$$

$$a) \text{ si } x \leq 0 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} e^{-\left(\frac{x}{50}\right)^2} \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{2} e^{-\left(\frac{x}{50}\right)^2} \cdot (-2) \cdot \frac{x}{50} \cdot \frac{1}{50}$$

$$\text{es decir } F'(x) = -\frac{x}{2500} e^{-\left(\frac{x}{50}\right)^2} = f(x)$$

$$b) \text{ si } x > 0 \Rightarrow F(x) = 1 - \frac{1}{2} e^{-\left(\frac{x}{50}\right)^2} \Rightarrow F'(x) = \frac{x}{2500} e^{-\left(\frac{x}{50}\right)^2} = f(x)$$

Luego la función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2500} e^{-\left(\frac{x}{50}\right)^2} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x}{2500} e^{-\left(\frac{x}{50}\right)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\bullet P[X > 50] = 1 - P[X \leq 50] = 1 - F(50) = 1 - [1 - e^{-1}]$$

$$P(X > 50) = \frac{1}{e}$$

$$\bullet P[X < -50] = F(-50) = \frac{1}{2e}$$

15°

$$P(X=x) = \begin{cases} Kx & \text{si } x=1, 2, \dots, 50 \\ K(100-x) & \text{si } x=51, 52, \dots, 100 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) se ha de verificar que

$$0 \leq P(X=x) \leq 1 \Rightarrow K \geq 0$$

$$\sum_{x=1}^{\infty} P(X=x) = 1 \Rightarrow \sum_{x=1}^{50} Kx + \sum_{x=51}^{100} K(100-x) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K \cdot \sum_{x=1}^{50} x + K \left[\sum_{x=51}^{100} 100 - \sum_{x=51}^{100} x \right] = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K(1+2+3+\dots+50) + K[100 \cdot 50 - (51+52+\dots+100)] = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K \cdot \frac{(1+50) \cdot 50}{2} + K \left[5000 - \frac{(51+100) \cdot 50}{2} \right] = 1 \Rightarrow$$

$$1275K + 5000K - 3775K = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{2500}$$

$$b) P(X > 50) = 1 - P(X \leq 50) = 1 - \sum_{x=1}^{50} P(X=x) =$$

$$= 1 - \sum_{x=1}^{50} Kx = 1 - K \cdot \sum_{x=1}^{50} x = 1 - K \cdot \frac{(1+50) \cdot 50}{2}$$

$$P(X > 50) = 1 - K \cdot 1275 = 1 - \frac{1275}{2500} = \frac{1225}{2500} = \frac{49}{50}$$

$$P(X < 50) = 1 - P(X \geq 50) = 1 - P(X > 50) - P(X = 50) =$$

$$= 1 - \frac{49}{50} - \frac{50}{2500} = 1 - \frac{49}{50} - \frac{1}{50} = 0$$

$$P(X=50) = K \cdot 50 = \frac{50}{2500} = \frac{1}{50}$$

$$P(25 \leq X \leq 75) = \sum_{x=25}^{50} Kx + \sum_{x=51}^{75} K(100-x)$$

$$\frac{1}{2500} \cdot (25+26+\dots+50) + \frac{1}{2500} \cdot \left[100 \cdot 25 - \frac{1}{2500} \cdot (51+52+\dots+75) \right]$$

$$P(25 \leq x \leq 75) = \frac{1}{2500} \cdot \frac{(25+50) \cdot 25}{2} + 1 - \frac{1}{2500^2} \cdot \frac{(51+75) \cdot 25}{2}$$

$$P(25 \leq x \leq 75) = \frac{1875}{5000} + 1 - \frac{1575}{2500^2} =$$

$$P[X = \text{impar}] = k \cdot (1+3+5+\dots+99) + k \cdot \left[100 \cdot 25 - (51+52+\dots+75) \right]$$

$$P[X = \text{impar}] = k \cdot \frac{(1+99) \cdot 25}{2} + k \cdot \left[2500 - \frac{(51+99) \cdot 25}{2} \right]$$

$$P[X = \text{impar}] = \frac{1}{2500} \cdot 625 + 2500k - 1875k$$

$$P[X = \text{impar}] = \frac{625}{2500} + 1 - \frac{1875}{2500} = 1 - \frac{1250}{2500} = \frac{1250}{2500} = \frac{1}{2}$$

c) A: el n° de periodicos vendidos en un día es mayor de 50

B: " " " " " " " " menor " "

C: " " " " " " " " igual a 50

D: " " " " " " " " entre 25 y 75

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\emptyset)}{P(B)} = \frac{0}{P(B)} = 0.$$

$$P(A/C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = 0$$

$$P(A/D) = P(50 < X \leq 75) = \sum_{x=51}^{75} k(100-x) = 100 \cdot 25k - k \cdot \frac{(51+75) \cdot 25}{2}$$

$$P(A/D) = 25 \cdot \frac{100}{2500} - \frac{1}{2500} \cdot \frac{(51+75) \cdot 25}{2} = \frac{100}{100} - \frac{63}{200} = \frac{137}{200}$$

$$P(C/D) = \frac{P(D \cap C)}{P(D)} = P(X=50) = P(C) = \frac{1}{2500} \cdot 50 = \frac{1}{50}$$

C y D son independientes, A y B no son independientes

ya que $P(A|D) \neq P(A)$ pues $0 \neq \frac{49}{50}$

A y B son disjuntos (mejor sería decir que son incompatibles) ya que $A \cap B = \emptyset$

C y D no son incompatibles ya que $C \cap D = C$

$$16^\circ P(X=r) = \frac{1}{2^r} \quad r=1, 2, \dots$$

Para que P sea una función de probabilidad ha de verificar que:

- $0 \leq P(X=r) < 1$, esto es cierto ya que $0 \leq \frac{1}{2^r} \leq 1$
- $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{2^r} = 1$, esto también es cierto al tratarse de una

progresión geométrica de razón $r = \frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1.$$

$$b) P[X = \text{par}] = P(X=2) + P(X=4) + P(X=6) + \dots =$$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots$ se trata de una progresión geométrica de razón $r = \frac{1}{4}$ por tanto:

$$P[X = \text{par}] = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

$$P[X = \text{impar}] = 1 - P[X = \text{par}] = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$P[X > 4] = 1 - P[X \leq 4] = 1 - (P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4))$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \right) = 1 - \frac{8+4+2+1}{16} = 1 - \frac{15}{16} = \frac{1}{16}$$

Los ejercicios que vienen a continuación son de cambio de variable. Tenemos que ver un poco de teoría para saber hacerlos.

CAMBIO DE VARIABLE.

Sea X una variable aleatoria definida en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. A partir de la variable X definimos la variable $Y = h(X)$. Se pueden dar dos casos:

a) Que la variable X sea discreta. Si $Y = h(X)$ lo mismo da decir que $h(X) = y$ que decir que $X = h^{-1}(y)$. La función de probabilidad de la variable Y es

$$P[Y = y] = P[h(X) = y] = P[X = h^{-1}(y)] \text{ y de}$$

aquí obtendríamos la función de probabilidad de Y . Veamos ejemplos.

17°

x	-2	-1	0	1	2
$P[X=x]$	$1/5$	$1/6$	$1/5$	$1/15$	$1/30$

Esta es la función

de probabilidad de X . Hacemos el cambio de variable $Y = X^2$. Nos piden que hallamos la función de probabilidad de Y . En primer lugar observamos que el campo de variación de Y es $0, 1, 4$. En este caso es muy fácil hallar la función de probabilidad de Y .

y	0	1	4
$P[Y=y]$	$1/5$	$\frac{1}{6} + \frac{1}{15} = \frac{7}{30}$	$\frac{1}{5} + \frac{11}{30} = \frac{17}{30}$

Este es el ejemplo más fácil que se nos puede presentar.

18° $P(X=x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \quad x=0, 1, 2, \dots$ (es variable discreta)

$Y = X^3 + 3$. Hallar la función de probabilidad de Y .
La función de probabilidad de Y es:

$$P[Y=y] = P[X^3+3=y] = P[X = \sqrt[3]{y-3}] = \frac{\lambda^{\sqrt[3]{y-3}}}{(\sqrt[3]{y-3})!} e^{-\lambda}$$

$$y = 3, 4, 11, 30, \dots$$

19º $P[X=x] = p \cdot q^x$ $x=0,1,2,\dots$ $Y=X+1$. Hallar la función de probabilidad de Y .

Se trata de nuevo de variable discreta. La función de probabilidad de Y es:

$$P[Y=y] = P[X+1=y] = P[X=y-1] = p \cdot q^{y-1},$$

$$y=1,2,3,\dots$$

20º $P[X=x] = \binom{x+r-1}{x} p^r \cdot q^x$, $x=0,1,2,3,\dots$

$Y=X+r$. Hallar la función de probabilidad de Y .

Es variable discreta nuevamente.

$$P[Y=y] = P[X+r=y] = P[X=y-r] = \binom{y-r+r-1}{y-r} p^r \cdot q^{y-r}$$

luego:

$$P[Y=y] = \binom{y-1}{y-r} p^r \cdot q^{y-r} \quad y=r, 1+r, 2+r, 3+r, \dots$$

b) Ahora vamos a estudiar el cambio de variable en variable continua, esto es más complicado. La función de densidad la obtendremos derivando la función de distribución. Sea F la función de distribución. Necesitamos una notación que nos indique cual es la variable estadística y cual es el valor que toma esta variable. Si ponemos

$F_Y(y) \rightarrow$ valor que toma la variable estadística.

↓ variable estadística

$F_Y(y) = P[Y \leq y]$, emplearemos esta notación

una última observación, cuando hacemos un cambio de variable $Y=h(X)$ puede ocurrir que la función h sea creciente, decreciente o que no sea

monótona. Vamos a distinguir estos tres casos en los siguientes ejemplos.

21º la función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4x^3}{15} & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) $Y = -2 + 3X$. Nos piden que hallamos la función de densidad de Y .

En este caso es $h(x) = -2 + 3x \Rightarrow h'(x) = 3 > 0$
 h es creciente.

Calculamos la función de distribución de Y

$$F_Y(y) = P[Y \leq y] = P[-2 + 3X \leq y] = P\left[X \leq \frac{2+y}{3}\right] = F_X\left(\frac{2+y}{3}\right). \text{ Luego:}$$

$F_Y(y) = F_X\left(\frac{2+y}{3}\right)$. Si derivamos obtenemos la función de densidad:

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{dF_X\left(\frac{2+y}{3}\right)}{dy} = \frac{dF_X\left(\frac{2+y}{3}\right)}{dx} \cdot \frac{dx}{dy}$$

$$F_Y(y) = F_X\left(\frac{2+y}{3}\right) \cdot \frac{d\left(\frac{2+y}{3}\right)}{dy} \Rightarrow f_Y(y) = f_X\left(\frac{2+y}{3}\right) \cdot \frac{1}{3}$$

$$\text{Como } 1 \leq x \leq 2 \Rightarrow 3 \leq 3x \leq 6 \Rightarrow 3-2 \leq -2+3x \leq 6-2$$

$\Rightarrow 1 \leq y \leq 4$. Luego la función de densidad de y es:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{3} \cdot \frac{4\left(\frac{2+y}{3}\right)^3}{15} & \text{si } 1 \leq y \leq 4 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

b) $Y = -2 - 3X$. Hallar la función de densidad de Y
 En primer lugar observamos que $Y = h(X) = -2 - 3X \Rightarrow$
 $\Rightarrow h'(X) = -3 < 0$ decreciente. Además $x = -\frac{2+Y}{3}$

Procedemos de la misma forma que en el apartado a). La función de distribución de Y es:

$$F_Y(y) = P[Y \leq y] = P[-2 - 3X \leq y] = P[-3X \leq 2 + y]$$

$$= P\left[X \leq -\frac{2+y}{3}\right] = P\left[X > \frac{2+y}{3}\right] = 1 - P\left[X \leq \frac{2+y}{3}\right]$$

luego:

$F_Y(y) = 1 - F_X\left(\frac{2+y}{3}\right)$. Derivando obtenemos la función de densidad:

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = - \frac{dF_X\left(\frac{2+y}{3}\right)}{dy} = - \frac{dF_X\left(\frac{2+y}{3}\right)}{dx} \cdot \frac{dx}{dy}$$

$$f_Y(y) = - f_X\left(\frac{2+y}{3}\right) \cdot \frac{d\left(-\frac{2+y}{3}\right)}{dy} = - f_X\left(\frac{2+y}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$$

es decir:

$$f_Y(y) = \frac{1}{3} f_X\left(\frac{2+y}{3}\right)$$

Por último vemos como varía y :

$$1 \leq X \leq 2 \Rightarrow -6 \leq -3X \leq -3 \Rightarrow -8 \leq \overbrace{-2-3X}^Y \leq -5$$

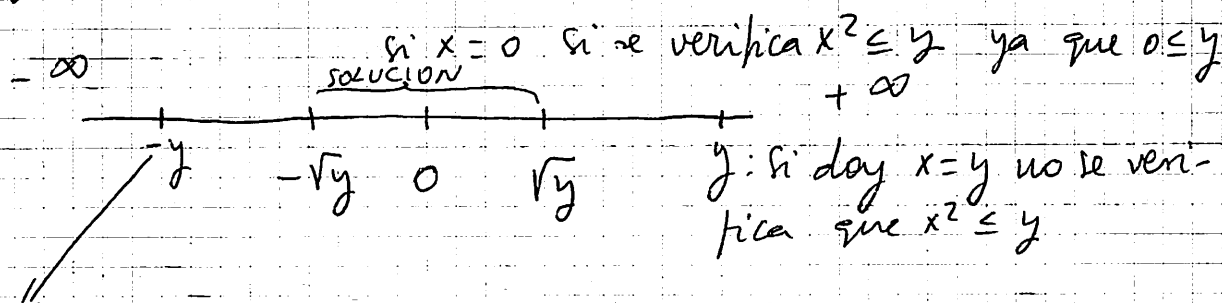
Entonces la función de densidad de Y es:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{3} \cdot \frac{4\left(\frac{2+y}{3}\right)^3}{15} & \text{si } -8 \leq y \leq -5 \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Nos queda por ver el caso en el que $h(x)$ no es monótona. Lo estudiaremos con el siguiente ejemplo.

Antes de entrar con él observemos la inequación $x^2 \leq y$. Vamos a resolverla:

$$x^2 = y \Rightarrow x = \pm \sqrt{y}$$



Si day $x = -y$ no se verifica $x^2 \leq y$

Luego la solución de $x^2 \leq y$ es $-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}$
vamos al ejemplo:

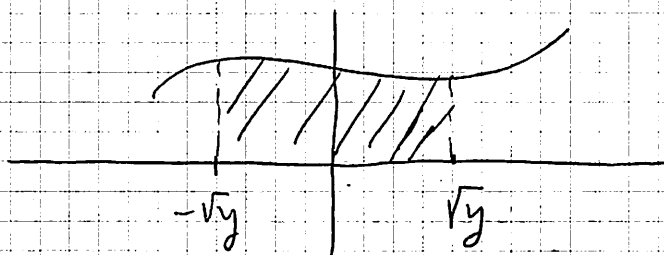
$$22^\circ \quad f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Tenemos que hallar la función de densidad de $Y = X^2$.

Observemos que en este caso es $Y = h(X) = X^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow h'(X) = 2X$, h' puede ser positiva o negativa dependiendo de lo que valga x , de esta manera no podemos asegurar que h sea creciente o decreciente siempre.

La función de distribución de Y es

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P[Y \leq y] = P[X^2 \leq y] = P[-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}] \\ &= P[X \leq \sqrt{y}] - P[X \leq -\sqrt{y}] \text{ esto se deduce a partir de la siguiente gráfica.} \end{aligned}$$



Luego $F_Y(y) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$. Si derivamos obtenemos las funciones de densidad:

$$\frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{dF_X(\sqrt{y})}{dy} - \frac{dF_X(-\sqrt{y})}{dy}$$

$$f_Y(y) = \frac{dF_X(\sqrt{y})}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} - \frac{dF_X(-\sqrt{y})}{dx} \cdot \frac{dx}{dy}$$

aquí es $x = \sqrt{y}$
con lo que $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$

Aquí es $x = -\sqrt{y}$
con lo que $\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{2\sqrt{y}}$

luego $f_Y(y) = f_X(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} - f_X(-\sqrt{y}) \left(-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)$ es decir

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(-\sqrt{y})$$

Para acabar de dar la solución nos queda ver como varía y . Sabemos que $-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow$

$$0 \leq x^2 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq y \leq 1. \text{ Entonces la función}$$

de densidad de $Y = x^2$ es:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \frac{3y}{2} + \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \frac{3y}{2} & \text{si } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{2} \sqrt{y} & \text{si } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

23°

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) $Y = e^X$. Hallar la función de densidad de Y .
 Observemos que $Y = h(X) = e^X \Rightarrow h'(X) = e^X > 0$ la función es creciente.
 La función de distribución de Y es: $\begin{cases} \text{si } e^X \leq y \Rightarrow \ln e^X \leq \ln y \Rightarrow \\ \Rightarrow X \leq \ln y \end{cases}$

$$F_Y(y) = P[Y \leq y] = P[e^X \leq y] = P[X \leq \ln y]$$

luego $F_Y(y) = F_X(\ln y)$. Si derivamos obtenemos la función de densidad

$$\frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{dF_X(\ln y)}{dy} = \frac{dF_X(\ln y)}{dx} \cdot \frac{dx}{dy}$$

Aquí es $x = \ln y \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}$

Por tanto: $f_Y(y) = f_X(\ln y) \cdot \frac{1}{y}$

veamos como varía y . Sabemos que $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow e^0 \leq e^x \leq e \Rightarrow 1 \leq y \leq e$. Entonces la función de densidad de Y es:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y} & \text{si } 1 \leq y \leq e \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

b) $Z = \ln X$. Hallar la función de densidad de Z .
 En este caso $Z = h(X) = \ln X \Rightarrow h'(X) = \frac{1}{X}$ la función h en este caso no es creciente ni decreciente, depende del valor que tenga x .
 Calculamos primero las funciones de distribución:

$$F_Z(z) = P[Z \leq z] = P[\ln x \leq z] = P[X \leq e^z]$$

luego $F_Z(z) = F_X(e^z)$. Derivando obtenemos la función de densidad:

$$\frac{dF_Z(z)}{dz} = \frac{dF_X(e^z)}{dz} = \frac{dF_X(e^z)}{dx} \cdot \frac{dx}{dz} \quad \nearrow x=e^z = \frac{dF_X(e^z)}{dx} \cdot e^z$$

$$\text{luego } f_Z(z) = f_X(e^z) \cdot e^z$$

Veamos como varía z . $0 \leq x \leq 1 \quad \ln 0 \leq \ln x \leq \ln 1$

$\Rightarrow -\infty \leq z \leq 0 \Rightarrow z \leq 0$. Entonces la función de densidad de Z es:

$$f_Z(z) = \begin{cases} e^z & \text{si } z \leq 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

24º

$$f(x) = \begin{cases} 2-2x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) $Y = 1 - X$. Hallar la función de densidad de Y .
 $Y = h(X) = 1 - X \Rightarrow h'(x) = -1$ es decreciente. La función de distribución es:

$$F_Y(y) = P[Y \leq y] = P[1 - X \leq y] = P[X \geq 1 - y] =$$

$$= 1 - P[X \leq 1 - y] = 1 - F_X(1 - y). \text{ Por tanto tenemos}$$

que $F_Y(y) = 1 - F_X(1 - y)$. Derivamos para obtener la función de densidad:

$$\frac{dF_Y(y)}{dy} = - \frac{dF_X(1-y)}{dy} = - \frac{dF_X(1-y)}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} \quad \nearrow x=1-y \Rightarrow \frac{dx}{dy} = -1$$

$$\text{luego } f_Y(y) = f_X(1-y)$$

veamos como varia la y . Como $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow$
 $-1 \leq -x \leq 0 \Rightarrow 1-1 \leq 1-x \leq 1+0 \Rightarrow 0 \leq 1-x \leq 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 0 \leq y \leq 1$. Por tanto la función de densidad de Y es:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2 - 2(1-y) & \text{si } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases} \quad \text{es decir:}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2y & \text{si } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

b) $z = \frac{1}{x}$. Hallar la función de densidad de z .

En este caso $z = h(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow h'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ es decreciente. La función de distribución de z es:

$$F_Z(z) = P[Z \leq z] = P\left[\frac{1}{x} \leq z\right] = P\left[x \geq \frac{1}{z}\right] = 1 - P\left[x \leq \frac{1}{z}\right]$$

Luego $F_Z(z) = 1 - F_X\left(\frac{1}{z}\right)$. Derivando obtenemos la función de densidad:

$$x = \frac{1}{z} \Rightarrow \frac{dx}{dz} = -\frac{1}{z^2}$$

$$\frac{dF_Z(z)}{dz} = - \frac{dF_X\left(\frac{1}{z}\right)}{dz} = - \frac{dF_X\left(\frac{1}{z}\right)}{dx} \cdot \frac{dx}{dz}$$

Por lo tanto $f_Z(z) = -f_X\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \left(-\frac{1}{z^2}\right)$ es decir

$$f_Z(z) = \frac{1}{z^2} \cdot f_X\left(\frac{1}{z}\right)$$

Veamos como varia z $0 < x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{x} > 1 \Rightarrow z > 1$
 Entonces la función de densidad de z es:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \left(2 - \frac{2}{z}\right) \cdot \frac{1}{z^2} & \text{si } z > 1 \\ 0 & \text{en el resto, es decir} \end{cases}$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{2z-2}{z^3} & \text{si } z > 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

25° $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ si $-\infty < x < \infty$

$Y = X^2$. Hallar la función de densidad de Y .

Ya conocemos esta variable $Y = X^2$. La función $Y = h(X) = X^2$ no es monótona. Además vimos en el ejercicio 21 que la solución de la inequación $X^2 \leq y$ es $-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}$. La función de distribución de Y es:

$$F_Y(y) = P[Y \leq y] = P[X^2 \leq y] = P[-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}] =$$

$$= P[X \leq \sqrt{y}] - P[X \leq -\sqrt{y}] = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}),$$

es decir que $F_Y(y) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$. Derivando obtenemos la función de densidad:

$$\frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{dF_X(\sqrt{y})}{dy} - \frac{dF_X(-\sqrt{y})}{dy} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{dF_X(\sqrt{y})}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} - \frac{dF_X(-\sqrt{y})}{dx} \cdot \frac{dx}{dy}$$

$$f_Y(y) = f_X(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} - f_X(-\sqrt{y}) \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = f_X(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} + f_X(-\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}, \text{ además}$$

como $-\infty < x < \infty \Rightarrow -\infty < x^2 < \infty \Rightarrow -\infty < y < \infty$

Por tanto la función de densidad de y es:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y}{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y}{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}},$$

es decir:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}}$$