Logaritmos

Miguel Galo Fernández

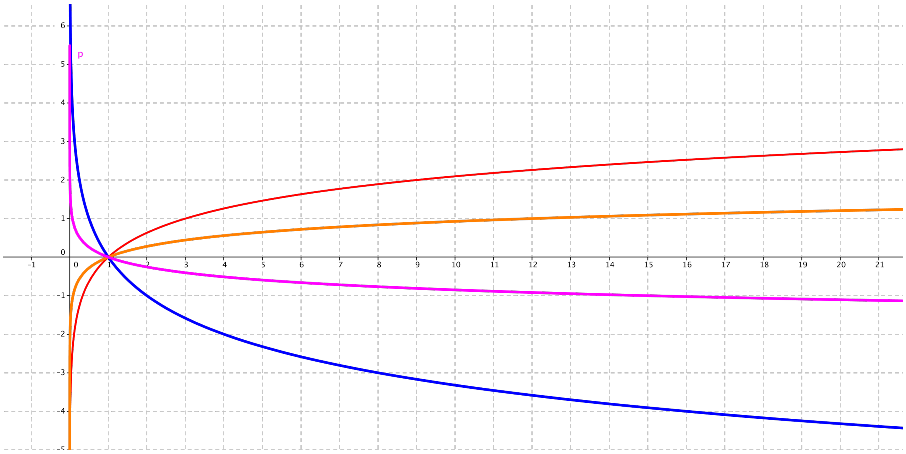

Figura 1: Logaritmos

Índice de Contenidos

1. Un poco de historia

Los logaritmos surgieron para facilitar la realización de operaciones. Se atribuye a Arquímedes la siguiente tabla:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

Supongamos que quiero hallar el producto de 16 por 32. Los valores correspondientes en la primera fila de estos números son 4 y 5 respectivamente. Suman 9. En la primera fila el 9 tiene como correspondiente en la segunda fila 512, esta es la solución, es decir 16x32=512.

Situémonos por un momento en la Europa de la Baja Edad Media. El comercio estaba en auge. Si un mercader veneciano quería comprar alguno de los productos que tanto escaseaban en occidente y que tanto habundaban en oriente (telas, especias, etc), era impensable que en el trayecto el mercader portara el oro para pagar la mercancia que comprara, los caminos eran poco seguros y corría el riesgo de que se lo robaran. El mercader portaba un documento que declaraba que una persona o personas de solvencia reconocida, tenía depósitos del mercader en su casa para cubrir el importe de la compra. Con posterioridad a la venta, el vendedor reclamaba la cantidad de la venta al depositario de los fondos. Esta situación describe la aparición de la banca. El banco necesita disponer de muchos depósitos para poder hacer negocios, de modo que ofrece un interés a los depositarios para que les confíen su dinero. Una modalidad de depósito bancario es el de capitalización compuesta. Veamos en qué consiste. Si inicialmente disponemos de un capital C_0 y el banco ofrece un interés r (al tanto por uno), cuando pase un año el capital que tendremos será $C_1 = C_0 + rC_0 = C_o(1 + r)$. Si aplicamos el mismo proceso al capital del que disponemos al inicio del segundo año tendremos $C_2 = C_1(1 + r) = C_0(1 + r)^2$. Al cabo de t años nuestro capital será $C_t = C_0(1 + r)^t$. Si inicialmente tenemos 1.000 € y el tipo de interés bancario es del 5 % (0.05 en tanto por uno), ¿cuánto tiempo ha de transcurrir para que se nos duplique el capital? La ecuación sería $2000 = 1000(1 + 0{,}05)^t$, es decir $2 = 1{,}05^t$. ¿Cómo calculamos t? Más adelante resolveremos, utilizando logaritmos, esta ecuación. A parte de el uso específico que supone el empleo de logaritmos para resolver el ejercicio anterior, hay otro uso para construir escalas de medida. Por ejemplo, hay una escala para medir el poder destructivo de un terremoto, la escala de Richter dada por la expresión $M = log\left(\dfrac{A \cdot \Delta t^3}{1{,}62}\right)$, donde A representa la amplitud de la onda sísmica, Δt es el incremento de tiempo transcurrido desde que aparecen las ondas P hasta que lo hacen las S y M es la energía liberada (poder destructivo). En esta escala logarítmica , a diferencia de la escala lineal, si el valor M=4 tiene un determinado poder destructivo, M=8 no tiene un valor destructivo doble del anterior, este valor es muchísimo mayor, esta es una particularidad de la escala logarítmica.

2. Definición de logaritmo

Sean $a, b \in \mathbb{R}^+$ dos números reales positivos. Se dice que el logaritmo en base b de a es $c \in \mathbb{R}$ y se escribe $\log_b a = c$, si se verifica que $b^c = a$. Por ejemplo $\log_2 16 = 4$ ya que se verifica que $2^4 = 16$. Loa función logaritmo no conserva ninguna operación, es decir el logaritmo de una suma no es la luma de los logaritmos de cada sumando, cosa que ocurre tambien con el resto de operaciones..

2.1. Logaritmo de un producto

$$\log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$$

Demostración

Sean $\log_b x = r,\ \log_b y = s$. De la definición de logaritmo se obtiene que $x = b^r,\ y = b^s \Rightarrow x \cdot y = b^{r+s} \Rightarrow \log_b(x \cdot y) = r + s \Rightarrow \log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$

2.2. Logaritmo de un cociente

$$\log_b \left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$$

Demostración

Sean $\log_b x = r,\ \log_b y = s$. De la definición de logaritmo se obtiene que $x = b^r,\ y = b^s \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{b^r}{b^s} = b^{r-s} \Rightarrow \log_b \left(\frac{x}{y}\right) = r - s \Rightarrow \log_b \left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$

2.3. Logaritmo de una potencia

$$\log_b(x^n) = n \log_b x$$

Demostración

Sea $\log_b x = r$. Entonces por definición de logaritmo $x = b^r \Rightarrow x^n = (b^r)^n \Rightarrow x^n = b^{nr} \Rightarrow \log_b x^n = n \cdot r = n \cdot \log_b x$

2.4. Logaritmo de una exponencial

$$\log_b a^x = x \log_b a$$

La demostración de esta propiedad se hace exactamente de la misma manera que en el caso anterior

2.5. Inyectividad del logaritmo

$$\text{Si } \log_b x = \log_b y \text{ entonces } x = y$$

Demostración

$$\log_b x = \log_b y \Rightarrow \log_b x - \log_b y = 0 \Rightarrow \log_b \left(\frac{x}{y}\right) = 0 \Rightarrow \frac{x}{y} = b^0 = 1 \Rightarrow x = y$$

2.6. Otras propiedades de los logaritmos

a) $\log_b b = 1$

b) $\log_b 1 = 0$

c) $b^{\log_b x} = x$

Demostración

a) Sea $\log_b b = x$. Entonces $b = b^x \Rightarrow x = 1$

b) La propiedad es una trivialidad ya que se deduce del hecho de que $b^0 = 1$

c) Es evidente que $\log_b x = \log_b x$. Si aplicamos la definición de logaritmo $x = b^{\log_b x}$

2.7. Cambio de base en logaritmos

Supongamos que tenemos medios para calcular el logaritmo en base b de cualquier número real positivo $x \in \mathbb{R}^+$. ¿Cómo podriamos calcular el logaritmo de ese número en base a?

Sea $\log_a x = r \Rightarrow x = a^r$. Si en esta igualdad tomamos logaritmos en base b obtenemos $\log_b x = \log_b a^r \Rightarrow \log_b x = r \log_b a$ si ahora despejamos r en esta igualdad $r = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$, y si sustituimos r por su valor $\boxed{\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}}$ esta es la expresión del cambio de base que buscamos.

2.8. Bases más utilizadas en logaritmos

Las bases más utilizadas en logaritmos son la base 10 y la base el número e.

a) Logaritmos decimales, vulgares o de Briggs: son los de base 10 y se puede omitir la base, es decir $\log_{10} x = \log x$

b) Logaritmos neperianos: son los de base el número e y la notación que siguen es $\log_e x =$ $= Ln(x)$

3. Ejercicios para afianzar la teoría

1. Halla el logaritmo en base 216 del número $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$
2. Sabiendo que $\log 3 = 0'4771$ y que $\log 2 = 0'3010$, calcular $\log 2'025$
3. Si la base logarítmica es $1/2$, ¿cómo son los logaritmos de los números mayores que la unidad?
4. Sabiendo que $\log 3 = 0'4771$, calcular $\log \sqrt{0'3}$
5. si $\log_7 N = h$, calcular $\log_7 \dfrac{n}{49}$
6. Si $\log_b a = m$, calcular $\log_a b$
7. ¿Qué se ha de hacer a un número para que su logaritmo en base 8 aumente en 3 unidades? Pon un ejemplo.
8. ¿Cómo son los logaritmos de dos números recíprocos?
9. Si un número x se multiplica por 49, su logaritmo aumenta en 2 unidades, ¿cuál es la base?
10. Si los números están en progresión geométrica, ¿cómo están relacionados sus logaritmos?