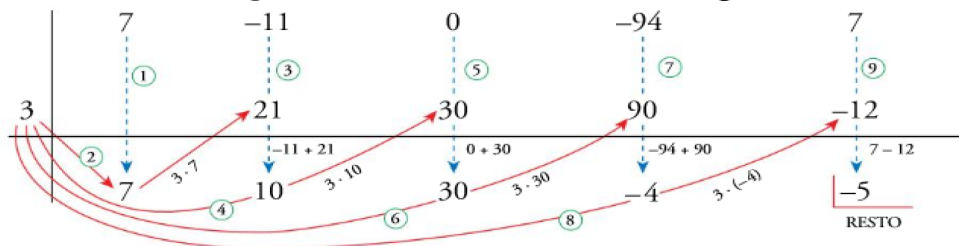


Me comentaba un alumno de 3º de E.S.O. que hoy le habían explicado la Regla de Ruffini, que el desarrollo efectuado no lo entendía con claridad, el profesor se había limitado a seguir el libro. Utilizan un texto Anaya, en concreto Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas 3. ESO. Introduce la mencionada regla planteando la división $(7x^4 - 11x^3 - 94x + 7) : (x - 3)$. A continuación se explica como se aplica el algoritmo:

La división anterior se puede hacer, sintéticamente, del siguiente modo:



COCIENTE: 7 10 30 -4 → significa: $7x^3 + 10x^2 + 30x - 4$

RESTO: -5

Los pasos numerados en verde son los que se dan en la división de arriba.

Este método en el que solo intervienen los coeficientes y solo se realizan las operaciones que realmente importan, se llama *regla de Ruffini*.

La **regla de Ruffini** sirve para dividir un polinomio por $x - a$. Las operaciones (sumas y multiplicaciones por a) se realizan una a una. Se obtienen, así, los coeficientes del cociente y el resto de la división.

En el texto se afirma que una de las principales utilidades de la Regla de Ruffini es la factorización de polinomios, pero no se dice en que consiste este proceso. Se da, a modo de ejemplo, una definición de divisibilidad de polinomios diciendo que esto se produce cuando el resto es cero. Implícitamente y sin mencionarlo se da una descomposición factorial del polinomio mediante la expresión $P(x) = (x - 1)(x^2 + x - 12)$.

Colocamos los coeficientes en fila, teniendo en cuenta que falta el término en x^2 , por lo que añadimos un 0 en el lugar correspondiente.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -13 & 12 \\ 1 & & 1 & 1 & -12 \\ \hline & 1 & 1 & -12 & 0 \end{array}$$

COCIENTE: 1 1 -12, que corresponde a: $x^2 + x - 12$ RESTO: 0

Por tanto, $P(x) = (x - 1)(x^2 + x - 12)$.

Como el resto es 0, podemos decir que el polinomio $P(x)$ es divisible por $Q(x)$.

Para finalizar la referencia a la Regla de Ruffini se da una regla muy importante, a modo de receta del Master Chef. Es la siguiente:

Regla importante. Si los coeficientes de un polinomio son números enteros, las raíces de dicho polinomio son divisores (positivos o negativos) de su término independiente, el que no lleva x . (Esta regla se justificará en el curso próximo).

En este polinomio, $x^3 - 4x^2 + x + 6$, el término independiente es 6. Sus divisores son 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6 y -6. Empezamos probando por los más sencillos:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & 1 & -3 & -2 \\ \hline & 1 & -3 & -2 & 4 \end{array} \quad \boxed{1 \text{ no es raíz.}} \quad \begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array} \quad \boxed{-1 \text{ sí es raíz.}}$$

Por tanto, la división es exacta y se cumple que $P(x) = (x + 1) \cdot (x^2 - 5x + 6)$.

Ahora buscamos los divisores de $x^2 - 5x + 6$. Probamos con -1 y vemos que ya no es raíz. Probamos luego con 2 y vemos que sí es raíz.

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 1 & -5 & 6 \\ & & 2 & -6 \\ \hline & 1 & -3 & 0 \end{array}$$

Entonces, $(x^2 - 5x + 6) = (x - 2)(x - 3)$

Por tanto, $P(x) = (x + 1)(x^2 - 5x + 6) = (x + 1)(x - 2)(x - 3)$. Esta es la descomposición factorial del polinomio inicial.

Viendo esto, ¿cómo es posible que haya quien se extrañe de lo mal que está la enseñanza?, ¿cómo es posible que ocurran estas cosas en el siglo XXI? Teniendo en cuenta que hay un montón de software que puede calcular sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y factorizaciones de polinomios, ¿por qué no se enseña el manejo de este software en vez de las típicas matemáticas algorítmicas de lápiz y papel?. Con ninguno de los dos métodos el alumno se va a enterar de lo que está haciendo, la ventaja de utilizar software en vez de lápiz y papel está en la rapidez, economía, etc. Aun se atreve el autor del texto (¡hay que tener poca vergüenza!) a decir que la receta se justificará en el próximo curso, ¿qué razones hay para ello? ¿por qué no se justifica ya? ¿se están enseñando dogmas o matemáticas? Pero el profesor tampoco se calentó la cabeza, una de dos, o sus conocimientos en la materia son tan escasos que no traspasan el umbral de la memoria algorítmica, o su vagancia y desinterés le impide ser honrado cuando debe de cumplir el deber sagrado de transmitir a los alumnos conocimientos verdaderos y fundamentados.

Para justificar mi enfado voy a demostrar que se puede hacer todo lo anterior de forma razonada, transmitiendo conocimiento y no historietas memorísticas que más pronto que tarde el alumno olvidará, acabando los cuentos que le hayan podido contar en la clase de matemáticas a donde van todos los de este tipo, a la ciénaga de los despojos.

Antes de comenzar con la Regla de Ruffini necesito establecer el principio de identidad de dos polinomios: Dos polinomios son iguales cuando tienen el mismo grado y cuando los coeficientes de los términos del mismo grado también son iguales, es decir, $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0 \Leftrightarrow n = m, a_i = b_i, \forall i = 0, 1 \dots n$

1. Algoritmo de la Regla de Ruffini

Lo que pretendemos es dividir el polinomio $P(x)$ por $x - a$ para un determinado valor $a \in \mathbb{R}$. Efectuar esta operación consiste en hallar un polinomio $Q(x)$ y un valor $r \in \mathbb{R}$ de modo que se verifique $P(x) = (x - a)Q(x) + r$. Es evidente que el grado de Q ha de ser igual al grado de P menos uno. Para fijar ideas supongamos que P es un polinomio de grado 3, $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, conocemos los coeficientes de este polinomio y el valor a . El Polinomio Q , que desconocemos, tendrá grado 2, $Q(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$, tampoco conocemos el valor r . Tenemos la ecuación $(x - a)(b_2x^2 + b_1x + b_0) + r = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Si desarrollamos el producto y lo ordenamos se obtiene $b_2x^3 + (b_1 - ab_2)x^2 + (b_0 - ab_1)x + (r - ab_0) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, identificando los polinomios de la izquierda y derecha obtenemos los coeficientes de Q y el valor r : $b_2 = a_3$, $b_1 - ab_2 = a_2 \Rightarrow b_1 = a_2 + ab_2$, $b_0 - ab_1 = a_1 \Rightarrow b_0 = a_1 + ab_1$, $r - ab_0 = a_0 \Rightarrow r = a_0 + ab_0$. Esto es lo mismo que lo que hacemos con la regla de Ruffini según recoge la siguiente tabla

	a_3	a_2	a_1	a_0
a		ab_2	ab_1	ab_0
	$a_3 = b_2$	$b_1 = a_2 + ab_2$	$b_0 = a_1 + ab_1$	$r = a_0 + ab_0$

Podría parecer que esto es arduo tal y como se expresa en el texto, nada más allá de la realidad, en una pizarra interactuando con los alumnos se hace sencillo. La gran ventaja es que el algoritmo es entendible a diferencia de lo que hace el texto. Ahora podemos generalizar el algoritmo de la regla de Ruffini al caso de orden n , si la división $(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0) : (x - a)$ tiene por cociente $b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_1x + b_0$ y por resto r , entonces $b_{n-1} = a_n$, $b_{n-2} = a_{n-1} + ab_{n-1}$, $\dots$, $b_h = a_{h+1} + ab_{h+1}$, $\dots$, $r = a_0 + ab_0$. Resumiendo, el algoritmo de la Regla de Ruffini es un método para obtener el cociente y el resto de un polinomio $P(x)$ al ser dividido por $x - a$, no tiene por tanto más transcendencia.

2. Factorización de un polinomio

Factor es un número o una expresión que multiplica. Factorizar un polinomio consiste en expresarlo como producto de otros polinomios. Por ejemplo el polinomio $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ se puede expresar como $P(x) = (x - 3)(x^2 - x - 2)$ o bien como $P(x) = (x + 1)(x^2 - 5x + 6)$. También es cierto que $P(x) = (x - 3)(x - 2)(x + 1)$. Estas tres formas son modos de expresar el polinomio $P(x)$ como producto de dos o más polinomios, es decir que hemos presentado tres factorizaciones del polinomio. Con esto podemos afirmar que la factorización de un polinomio no es única. De las factorizaciones de un polinomio la más interesante es aquella que tiene por factores polinomios del menor grado posible y esta factorización si es única.

3. Raíces de un polinomio

Se dice que $x = a$ es una raíz del polinomio $P(x)$ si se verifica que $P(a) = 0$. Por ejemplo $x = -1$ es raíz del polinomio $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ ya que $P(-1) = (-1)^3 - 4(-1)^2 - 1 + 6 = 0$. Una raíz de un polinomio es un valor de x para el cual se anula el polinomio.

Teorema fundamental del álgebra.- Todo polinomio $P(x)$ de grado n tiene a lo sumo n raíces reales.

4. Teorema del resto

El resto al dividir un polinomio por $x - a$ es el valor numérico del polinomio en $x = a$, es decir el resto de la división $P(x)$ por $x - a$ es $r = P(a)$

Demostración

Sea $Q(x)$ el cociente de la división y r el resto de la división $P(x) : (x - a)$. Según el algoritmo de la división $P(x) = (x - a)Q(x) + r$ y para $x = a$ tenemos $P(a) = (a - a)Q(a) + r \Rightarrow r = P(a)$

5. Relación entre divisibilidad y raíces de un polinomio

Según el Teorema del Resto, si el polinomio $P(x)$ es divisible por $x - a$ el resto de la división, que es $P(a)$ ha de ser cero $P(a) = 0$. Se tiene que es equivalente decir que $x = a$ es una raíz de $P(x)$ y que este polinomio es divisible por $x - a$. En este caso, según el algoritmo de la división, $P(x) = (x - a)Q(x)$, donde $Q(x)$ es el cociente y se ha omitido sumar el resto ya que este es cero. Tenemos pues una primera factorización del polinomio. Si a su vez $x = b$ es una raíz de $Q(x)$ y $Q'(x)$ es el cociente de dividir $Q(x)$ entre $x - b$ tendríamos $Q(x) = (x - b)Q'(x)$, hemos obtenido una segunda factorización del polinomio $P(x) = (x - a)(x - b)Q'(x)$. Siguiendo este procedimiento podemos factorizar el polinomio. Llegados a este punto nos surge el problema de calcular las raíces de $P(x)$, ¿cómo calculamos la raíces del polinomio? Esto no es fácil. El siguiente teorema nos facilita la búsqueda de raíces enteras del polinomio.

6. Teorema(raíces enteras del polinomio)

Sea el polinomio con coeficientes enteros $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ y sea $x = a$ una raíz entera. Entonces a es un divisor del término independiente a_0 .

Demostración

Como $P(a) = 0 \Rightarrow a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} + \dots + a_1 a + a_0 = 0$. Sacando factor común a tenemos $a(a_n a^{n-1} + a_{n-1} a^{n-2} + \dots + a_1) + a_0 = 0 \Rightarrow a_0 = -a(a_n a^{n-1} + a_{n-1} a^{n-2} + \dots + a_1)$. Por tanto $\frac{a_0}{a} = -(a_n a^{n-1} + a_{n-1} a^{n-2} + \dots + a_1)$ lo cual quiere decir que a es un divisor de a_0 .

7. Conclusión

La superficialidad y el poco rigor con el que se tratan temas básicos de matemáticas, hacen que no se transmita conocimiento cuando se expone a los alumnos temas matemáticos en los términos que hemos relatado al principio. En nuestro mundo no es conocimiento aprender las destrezas para manejar un algoritmo con lápiz y papel, como puede ser el de la Regla de Ruffini, sin tener la más mínima idea de lo que se está haciendo. Tampoco lo sería si se escogiera en vez de lápiz y papel software. Esto son meras técnicas de cálculo. Si se trata de calcular, por el mero hecho de

calcular raíces o descomposición factorial de polinomios, es más rápido y económico hacerlo con un programa informático (por ejemplo Geogebra, software libre y gratuito) o incluso accediendo online a páginas web que tratan el tema (por ejemplo <https://es.symbolab.com/solver/polynomial-calculator>). El alumno, sin otro tipo de información, no sabría lo que está haciendo pero va rápido en su objetivo que es el cálculo. Para conseguir conocimiento hay que conocer los objetos matemáticos, no quedarse tan solo en la fase de la manipulación. No es interesante que el alumno sea capaz de realizar una suma, es infinitamente más importante que sepa en qué consiste sumar, esto sí es conocimiento. Otro inconveniente que hay es la falta de preparación del profesorado que imparte la asignatura de matemáticas. Esto es un círculo vicioso, por regla general los profesores de matemáticas que no son matemáticos tienen unos conocimientos algorítmicos de matemáticas. En sus diplomaturas o licenciaturas emplean matemática aplicada sin importarles nada el fundamento y mucho la aplicación del saber matemático. Generalmente en una diplomatura o antigua licenciatura, la carga matemática está entre un 5 y un 10 %. En los niveles iniciales de la enseñanza obligatoria (Educación Primaria), la falta de preparación de los docentes es evidente y la culpa no la tienen ellos, sino unos planes de estudio descerebrados que las autoridades educativas no quieren o no saben cambiar.

Murcia, febrero de 2018
Miguel Galo Fernández