

**El lamentable estado de las
matemáticas en España:
Semejanza de triángulos
Teorema de Tales
Teoremas del Cateto y la Altura**

Miguel Galo Fernández

23 de febrero de 2019

Índice de Contenidos

1. Introducción	3
2. Teorema del seno	3
3. Teorema del coseno	4
4. Triángulos semejantes	5
5. Criterios de semejanza	7
6. Teorema de Tales	9
7. Segundo Teorema de Thales	10
8. Identificar lados y ángulos homólogos en triángulos semejantes	11

1. Introducción

Exponer el Teorema de Tales en la Enseñanza Primaria o en la ESO, justificando todas las afirmaciones que se puedan hacer, es muy farragoso y siempre queda algo que, por extenso o por intuitivo, no está bien argumentado. En Primaria supongo que sería muy arriesgado intentar utilizar métodos deductivos, seguro que alguien que conociera el perfil medio de un alumnos de 6º de Primaria diría que no es el momento de tales consideraciones. Voy a intentar desarrollar el Teorema de Tales con argumentos bien armados. Supongo que el lector posee conocimientos básicos sobre vectores y trigonometría.

2. Teorema del seno

Sea un triángulo cualquiera como el que muestra la figura:

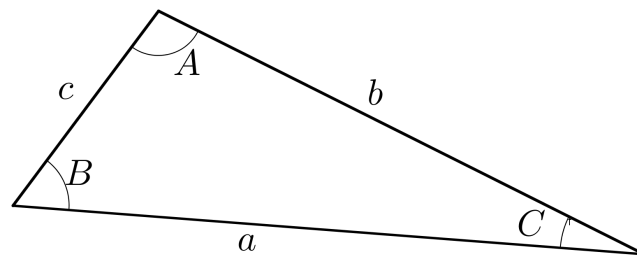
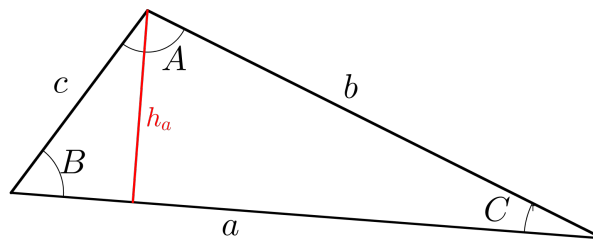


Figura 1: Teorema del seno

Entonces
$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

Demostración:

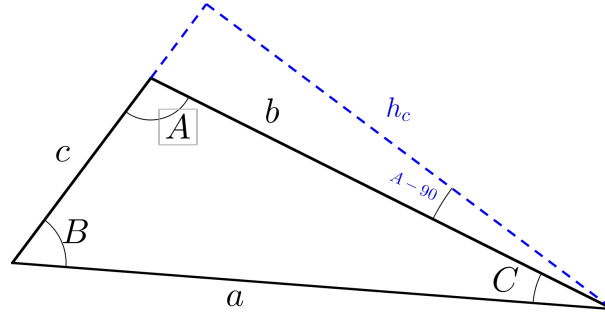
Trazamos la altura h_a del lado a:



Teniendo en cuenta que hemos dividido el triángulo en dos triángulos rectángulos, se obtiene que:

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{sen} B = \frac{h_a}{c} \Rightarrow h_a = c \operatorname{sen} B \\ \operatorname{sen} C = \frac{h_a}{b} \Rightarrow h_a = b \operatorname{sen} C \end{array} \right\} \Rightarrow h_a = b \operatorname{sen} C = c \operatorname{sen} B \Rightarrow \boxed{\frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} (*)}$$

Trazamos ahora la altura correspondiente al lado c y procedemos de igual forma obteniendo:



$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sen} B &= \frac{h_c}{a} \Rightarrow h_c = a \operatorname{sen} B \\ \cos(A - 90) &= \operatorname{sen} A = \frac{h_c}{b} \Rightarrow h_c = b \operatorname{sen} A \end{aligned} \right\} \Rightarrow h_c = b \operatorname{sen} A = a \operatorname{sen} B \Rightarrow \boxed{\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} (**)}$$

Si encadenamos las expresiones (*) y (**) resulta $\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$

3. Teorema del coseno

Sea el triángulo:

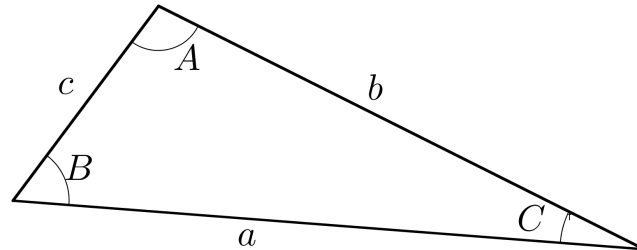


Figura 2: Teorema del coseno

Entonces se verifica que $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$

Demostración:

Hacemos una interpretación vectorial del triángulo anterior, como se indica en la figura 3. Queda claro que $|\vec{a}| = a$, $|\vec{b}| = b$, $|\vec{c}| = c$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = C$, $\angle(\vec{a}, \vec{c}) = B$, $\angle(\vec{b}, \vec{c}) = A$. Se verifica la igualdad $\vec{b} = \vec{a} - \vec{c}$. El producto escalar del vector $\vec{b}$ por sí mismo genera la igualdad $\vec{b} \cdot \vec{b} = (\vec{a} - \vec{c}) \cdot (\vec{a} - \vec{c})$. Desarrollando esta igualdad tenemos: $\vec{b} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{c} - 2\vec{a} \cdot \vec{c}$. Como $\vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{b}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(0) = b^2$, $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos(0) = a^2$, $\vec{c} \cdot \vec{c} = |\vec{c}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos(0) = c^2$, y además también se cumple que $\vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{a}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos(B)$, sustituyendo estos valores en $\vec{b} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{c} - 2\vec{a} \cdot \vec{c}$ se obtiene la igualdad que queremos demostrar $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$

De manera análoga se podría demostrar cada una de las siguiente igualdades:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

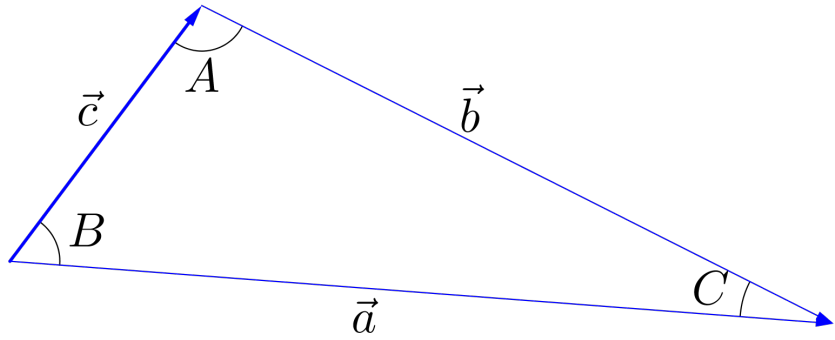


Figura 3: Teorema del coseno

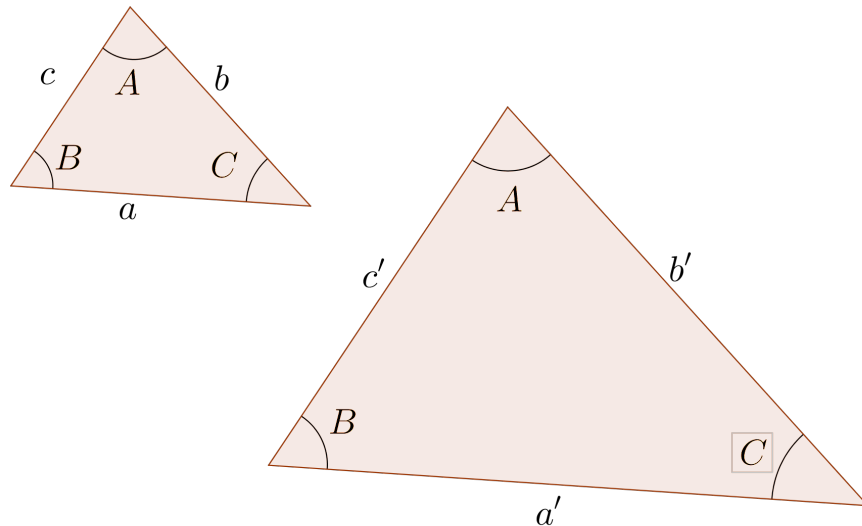
4. Triángulos semejantes

Teorema 1 *Dos triángulos tienen ángulos iguales si y solo si sus lados son proporcionales.*

Demostración:

Sea P la proposición $P \equiv$ Los triángulos tienen los ángulos iguales, sea Q la proposición $Q \equiv$ los triángulos tienen los lados proporcionales. Entonces hemos de demostrar que $P \Rightarrow Q$ y que $Q \Rightarrow P$

$P \Rightarrow Q$) Supongamos que los dos triángulos tienen los ángulos iguales como se muestra en la figura a continuación:



Si aplicamos el teorema del seno a ambos triángulos obtenemos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} = K$$

$$\frac{a'}{\operatorname{sen} A} = \frac{b'}{\operatorname{sen} B} = \frac{c'}{\operatorname{sen} C} = L$$

De las igualdades anteriores se obtiene que:

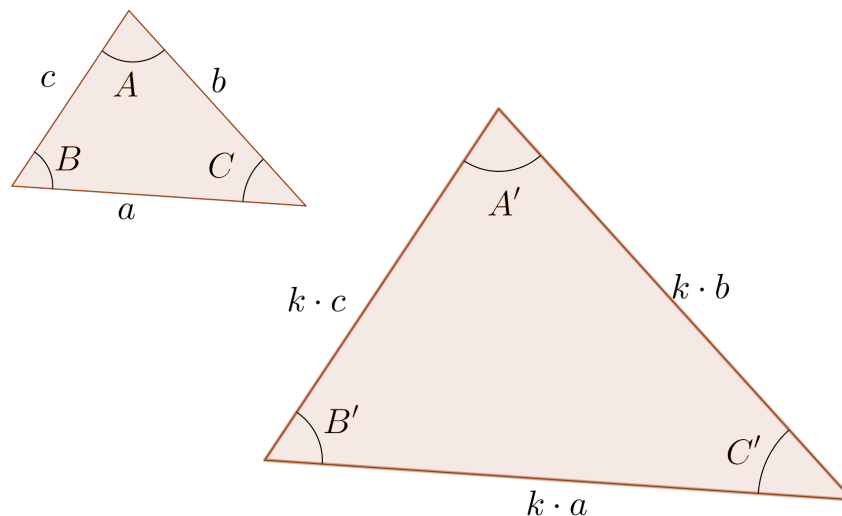
$$\operatorname{sen} A = \frac{a}{K} = \frac{a'}{L} \Rightarrow \frac{a'}{a} = \frac{L}{K} = r \Rightarrow \boxed{a' = a \cdot r}$$

$$\operatorname{sen} B = \frac{b}{K} = \frac{b'}{L} \Rightarrow \frac{b'}{b} = \frac{L}{K} = r \Rightarrow \boxed{b' = b \cdot r}$$

$$\operatorname{sen} C = \frac{c}{K} = \frac{c'}{L} \Rightarrow \frac{c'}{c} = \frac{L}{K} = r \Rightarrow \boxed{c' = c \cdot r}$$

Queda demostrado que los lados son proporcionales.

$Q \Rightarrow P$) Supongamos que los dos triángulos tienen los lados proporcionales como se muestra en la figura a continuación:



Si aplicamos el teorema del coseno al triángulo grande obtenemos:

$k^2 a^2 = k^2 b^2 + k^2 c^2 - 2k^2 bc \cos A'$. Si dividimos por k^2 todos los términos $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A'$. Pero el teorema del coseno aplicado al triángulo pequeño establece que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, por tanto $b^2 + c^2 - 2bc \cos A' = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow \cos A = \cos A'$. Se pueden dar dos casos:

- a) Que $A' = A$ en este caso quedaría probado lo que se pretendía.
- b) Que $A' = 360 - A \Rightarrow A' > 180$, al ser $A < 180$, lo cual es imposible.

De manera análoga se demostraría que $B' = B$ y que $C' = C$

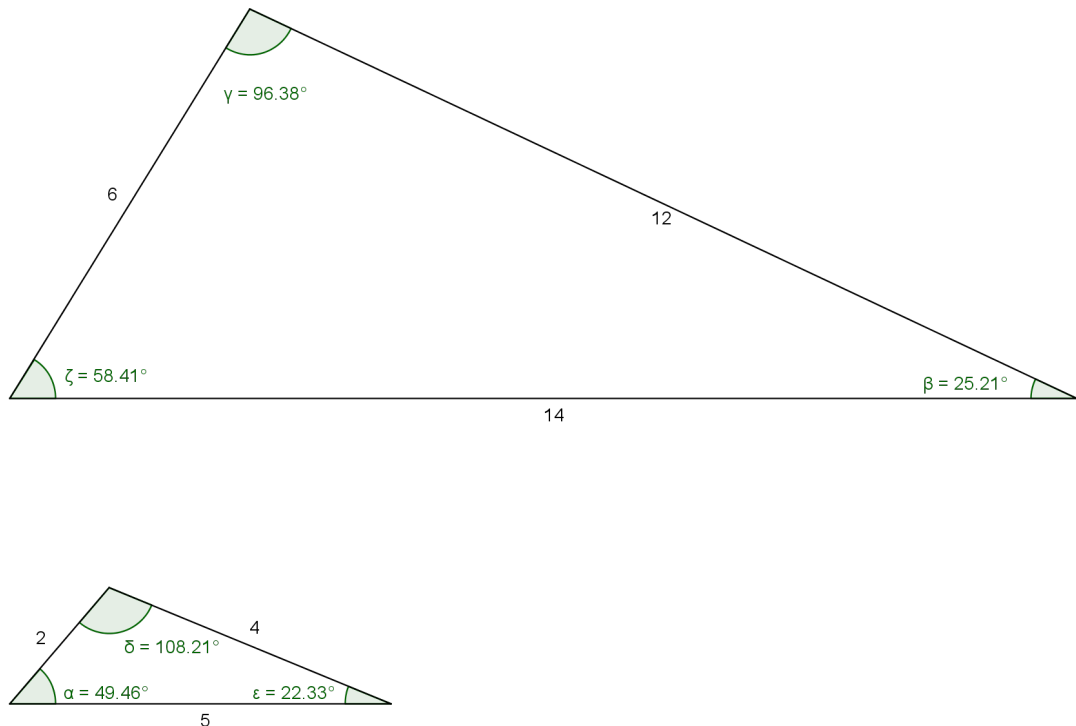
En resumen, este teorema lo que establece es que es lo mismo decir, en dos triángulos cualesquiera, que sus lados son proporcionales o que sus ángulos son iguales. Este resultado nos permite dar la siguiente definición:

Definición: Dos triángulos son semejantes si tienen sus ángulos iguales o sus lados proporcionales.

5. Criterios de semejanza

Criterio LLL Dos triángulos son semejantes si sus lados son proporcionales

Criterio AA Dos triángulos son semejantes si tienen dos de sus ángulos iguales. Esto se debe a que en el triángulo, si tenemos dos de sus ángulos podemos identificar el tercer ángulo ya que los tres deben sumar 180° . ¿Ocurre esto también con sus lados, es decir si dos de sus lados son proporcionales los otros también lo son? La respuesta es negativa, basta con observar el gráfico siguiente que puede servir de contraejemplo:



Criterio LAL Dos triángulos son semejantes si tienen dos de sus lados proporcionales y el ángulo entre estos lados es igual en ambos triángulos.

Demostración:

Si nos fijamos en la 4, bastaría con probar que $x = k \cdot a$. Aplicamos el teorema del coseno en el triángulo grande obteniendo $x^2 = k^2 b^2 + k^2 c^2 - 2k^2 bc \cos A$. Dividiendo todo por k^2 obtenemos $\frac{x^2}{k^2} = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$. Si aplicamos el teorema del coseno al triángulo pequeño $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow \left(\frac{x}{k}\right)^2 = a^2 \Rightarrow \frac{x}{k} = a \Rightarrow x = k \cdot a$ (el signo menos no tiene sentido en este contexto, se trata de la longitud del lado de un triángulo).

A continuación, para finalizar, veremos el teorema de Tales como un caso particular de la semejanza de triángulos. Para ello necesitamos un resultado de la semejanza de triángulos que veremos ahora

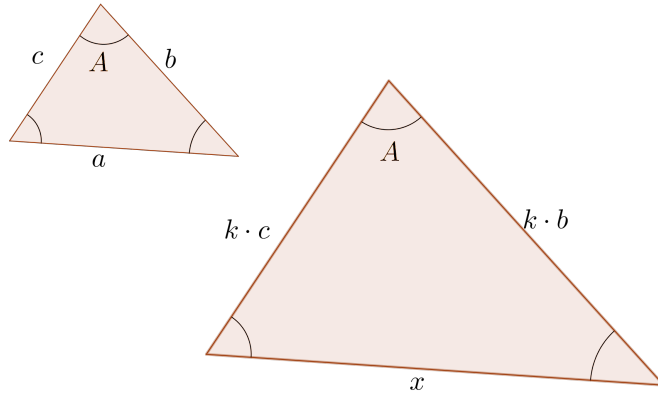
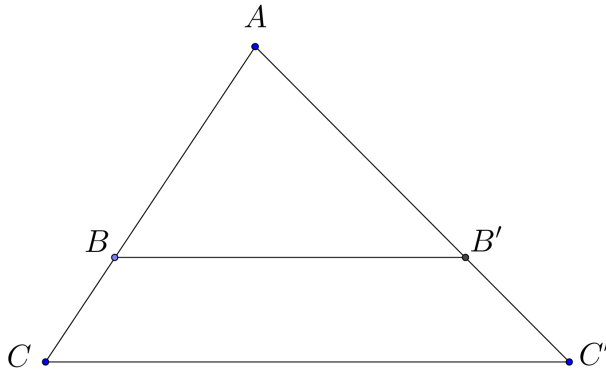


Figura 4: Criterio LAL

Teorema 2 Sea la configuración dada en la figura:



Donde el segmento $\overline{BB'}$ es paralelo al segmento $\overline{CC'}$. Entonces se verifica que $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{B'C'}}$

Demostración:

Por la condición de paralelismo de los segmentos $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ los ángulos de la figura son los que muestran en la figura 5. Los triángulos $\widehat{CAC'}$ y $\widehat{BAB'}$ son semejantes y por tanto sus lados son proporcionales, es decir que $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AB'}} \Rightarrow \frac{\overline{AB} + \overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB'} + \overline{B'C'}}{\overline{AB'}} \Rightarrow 1 + \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = 1 + \frac{\overline{B'C'}}{\overline{AB'}} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{B'C'}}$

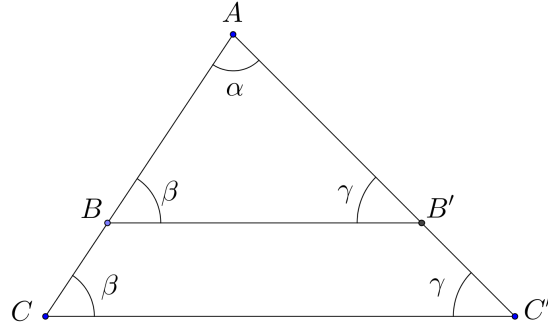
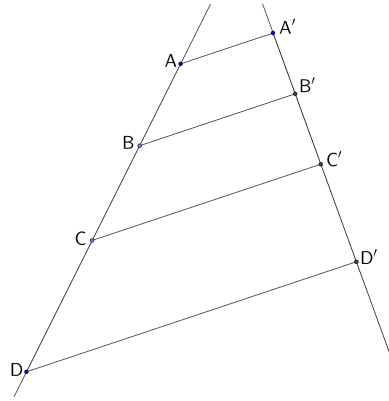


Figura 5: Lema para teorema de Tales

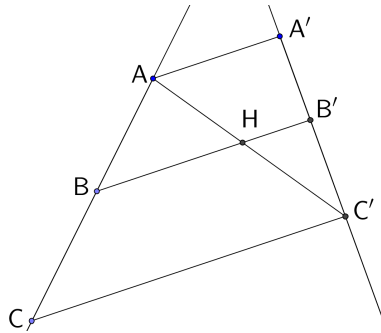
6. Teorema de Tales

Si dos rectas secantes se cortan por dos rectas paralelas entonces los segmentos que determinan las paralelas en una de las secantes son proporcionales a los segmentos correspondientes de la otra secante, en el caso de la configuración de la siguiente gráfica:



El Teorema de Tales establece que $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$, o también podríamos expresarlo en estos términos $\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{C'D'}}$, hay muchas combinaciones.

Demostración:

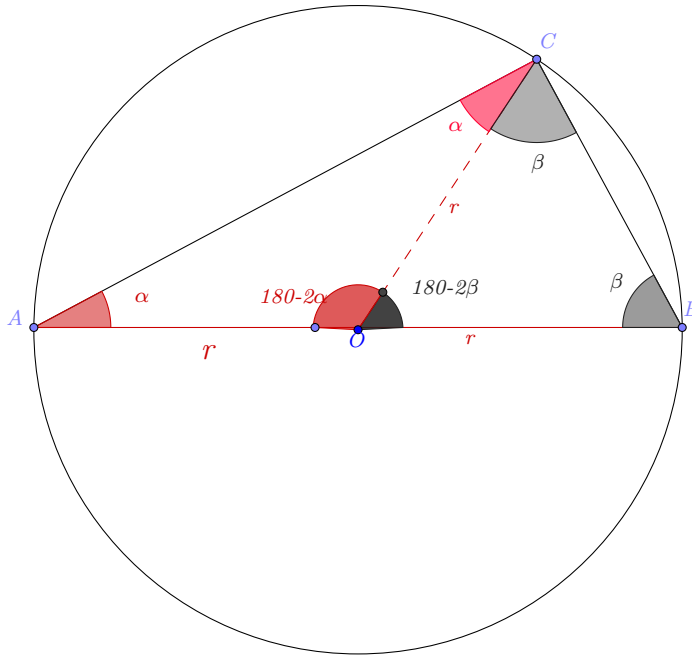


La recta que pasa por A y C' corta a la que pasa por B y B' en un punto H. Consideremos el triángulo $\widehat{CAC'}$ y $\widehat{BAH}$. Si aplicamos el teorema anterior obtenemos $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{HC'}}$ (*). Si ahora tomamos los triángulos $\widehat{AC'A'}$ y $\widehat{HC'B'}$ y aplicamos otra vez el mencionado teorema obtenemos

$\frac{\overline{HC'}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{A'B'}}$ o lo que es lo mismo $\frac{\overline{AH}}{\overline{HC'}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$ (**). Encadenando las expresiones (*) y (**), a esto se le llama propiedad transitiva, se obtiene $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$

7. Segundo Teorema de Thales

Sea $\widehat{ABC}$ un triángulo inscrito en una circunferencia de modo que el lado AB coincide con el diámetro. Entonces el ángulo correspondiente al vértice C es recto.

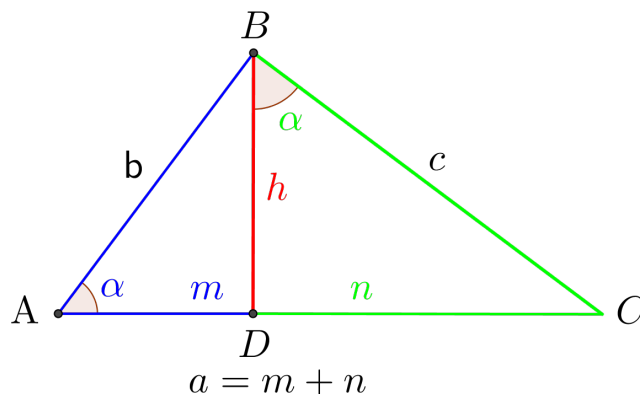


Demostración:

Los triángulos $\widehat{OCB}$ y $\widehat{OAC}$ son isósceles. Si nos fijamos en la figura anterior observamos que $180 - 2\alpha = 180 - (180 - 2\beta) \Rightarrow 2\alpha + 2\beta = 180 \Rightarrow \alpha + \beta = 90$

8. Identificar lados y ángulos homólogos en triángulos semejantes

Consideremos la siguiente configuración:



Los segmentos b y c son perpendiculares, de modo que el triángulo $\widehat{ABC}$ es rectángulo, h es la altura sobre la hipotenusa a . Los segmentos m y n son, respectivamente, las proyecciones ortogonales de los catetos b y c sobre la hipotenusa a . Observemos que los triángulos $\widehat{ABC}$, $\widehat{ADB}$ y $\widehat{BDC}$ son semejantes ($\sim$):

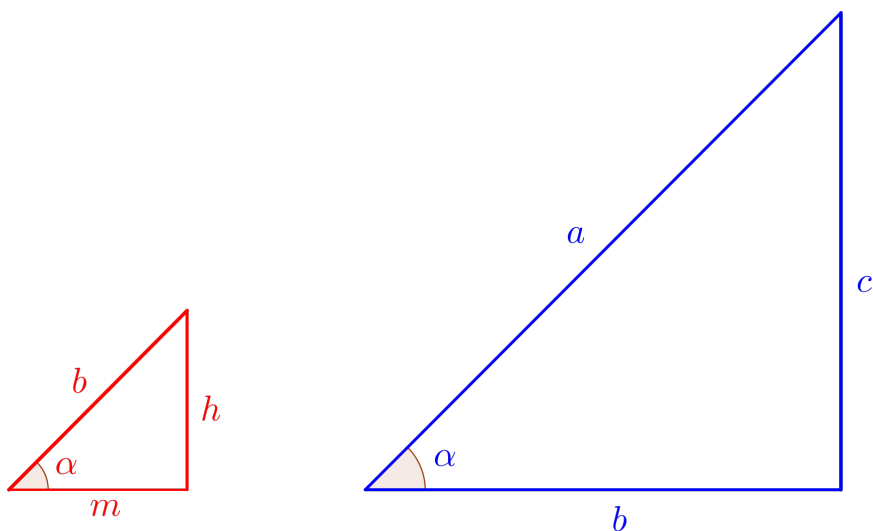
$$\left. \begin{array}{l} \widehat{ADB} \\ \widehat{BDC} \end{array} \right\} \sim \widehat{ABC} \text{ porque tienen dos ángulos iguales (criterio de semejanza AA)}$$

$\widehat{ADB} \sim \widehat{BDC}$ por tener dos ángulos iguales (criterio de semejanza AA).

¿Cuales son los lados homólogos (lados proporcionales) en los triángulos semejantes anteriores?

Triángulo $\widehat{ADB}$	Homólogo en triángulo $\widehat{ABC}$
Hipotenusa b	hipotenusa a
Cateto contiguo al ángulo $\alpha \mapsto m$	Cateto contiguo al ángulo $\alpha \mapsto b$
Cateto opuesto al ángulo $\alpha \mapsto h$	Cateto opuesto al ángulo $\alpha \mapsto c$

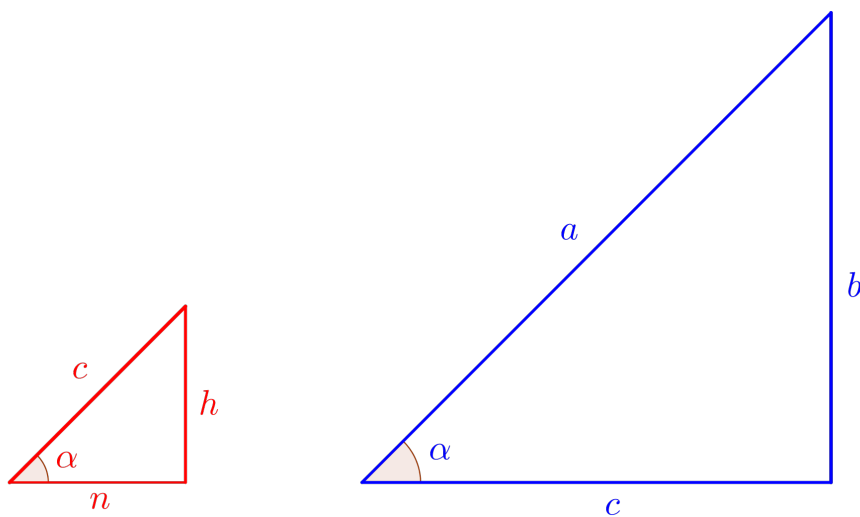
Gráficamente, la tabla anterior corresponde al gráfico siguiente:



Por semejanza de triángulos se verifica que $\frac{b}{m} = \frac{a}{b} \Rightarrow b^2 = a \cdot m$ a esto se le conoce con el nombre de Teorema del Cateto.

Triángulo $\widehat{BDC}$	Homólogo en triángulo $\widehat{ABC}$
Hipotenusa c	hipotenusa a
Cateto contiguo al ángulo $\alpha \mapsto n$	Cateto contiguo al ángulo $\alpha \mapsto c$
Cateto opuesto al ángulo $\alpha \mapsto h$	Cateto opuesto al ángulo $\alpha \mapsto b$

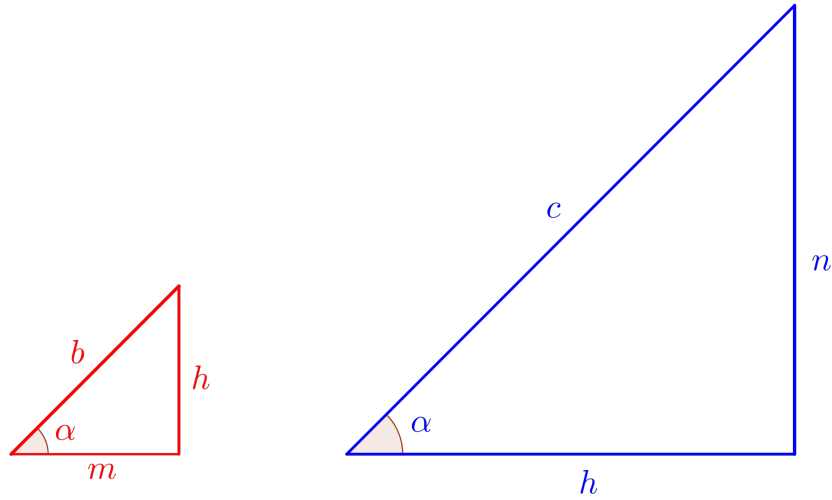
Gráficamente, la tabla anterior corresponde al gráfico siguiente:



Por semejanza de triángulos se verifica que $\frac{a}{c} = \frac{c}{n} \Rightarrow c^2 = a \cdot n$ a esto también se le conoce con el nombre de Teorema del Cateto.

<i>Triángulo $\widehat{ADB}$</i>	<i>Homólogo en triángulo $\widehat{BDC}$</i>
<i>Hipotenusa b</i>	<i>hipotenusa c</i>
<i>Cateto contiguo al ángulo $\alpha \mapsto m$</i>	<i>Cateto contiguo al ángulo $\alpha \mapsto h$</i>
<i>Cateto opuesto al ángulo $\alpha \mapsto h$</i>	<i>Cateto opuesto al ángulo $\alpha \mapsto n$</i>

Gráficamente, la tabla anterior corresponde al gráfico siguiente:



Por semejanza de triángulos se verifica que $\frac{h}{m} = \frac{n}{h} \Rightarrow h^2 = m \cdot n$ a esto también se le conoce con el nombre de Teorema de la altura.