El lamentable estado de las matemáticas en España: funciones cuadráticas

Miguel Galo Fernández

18 de enero de 2019

Índice de Contenidos

1. Introducción **3**

2. La función cuadrática canónica **4**

1. Introducción

En la transmisión de las matemáticas, cuando el docente las expone, debe priorizar la comprensión de los conceptos y el razonamiento, por ese orden. ¿Cómo se enseña Matemáticas? El enfoque más extendido está basado en la repetición y en la memorización. Los alumnos practican y memorizan, muchas veces sin entender las ideas involucradas. El problema es que este enfoque no permite aplicar esos contenidos a la resolución de problemas, que es el donde obtenemos peores resultados en las pruebas internacionales. Esto es tan evidente que puede bastar un ejemplo para corroborarlo. Si elegimos un libro de texto de 3º o 4º de ESO, lo abrimos por las páginas en donde se estudia la parábola se dicen cosas como las siguientes, sin ninguna justificación ni demostración:

- La ecuación cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ tiene como gráfica a una parábola.
- Cada una de estas parábolas tiene un eje de simetría paralelo al eje Y.
- Si dos funciones cuadráticas tienen el mismo coeficiente a las parábolas que las representan son idénticas aunque puedan estar en posiciones distintas.
- Si $a > 0$ la parábola es cóncava (con las ramas hacia arriba).
- Si $a < 0$ la parábola es convexa (con las ramas hacia abajo).
- Si $|a| < |a'|$ la parábola $y = ax^2 + bx + c$ es más abierta que la parábola $y = a'x^2 + b'x + c'$.
- La abcisa del vértice de la parábola que representa a la función cuadrática vale $x_v = \dfrac{-b}{2a}$

Con el recetario anterior, se resuelven repetidamente ejercicios propuestos en el libro y finalizada esta tarea, a otra cosa mariposa, tema siguiente. El recetario que tal vez memorizó el alumno de cara a aprobar un examen, cae en la ciénaga de los despojos en donde todo se olvida. Al cabo de un més los conocimientos que tiene el alumno de funciones cuadráticas son infinitesimales. Esta forma de enseñar es absurda y lo peor es que crea falsas expectativas, un alumno que haya obtenido buenas calificaciones no tiene porqué tener sólidos conocimientos.

En lo que sigue me propongo exponer de forma razonada, definiendo conceptos, el recetario mencionado. De paso también probaré que no es nada difícil el hacerlo, lo cual apostilla con más ahínco la idea mencionada de la enseñanza ineficiente.

2. La función cuadrática canónica

Llamamos función cuadrática canónica a la de ecuación $y = ax^2$, sieno $a \in \mathbb{R}$ un número real cualquiera. Esta ecuación representa a una parábola que tiene el vértice en el punto $(0, 0)$.

Damos una tabla de valores que nos permita representar la función:

x	-2	-1	0	1	2
y	4a	a	0	a	4a

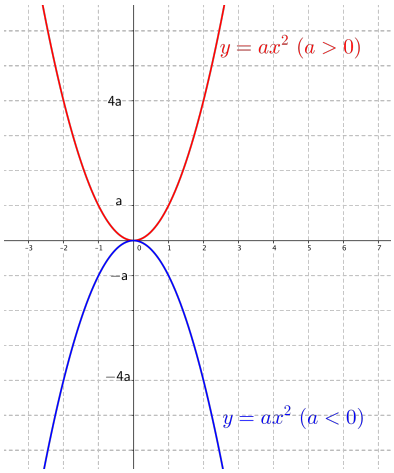


Figura 1: Función cuadrática canónica

Llegados a este punto vamos a definir, con todo el rigor necesario, los conceptos que nos permiten identificar los elementos de una parábola.

1. ¿Qué quiere decir que el eje Y es un eje de simetría de la parábola? Con la terminología actual es lo mismo que decir que la función cuadrática que define la parábola $f(x) = ax^2$ es par, es decir que $f(-x) = f(x) = ax^2$

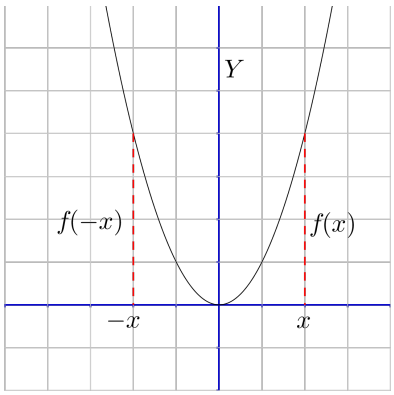


Figura 2: Y es eje de simetría de la parábola

   Intuitivamente, que el eje Y es eje de simetría de la parábola quiere decir que si doblamos la gráfica siguiendo la linea del eje Y, las ramas de la parábola coincidirían.

2. ¿Qué es el vértice de una parábola? Es un punto en donde la parábola alcanza un máximo o un mínimo. En el caso de nuestra parábola $y = ax^2$, si $a > 0$, se cumple que $y > 0$ sea lo que quiera el valor de x, con lo cual $y = 0$ es el menor de los valores que puede

tomar y (mínimo). Para este valor $y = 0$ el valor de x que corresponde es $x = 0$, es decir que $(0, 0)$, el vértice, es un mínimo. Análogamente si $a < 0$, se cumple que $y < 0$ sea lo que quiera el valor de x, con lo cual $y = 0$ es el mayor de los valores que puede tomar y (máximo). Para este valor $y = 0$ el valor de x que corresponde es $x = 0$, es decir que $(0, 0)$, el vértice, es un máximo. También es cierto que el vértice es el punto de la parábola en donde esta pasa de ser cncava a ser convexa o viceversa. Para ver esto, definimos lo que se entiende por concavidad y convexidad.

3. ¿Qué se entiende por concavidad y convexidad? El diccionario de la RAE no es muy afortunado para definir estos conceptos. Según la RAE:

   Concavidad: cualidad de cóncavo. Cóncavo: curvado hacia dentro, como el interior de un cuenco.

   Convexidad: cualidad de cnvexo. Convexo: curvado hacia fuera, como el exterior de un cuenco.

   Me sorprende la RAE, las definiciones las entenderá quien las escribió, si es que las entendió. Veamos una definición más precisa

   Definición de concavidad.- Una curva es cóncava si en cada punto de la curva, la recta tangente queda por debajo de esa curva

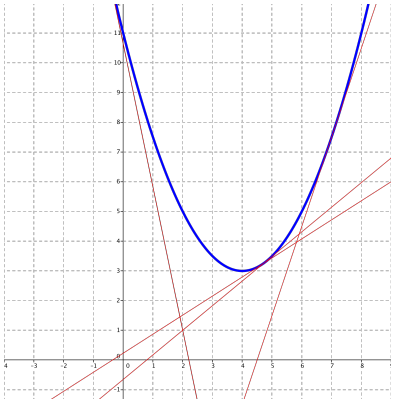


Figura 3: Curva cóncava

Definición de convexidad.- Una curva es convexa si en cada punto de la curva, la recta tangente queda por encima de esa curva

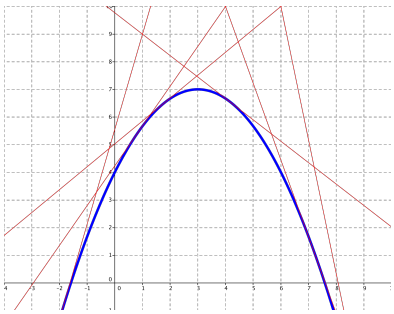


Figura 4: Curva convexa

Teorema.- Sea la parábola $y = ax^2 + bx + c$. Entonces esta parábola se puede expresar como:

$$y - \frac{4ac - b^2}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

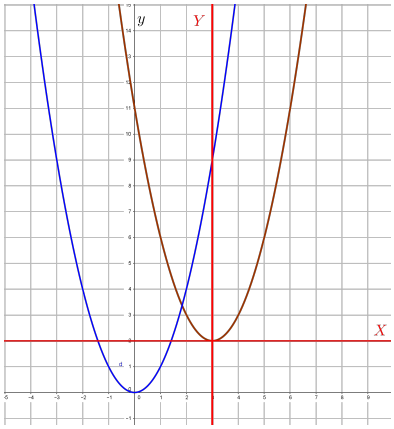
Demostración:

Supongamos que es posible una descomposición de la forma $y - k = a(x - h)^2$. Si desarrollamos esta expresión y trasponemos el término k obtenemos $y = ax^2 - 2hax + ah^2 + k$. Por tanto $ax^2 + bx + c = ax^2 - 2hax + ah^2 + k$. Identificando los polinomios de ambos miembros de la igualdad se obtiene:

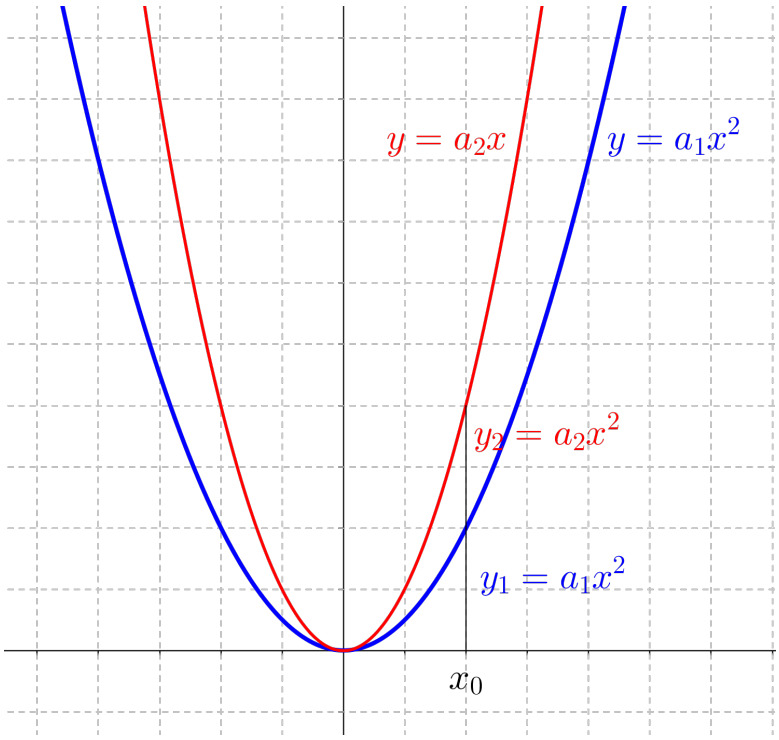
$-2ah = b \Rightarrow h = \dfrac{-b}{2a}$

$ah^2 + k = c \Rightarrow k = c - ah^2 \Rightarrow k = c - \cancel{a}\dfrac{b^2}{4\cancel{a^2}} \Rightarrow k = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$, esto es lo que queríamos probar.

Si hacemos el cambio de variable $X = x + \dfrac{b}{2a}$, $Y = y - \dfrac{4ac - b^2}{4a}$, obtenemos la ecuación $Y = aX^2$. Lo que hemos hecho con este cambio de variable es trasladar el origen de coordenadas al punto $\left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right)$. Lo indicamos en la siguiente gráfica:



La ecuación, en los nuevos ejes, de la parábola es $Y = aX^2$, que según hemos visto es una parábola en forma canónica con vértice en $(0, 0)$, ex decir $X = x + \dfrac{b}{2a} = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{b}{2a}$, $Y = y - \dfrac{4ac - b^2}{4a} = 0 \Rightarrow y = \dfrac{4ac - b^2}{4a} = 0$, esta es la razón por la que, en el recetario, se dice que la abcisa del vértice de la parábola es $x_v = \dfrac{-b}{2a}$.Está claro también que el eje de simetría está en la recta $x = \dfrac{-b}{2a}$, que es paralelo al eje y en los anteriores ejes de simetría. Con este teorema también queda establecido lo que se mencionaba en el recetario respecto a que las parábolas $y = ax^2$, $y = ax^2 + bx + c$ son idénticas salvo en su posición (tienen distinto vértice).Solo nos queda comentar la abertura de las ramas de la parábola. Solo nos queda comentar la abertura de las ramas de la parábola. Ya hemos visto que toda parábola se puede expresar en forma canónica, así que sin pérdida de generalidad consideremos dos parábolas $y = a_1x^2$, $y = a_2x^2$ tales que $|a_1| < |a_2|$. La que tiene mayor apertura será la que verifique que, para una determinada abcia x_0 el valor absoluto de la ordenada sea menor. en este caso $|y_1| = |a_1|x_0^2 < |y_1| = |a_2|x_0^2$, es decir tiene mayor abertura $y = a_1x^2$.


$y = a_2x$
$y = a_1x^2$
$y_2 = a_2x^2$
$y_1 = a_1x^2$
x_0