CAMBIO DE VARIABLE UNIDIMENSIONAL

Variables aleatorias discretas

Ejemplo 1 (Ej.17 Relación 2) Sea X una variable aleatoria cuya función de probabilidad es

X	−2	−1	0	1	2
P(X=x)	1/5	1/6	1/5	1/15	11/30

Se define una nueva variable $Y=X^2$. Obtenga el campo de variación y la función de probabilidad de la variable Y.

$y\ (=x^2)$	0	1	4
$P(Y=y)=P(X=\pm\sqrt{y})$	1/5	7/30	17/30

$\boxed{\text{NOTA}: y = 0,1,4}$

$$x=-2,-1,0,1,2 \underset{Y=X^2}{\Rightarrow} y=(-2)^2,(-1)^2,(0)^2,(1)^2,(2)^2$$

Ejemplo 2 (Ej.19 Relación 2) Sea X una v.a. Geométrica con función de probabilidad $P(X=x)=p\,q^x$ con x=0,1,2.... Obtenga la función de probabilidad de Y=X+1.

$$P(Y=y)=P(X=y-1)=p\,q^{y-1},\quad \text{si } y=1,2,\ldots$$

$\boxed{\text{NOTA}: y = 1,2,\ldots}$

$$x=0,1,2,\cdots \underset{Y=X+1}{\Rightarrow} y=(0+1),(1+1),(2+1),\cdots$$

Variables aleatorias continuas

Ejemplo 3 (Ej.21 Relación 2) La función de densidad de la variable aleatoria X es

$$f(x) = \frac{4x^3}{15} \quad 1 \le x \le 2$$

a) Sea Y=–2+3X. Calcule la función de densidad de Y.

b) Sea Z=–2–3X. Calcule la función de densidad de Z.

a)

$$\boxed{F_Y(y)} = P(Y \le y) = P(-2+3X \le y) = P\left(X \le \frac{y+2}{3}\right) = \boxed{F_X\left(\frac{y+2}{3}\right)}$$

$$\boxed{f_Y(y)} = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{d}{dy}F_X\left(\frac{y+2}{3}\right) \underset{\substack{\text{Regla de}\\ \text{la cadena}}}{=} \boxed{f_X\left(\frac{y+2}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}}$$

Teniendo en cuenta que $f(x) = \frac{4x^3}{15} \quad 1 \le x \le 2$

$$\boxed{f_Y(y)} = f_X\left(\frac{y+2}{3}\right)\cdot\frac{1}{3} = \frac{4\left(\frac{y+2}{3}\right)^3}{15}\cdot\frac{1}{3} = \boxed{f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{4(y+2)^3}{1215} & \text{si } 1 \le y \le 4 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}}$$

$$\boxed{\text{NOTA}: 1 \le y \le 4}$$

$$1 \le x \le 2 \quad \underset{Y=-2+3X \Rightarrow X=\frac{Y+2}{3}}{\Rightarrow} 1 \le \frac{y+2}{3} \le 2 \Rightarrow 1 \le y \le 4$$

b)

$$\boxed{F_Z(z)} = P(Z \leq z) = P(-2-3X \leq z) = P\left(X \geq -\frac{z+2}{3}\right) = 1 - P\left(X \leq -\frac{z+2}{3}\right) =$$

$$= \boxed{1 - F_X\left(-\frac{z+2}{3}\right)}$$

$$\boxed{f_Z(z)} = \frac{dF_Z(z)}{dz} = \frac{d}{dz}\left[1 - F_X\left(-\frac{z+2}{3}\right)\right] \underbrace{=}_{\text{Regla de la cadena}} \boxed{f_X\left(-\frac{z+2}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}}$$

Teniendo en cuenta que $f(x) = \dfrac{4x^3}{15} \quad 1 \leq x \leq 2$

$$\boxed{f_Z(z)} = f_X\left(-\frac{z+2}{3}\right)\cdot\frac{1}{3} = \frac{4\left(-\frac{z+2}{3}\right)^3}{15}\cdot\frac{1}{3} = \boxed{f_Z(z) = \begin{cases} -\dfrac{4(z+2)^3}{1215} & \text{si } -8 \leq z \leq -5 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}}$$

$$\boxed{\text{NOTA}: -8 \leq z \leq -5}$$

$$1 \leq x \leq 2 \underset{Z=-2-3X \Rightarrow X=-\frac{Z+2}{3}}{\Rightarrow} 1 \leq -\frac{z+2}{3} \leq 2 \Rightarrow -2 \leq \frac{z+2}{3} \leq -1 \Rightarrow -8 \leq z \leq -5$$

Ejemplo 4 (Ej.22 Relación 2) Determine la función de densidad de la variable $Y=X^2$, sabiendo que la función de densidad de la variable aleatoria X es

$$f(x)=\frac{3x^2}{2} \quad -1\le x\le 1$$

$$\boxed{F_Y(y)}=P(Y\le y)=P\left(X^2\le y\right)=P\left(|X|\le\sqrt{y}\right)=P\left(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\right)=$$

$$=\boxed{F_X\left(\sqrt{y}\right)-F_X\left(-\sqrt{y}\right)}$$

$$\boxed{f_Y(y)}=\frac{d}{dy}F_Y(y)=\frac{d}{dy}\left(F_X\left(\sqrt{y}\right)-F_X\left(-\sqrt{y}\right)\right)=\boxed{\frac{1}{2\sqrt{y}}f_X\left(\sqrt{y}\right)+\frac{1}{2\sqrt{y}}f_X\left(-\sqrt{y}\right)}$$

Teniendo en cuenta que $f(x)=\dfrac{3x^2}{2} \quad -1\le x\le 1$

$$\boxed{f_Y(y)}=\frac{1}{2\sqrt{y}}f_X\left(\sqrt{y}\right)+\frac{1}{2\sqrt{y}}f_X\left(-\sqrt{y}\right)=\frac{1}{2\sqrt{y}}\left(\frac{3\left(\sqrt{y}\right)^2}{2}+\frac{3\left(-\sqrt{y}\right)^2}{2}\right)=$$

$$=\boxed{\frac{3\sqrt{y}}{2} \quad \text{si } 0<y\le 1}$$

$$\boxed{\text{NOTA}: 0<y\le 1}$$

$$-1\le x\le 1 \underset{Y=X^2\Rightarrow X=\pm\sqrt{Y}}{\Rightarrow} \begin{cases} 0<\sqrt{y}\le 1\Rightarrow 0<y\le 1 \\ -1\le -\sqrt{y}<0\Rightarrow 0<y\le 1 \end{cases}$$

→ CAMBIO DE VARIABLE UNIDIMENSIONAL.

$\mathbb{R}_X$ $\quad Y = g(X) \to \mathbb{R}_Y$

$P(X=x)$ $\quad P(Y=y)$

ó $F(x) = P(X \leq x)$

CASO DISCRETO

$\mathbb{R}_X$ $\quad Y = g(X) \to \mathbb{R}_Y$

$f(x)$ $\quad f(y)$

ó $F(x) = P(X \leq x)$ $\quad F(y) = P(Y \leq y)$

CASO CONTINUO

Ejemplo 1. (V.A discreta)

Si la variable toma varios valores ordenar de menor a mayor

X	-2	-1	0	1	2	
$P(X=x)$	$1/5$	$1/6$	$1/5$	$1/15$	$11/30$	1

$\longrightarrow Y = X^2$

$a \leq x < b$.

$\mathbb{R}_X : -2, -1, 0, 1, 2$ $\longrightarrow$ $\mathbb{R}_Y : \underbrace{4}_{(-2)^2}, \underbrace{1}_{(-1)^2}, \underbrace{0}_{(0^2)}, \underbrace{1}_{(1^2)}, \underbrace{4}_{(2^2)}$

Sólo una vez de menor a mayor $(0, 1, 4)$

Si fuera $\begin{cases} Y = X + 1 & \mathbb{R}_Y : -1, 0, 1, 2, 3. \\ Y = 3X & \mathbb{R}_Y : -6, -3, 0, 3, 6 \end{cases}$

(*) →

Y	0	1	4	
$P(Y=y)$	$1/5$	$7/30$	$17/30$	1

$P(Y=y) = P[X^2 = y] = P[X = \pm\sqrt{y}]$

$P(Y=0) = P(X = \pm\sqrt{0}) = P(X=0)$

$P(Y=1) = P(X = \pm\sqrt{1}) = P(X=-1) + P(X=1)$

$P(Y=4) = P(X = \pm\sqrt{4}) = P(X=-2) + P(X=2)$

(-1, 0, 1, 2, 3)

(*) → a hace: $Y = x+1$

$P(y=y) = P[x+1=y] = P(x=y-1)$
- $P(y=-1) = P(x=-1-1) = P(x=-2)$
- $P(y=0) = P(x=-1) = P(x=0-1)$
- . . .

Ejemplo 2.

$P(X=x) = p \cdot q^x \quad x = 0,1,2,\dots \longrightarrow Y = x+1 \quad y = 1,2,\dots$

$P(Y=y) = P[x+1=y] = P[x=y-1]$
- $P(y=1) = P(x=1-1) = P(x=0)$.
- . . .

¡¡No necesito hacer eso.!!

Haré esto:

$P(Y=y) = P(x+1=y) = P[x=y-1] = p \cdot q^{y-1}$

Ejemplo 3 (V.a. continua)

Conoceremos la f. de densidad.

$f(x) = \frac{4x^3}{15} \quad 1 \le x \le 2$

1º. Despejo X de $Y=-2+3x$.

2º Lo meto esa ecuación en el campo de variación

$x = \frac{y+2}{3}$

Nuevo campo de variación.

$\boxed{1 \le x \le 2} \longrightarrow 1 \le \frac{y+2}{3} \le 2.$

$\boxed{1 \le y \le 4.}$

(a) $Y = -2+3x \longrightarrow f(y)$?

3º Una vez obtenido el campo de variación "saco" la $F_y(y)$, x con ella la F_x

$\longrightarrow F_y(y) = P[Y \le y] = P[-2+3x \le y] = P\left[x \le \frac{y+2}{3}\right] = F_x\left(\frac{y+2}{3}\right)$

es: es la f. de distribución.

No cambia el sentido de la inecuación.

$\cancel{F_x(x) = 2x}$

$\cancel{F_y(y) = 2\left(\frac{y+2}{3}\right)}$

4º Derivo la F de distribución mediante la regla de la cadena

$\rightarrow f_y(y) = \dfrac{dF_y(y)}{dy} = \dfrac{dF_x\left(\frac{y+2}{3}\right)}{dy} = \dfrac{dF_x\left(\frac{y+2}{3}\right)}{dx}\,\dfrac{d\left(\frac{y+2}{3}\right)}{dy} =$

$$\boxed{f_x\left(\frac{y+2}{3}\right)\frac{1}{3}}$$

derivo respecto a y. uso regla de la cadena x e y esto dentro de x. derivo respecto a x y luego respecto a y la de dentro.

4. Calculo la f de densidad de y. Y donde ponga "y" pondré "x" la función

Tenemos en cuenta que $f(x) = \frac{4x^3}{15}$ $1 \le x \le 2$.

$$f_y(y) = f_x\left(\frac{y+2}{3}\right)\cdot\frac{1}{3} = \frac{4\left(\frac{y+2}{3}\right)^3}{15}\cdot\frac{1}{3} \text{ si } 1 \le y \le ?$$

"cojo la de "x" y pongo y"

¡¡ Todos los que al despejar no se altere el orden de la inecuación se hará así. Mismo procedimiento !!

* Vemos caso en que esto se altera

(b) $z = -2-3x \rightarrow f(z)$

debería ser a sólo $x \ge$ al ser cambio de igual ...

$\rightarrow F_z(z) = P(Z \le z) = P[-2-3x \le z] = P\left[x \ge \frac{z+2}{-3}\right] =$

$1 - P\left(x \le -\frac{z+2}{3}\right) = \boxed{1 - F_x\left(-\frac{z+2}{3}\right)}$

da lo mismo y lo pongo así su contrario

$\rightarrow f_z(z) = \dfrac{dF_z(z)}{dz} = \dfrac{d\left[1 - F_x\left(-\frac{z+2}{3}\right)\right]}{dz} = \cancel{-} f_x\left(-\frac{z+2}{3}\right)\left(\cancel{-}\frac{1}{3}\right)$

$$f_x\left(-\frac{z+2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$f(z) = f_x\left(-\frac{z+2}{3}\right)\cdot\frac{1}{3} = \frac{4}{15}\left(-\frac{z+2}{3}\right)^3\cdot\frac{1}{3} \quad \text{si } -8 \le z \le -5$$

Ejemplo 4

$$f(x) = \frac{3x^2}{2} \quad \text{si} \quad -1 \le x \le 1 \quad \xrightarrow{y=x^2} \quad -1 \le x \le 1 \longrightarrow$$

$y = x^2$
$x = \pm\sqrt{y}$

$\sqrt{y}$: $0 \le \sqrt{y} \le 1$, $0 \le y \le 1$

$-\sqrt{y}$: $-1 \le -\sqrt{y} \le 0$

$0 < y \le 1$

$$\rightarrow F_y(y) = P[\underbrace{Y \le y] = P[}x^2 \le y] = P[|x| \le \sqrt{y}] = P[-\sqrt{y} \le x \le \sqrt{y}]$$

$\left(\begin{array}{c}\sqrt{x^2} \le \sqrt{y} \\ |x| \le \sqrt{y}\end{array}\right)$

$$= P(x \le \sqrt{y}) - P(x < -\sqrt{y})$$

$$= F_x(\sqrt{y}) - F_x(-\sqrt{y})$$

$-1 \le \sqrt{y} \le 0$
$0 < y \le 1$

$$\rightarrow f_y(y) = \frac{d\,F_y(y)}{dy} = \frac{d\,[F_x(\sqrt{y}) - F_x(-\sqrt{y})]}{dy} =$$

$$= f_x(\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}} \cancel{+} f_x(-\sqrt{y})\left(\cancel{+}\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)$$