

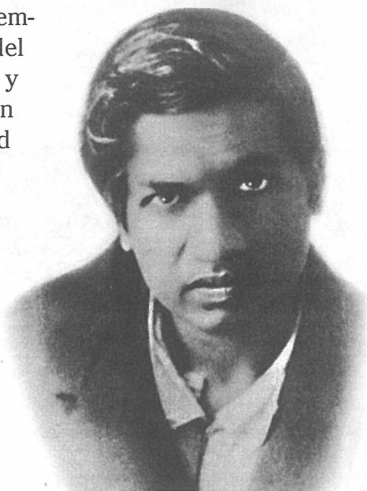
RAMANUJAN

Capi Corrales

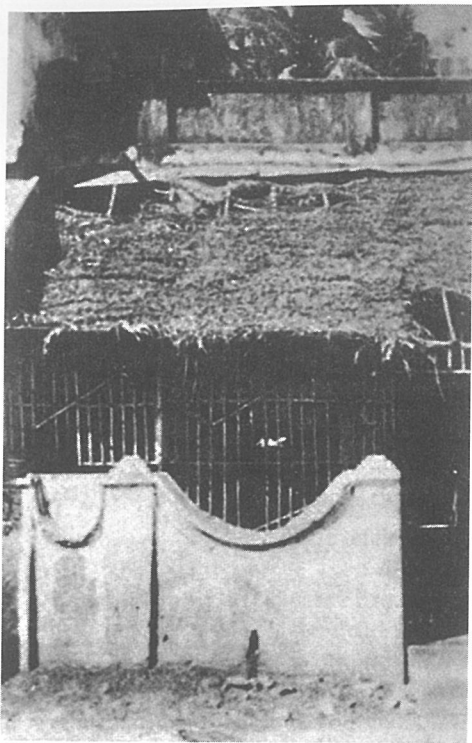
Srinivasa Ramanujan nació el 22 de diciembre de 1887 en el seno de una familia pobre del sur de India. Recibió enseñanza primaria y secundaria en Kumbakonam, y fracasó en varios intentos por acceder a la Universidad al suspender en los exámenes de ingreso todas las asignaturas salvo las matemáticas. La vida de Ramanujan —la pobreza de sus orígenes, la falta de formación matemática, su muerte temprana—, tan inusual en un científico de su talla, le ha convertido en uno de los grandes mitos matemáticos. André Weil ([W-1]) resume así la biografía de Ramanujan:

Este joven cuya carrera fue bloqueada por su pobre conocimiento del inglés, tuvo que vegetar en trabajos inferiores como contable, que consiguió gracias a la protección de algunos patronos a los que interesó su trabajo; por su cuenta y sin ningún apoyo llevó a cabo sus investigaciones en teoría de números, la teoría de las series y las fracciones continuas. Habiendo tenido acceso tan sólo a anticuados y mediocres libros de texto británicos, no conocía ni tan siquiera la noción de convergencia de una serie. Por un accidente fortuito algunos de sus resultados cayeron en manos de Hardy, que se apresuró a arreglar su viaje a Inglaterra hacia 1916. Allí Ramanujan escribió sus trabajos más importantes a los cuales debió, algunos años después, su elección como Fellow de la Royal Society, un título de gran prestigio nunca hasta entonces concedido a alguien de India. Pero durante su estancia en Inglaterra Ramanujan contrajo tuberculosis; murió en 1920, al poco tiempo de regresar a su país, donde nunca llegó a concedérsele una posición académica. Así pues, nunca fundó escuela ni tuvo alumnos.

Su abundante producción matemática no es fácil de describir. Sus resultados aparecen recogidos en tres cuadernos personales escritos en India entre 1909 y 1916, en numerosas cartas personales (sólo en las que escribió a Hardy, por ejemplo, describe ya más de 120 teoremas) y en numerosos artículos, algunos publicados a partir de 1911 en India, los más en revistas matemáticas europeas de prestigio entre los años 1912 y 1920. En sus cuadernos y cartas primeras los resultados triviales se mezclan con los profundos, los conocidos con los nuevos y, en general, es difícil determinar con exactitud cuánto de lo que Ramanujan produjo era fruto de la intuición y cuánto de la certidumbre verificada. El método de la escuela tradicional en India, aún vigente en época de Ramanujan, no ponía mucho énfasis en las demostraciones. Posiblemente la influencia de esta tradición, junto con la mediocridad de los libros de mate-



20



La casa de Ramanujan en Kumbakonam (India).

máticas que estudió antes de llegar a Inglaterra y su falta de formación matemática, expliquen la carencia de demostraciones y rigor que encontramos en sus escritos anteriores a 1916 (fecha de su toma de contacto con la escuela matemática europea), y la falta de justificación en muchos de sus escritos posteriores.

Otra dificultad que ofrecen los textos de Ramanujan es la variedad de temas que encaró. Su colaboración con Hardy, magnífico analista, sacó a la luz su talento para el análisis, quizás el aspecto más conocido de su trabajo; sin embargo, tuvieron que pasar algunos años antes de que varias de sus contribuciones fundamentales a la teoría de los números fuesen entendidas, valoradas y utilizadas ([Ra]).

De entre todos los trabajos de Ramanujan describiremos

brevemente dos. El primero pone de manifiesto su talla como analista; el segundo la profundidad de su visión y conocimiento del comportamiento de los números. En ambos casos tan importantes son los resultados en sí mismos como el efecto posterior de las ideas desarrolladas y los métodos de demostración utilizados. Aspiramos con ellos a ilustrar cómo pese a su poca preparación técnica, al aislamiento de sus primeros años y a su juventud, los trabajos de Ramanujan van mucho más allá de los trucos y astucias numéricas. Ramanujan es, sin duda alguna, uno de los grandes matemáticos de este siglo.

1. La fórmula de las particiones.

Una *partición* de un entero n es cualquier expresión de n como suma de enteros positivos. Por ejemplo,

$$4 = 1+1+1+1 = 3+1 = 2+2 = 2+1+1,$$

luego 4 tiene 5 particiones distintas y lo expresamos escribiendo $p(4) = 5$. Se conoce muy poco sobre las propiedades de la función $p(n)$, y Ramanujan fue el primer matemático que descubrió algunas de ellas, como por ejemplo

$p(5m+4)$ es siempre múltiplo de 5, sea cual sea el valor de m ,

$p(7m+5)$ es siempre múltiplo de 7, sea cual sea el valor de m ,

$p(11m+6)$ es siempre múltiplo de 11, sea cual sea el valor de m .

La función $p(n)$ es un ejemplo de las llamadas funciones aritméticas, funciones que toman valores en los números enteros. Puesto que los enteros aparecen a saltos en la recta real, los métodos usuales del análisis real o complejo no funcionan para estudiar el comportamiento de funciones aritméticas. La estrategia que se sigue con frecuencia para evitar este problema, y que denotaremos por “(e)”, es asociar a una función aritmética $f(n)$ una serie infinita convergente de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(n) x^n$$

en la que los coeficientes $a(n)$ se construyan a partir de nuestra función f , y estudiar las propiedades de f a partir de las de esta serie, que sí se pueden estudiar mediante el análisis usual. Las contribuciones en esta estrategia analítica están entre las fundamentales de Ramanujan. Por ejemplo, su método de trabajo en el teorema VII - (7) de su primera carta a Hardy (del que este último comenta “la afirmación falsa de Ramanujan es una de las más fructíferas que hizo nunca, pues acabó llevándonos a nuestro trabajo en colaboración sobre las particiones”) y en [R-H], dio lugar, de la mano de Hardy y Littlewood en [H-L], al llamado método del círculo. Describámoslo a grandes trazos.

Siguiendo la estrategia “(e)”, la manera analítica de estudiar $p(n)$ es mediante la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} p(n) z^n$$

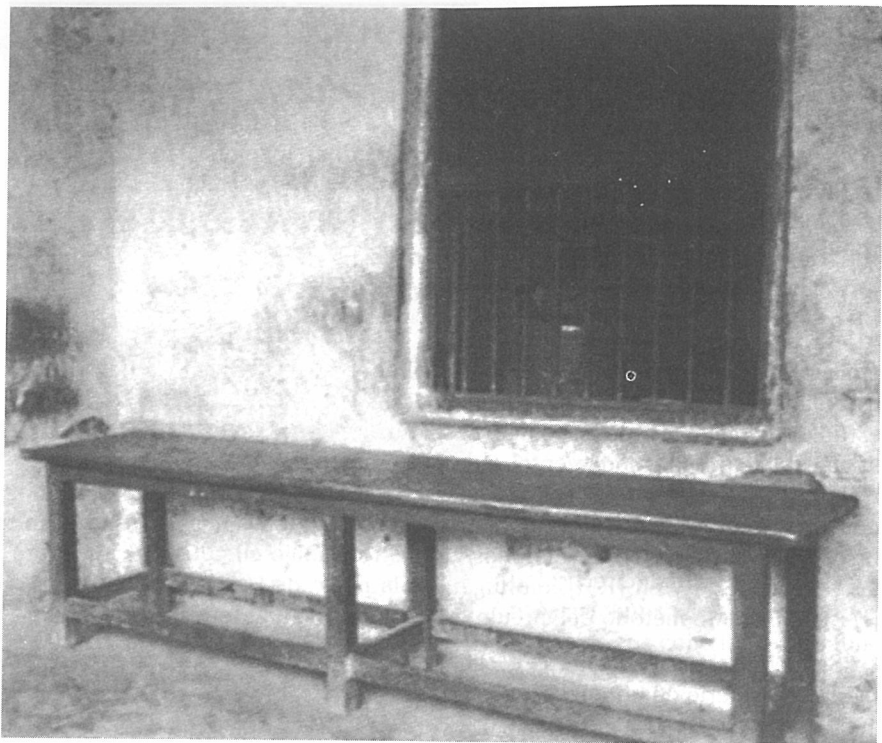
que Euler demostró tiene un desarrollo en producto

$$\sum_{n=1}^{\infty} p(n) z^n = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - z^k)^{-1}$$

Las singularidades de $f(z) = \prod (1 - z^k)^{-1}$ son las raíces de la unidad; es decir, todos los números complejos z tales que $z^k = 1$ para algún valor de k , y $f(z)$ es regular si $|z| \leq r < 1$. Según el teorema de los residuos de Cauchy,

$$p(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$$

con r arbitrario, $0 < r < 1$. Buscamos una estimación asintótica para $p(n)$ cuando $n \rightarrow \infty$. A grandes rasgos, si tomamos r cercano a 1, para todo k el valor de $f(z)$ en $z = re^{2\pi i n/k}$ se acerca al que toma en la singularidad $z = e^{2\pi i n/k}$, y por lo tanto $|f(re^{2\pi i n/k})|$ es muy grande; por otro lado, para todo k , $f(re^{2\pi i n/k})$ es inversamente proporcional a k . Ambas condiciones juntas garantizan que $|f(re^{2\pi i n/k})|$ es muy grande si r está cerca de 1 y k no supera un cierto tamaño, digamos $k \leq N$, y es de suponer que la contribución esencial a nuestra integral venga de entornos de tales puntos. Llamamos a tales entornos arco mayor, y al resto arco menor. Resulta que la contribución del arco mayor cuando $n \rightarrow \infty$ viene dada por una fórmula asintótica, mientras que la del arco menor es pequeña en comparación con la del arco mayor y podemos ignorarla, obteniendo así la fórmula asintótica buscada para $p(n)$.



El método del círculo de Ramanujan-Hardy-Littlewood es una poderosa herramienta para estudiar problemas aditivos de teoría de los números. El más famoso de ellos quizás sea el llamado problema de Waring. En sus *Meditationes Algebraicae* (1770), Waring afirmó que todo entero distinto de cero es suma de 4 cuadrados, 9 cubos, 19 bicuadrados. En la tercera edición de su libro (1782) sugirió que una propiedad similar debería ser cierta para potencias mayores. Llamemos $g(k)$ el número mínimo de sumandos necesarios para expresar todo entero como suma de potencias k -ésimas. Lagrange demostró en 1770 que $g(2)=4$, y siguiendo sus métodos Liouville obtuvo en 1859 que $g(4) \leq 53$, Wieferich obtuvo $g(3) = 9$ en 1909 (con un “agujero” en su argumento cubierto por Kempner en 1912), y ese mismo año Hilbert demostró que $g(k)$ es finito para todo entero $k > 0$. El trabajo de Ramanujan y Hardy de 1917 abrió una nueva vía en el tratamiento del problema; con el método del círculo sugerido en este artículo ([D]).

Hardy y Littlewood (1925) hallaron otra demostración para el resultado de Hilbert, y demostraron que $g(4) \geq 14$ para enteros suficientemente grandes;

En los años 30 Dickin y Pillai demostraron $g(7) = 147$, $g(8) = 279$, $g(9) = 548...$

Chen-Jing-Run demostró en 1964 que $g(5) = 37$.

Finalmente, en 1986 Deshouillers, Balasubramanian y Dress concluyeron que $g(4) = 19$.

2. La función tau de Ramanujan

El segundo ejemplo ilustra la contribución de Ramanujan a la estrategia seguida en Teoría de Números en este siglo que ha producido, entre otros frutos, la demostración del último teorema de Fermat de Andrew Wiles en 1994. Esta estrategia (conocida como el Programa Langlands) consiste en asociar a una estructura algebraica un tipo específico de serie infinita (llamada L-serie) construida a partir de datos concretos de la estructura, cuyas propiedades analíticas brindan información sobre la estructura y viceversa ((Ch), [G], [M]).

Para estudiar la representación de números enteros como suma de 24 cuadrados, Ramanujan introdujo en 1916 su función τ , definida mediante la serie de potencias

$$q \left[(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\dots \right]^{24} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n$$

(9)

IX Theorems on Continued Fractions.
a few examples are:—

(1) $\frac{1}{x} + \frac{1^2}{2x} + \frac{2^2}{2x} + \frac{3^2}{2x} + \frac{4^2}{2x} + \dots = \left\{ \frac{\Gamma(\frac{x+1}{2})}{\Gamma(\frac{x+3}{2})} \right\}^2$

(2) $\text{If } p = \frac{\Gamma(\frac{x+m+n+1}{2})}{\Gamma(\frac{x-m+n+1}{2})} \cdot \frac{\Gamma(\frac{x+m-n+1}{2})}{\Gamma(\frac{x-m-n+1}{2})} \times$
 $\frac{\Gamma(\frac{x-m+n+3}{2})}{\Gamma(\frac{x+m+n+3}{2})} \cdot \frac{\Gamma(\frac{x-m-n+3}{2})}{\Gamma(\frac{x+m-n+3}{2})}$, then
 $\frac{1-p}{1+p} = \frac{m}{x} + \frac{1^2-m^2}{x} + \frac{2^2-m^2}{x} + \frac{3^2-m^2}{x} + \frac{4^2-m^2}{x} + \dots$

(3) $\text{If } z = 1 + (\frac{1}{2})^2 x + (\frac{1}{2})^4 x^2 + \dots$
 and $y = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 + (\frac{1}{2})^2 (1-x) + (\frac{1}{2})^4 (1-x)^2 + \dots}{1 + (\frac{1}{2})^2 x + (\frac{1}{2})^4 x^2 + \dots}$, then
 $\frac{1}{(1+a^2) \cosh y} + \frac{1}{(1+9a^2) \cosh 3y} + \frac{1}{(1+25a^2) \cosh 5y} + \dots$
 $= \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{x}}{1 + (\frac{a}{2})^2} + \frac{(\frac{a}{2})^2 x}{1 + (\frac{a}{2})^2} + \frac{(\frac{a}{2})^4 x^2}{1 + (\frac{a}{2})^2} + \frac{(\frac{a}{2})^6 x^3}{1 + (\frac{a}{2})^2} + \dots$
 a being any quantity.

(4) $\text{If } u = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{1} + \frac{x^{10}}{1} + \frac{x^{11}}{1} + \frac{x^{20}}{1} + \dots$
 and $v = \frac{5x}{1} + \frac{x}{1} + \frac{x^4}{1} + \frac{x^3}{1} + \dots$
 then $v^5 = u \cdot \frac{1-9u+4u^2-3u^3+u^4}{1+3u+4u^2+9u^3+u^4}$.

(5) $\frac{1}{1} + \frac{e^{-2\pi}}{1} + \frac{e^{-4\pi}}{1} + \frac{e^{-6\pi}}{1} + \dots = \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \sqrt{\frac{1+1}{2}} \right) \sqrt[5]{e^{\pi}}$

(6) $\frac{1}{1} + \frac{e^{-\pi}}{1} + \frac{e^{-2\pi}}{1} + \frac{e^{-3\pi}}{1} + \dots = \left(\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} - \sqrt{\frac{5-1}{2}} \right) \sqrt[5]{e^{\pi}}$

(7) $\frac{1}{1} + \frac{e^{-\pi\sqrt{n}}}{1} + \frac{e^{-2\pi\sqrt{n}}}{1} + \frac{e^{-3\pi\sqrt{n}}}{1} + \dots$ can be exactly found if n be any positive rational quantity.

La página nueve de la primera carta que Ramanujan escribió a Hardy (Cambridge University Library).

y conjeturó en su artículo más famoso, [R-1], que

$$(1) \quad \tau(nm) = \tau(n) \tau(m) \text{ si } m \text{ y } n \text{ son enteros relativamente primos,}$$

$$(2) \quad |\tau(p)| \leq 2 p^{\frac{11}{2}} \text{ para todo primo } p.$$

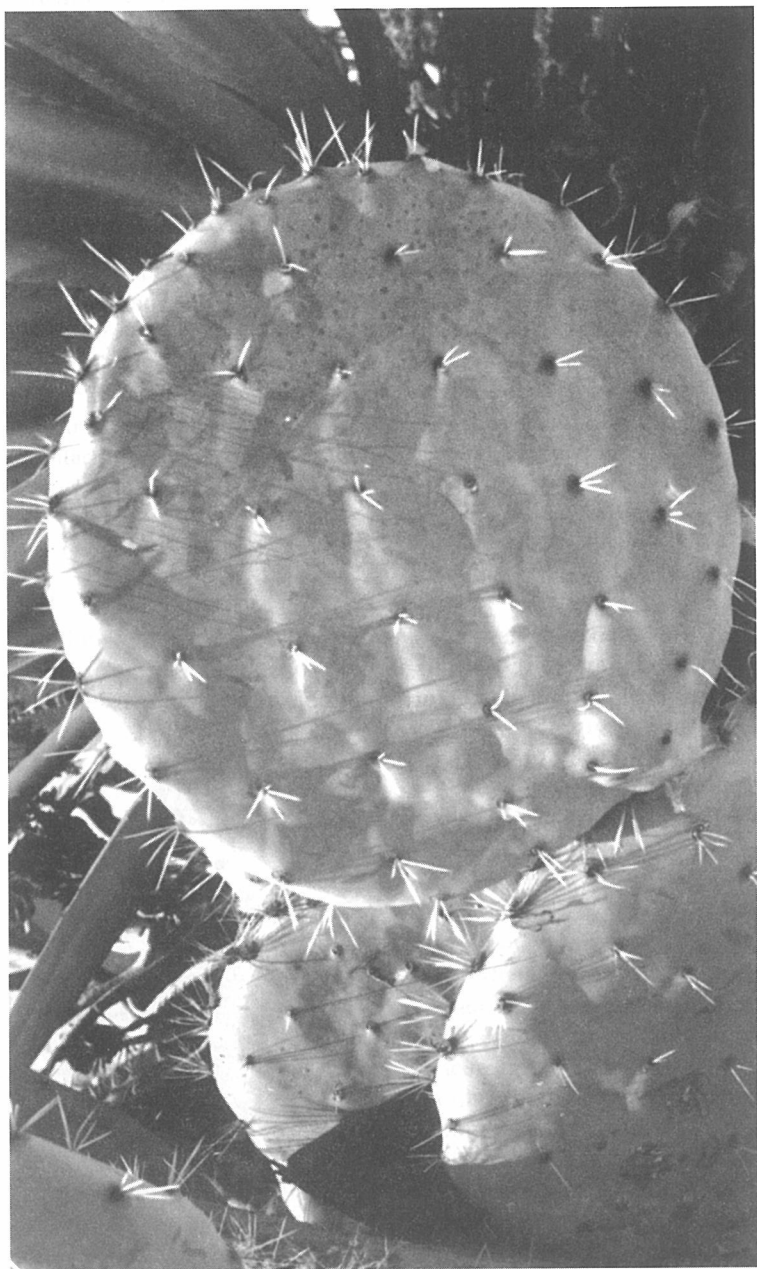
Mordell demostró (1) en 1928, y Deligne (2) en 1974 como consecuencia de su demostración de las conjeturas de Weil. De hecho, Deligne obtiene su resultado haciendo uso de las propiedades de la estructura algebraica asociada a la serie infinita $\sum \tau(n) q^n$.

Bibliografía básica

- [H] Hardy, G. H.: *Ramanujan. Twelve lectures on subjects suggested by his life and work*, Cambridge U. Press, 1940.
- [R-1] Ramanujan, S.: *On certain arithmetical functions*, Trans. Camb. Phil. Soc., n.º 22 (1916), pp. 159-184.
- [R-2] — *Some properties of $p(n)$, the number of partitions of n* , Proc. Cam. Phil. Soc., n.º 19 (1919), pp. 207-210.
- [R-3] — *Notebooks*, Vols. I y II, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1957.
- [R-4] — *Letters and Commentary*, B. C. Berndt, R. A. Rankin eds., Affiliated East West Press Pvt., Special Indian Edition, Nueva Delhi, 1997.
- [R-5] — y G. H. Hardy: *Une formule asymptotique pour le nombre des partitions de n* , CRAS, n.º 164 (1917), pp. 36-38.
- [Ra] *Ramanujan Revisited*, Proceedings of the Centenary Conference (eds. G. E. Andrews, R. A. Askey, B. C. Berndt, K. G. Ramanathan, R. A. Atkin). University of Illinois at Urbana-Champaign, 1987.
- [Rg] anganathan, S. R.: *Ramanujan: The Man and the Mathematician*, Asia Publishing House, Bombay, 1967.
- [W-1] Weil, A.: *Mathematics in India*, Oeuvres Scientifiques, Vol I.
- [W-2] — *Two lectures in Number Theory, past and present*, Oeuvres Scientifiques Vol III.

Bibliografía suplementaria

- [Ch] Chowla, S.: "The Riemann Hypothesis and Hilbert's Tenth Problem". *Mathematics and Its Applications* 4, Gordon and Breach Science Publishers, Nueva York, 1965.
- [D] Deshouillers, J. M.: "Waring's Problem and the Circle Method", en *Number Theory and its Applications* (R. Mollin ed.). Kluwer Academic Publishers, 1989.
- [G] Goldstein, C.: *Introduction to Zeta and L-functions*, en "400 años de matemáticas en torno al Teorema de Fermat" (Andradas y Corrales Rodríguez eds.). Editorial Complutense, Madrid, 1999.
- [M-1] Ram Murty, M.: *A Motivated Introduction to the Langlands Program*, in *Advances in Number Theory* (Guvea y Yui eds.). Oxford Science Publications, 1993, pp. 37-66.
- [M-2] — y V. Kumar Murty: "Non-vanishing of L-functions and Applications". *Progress in Mathematics* 157. Birkhäuser, 1997.



Círculo espinoso
Luis Balbuena

