Números irracionales

Miguel Galo Fernández

agosto de 2009

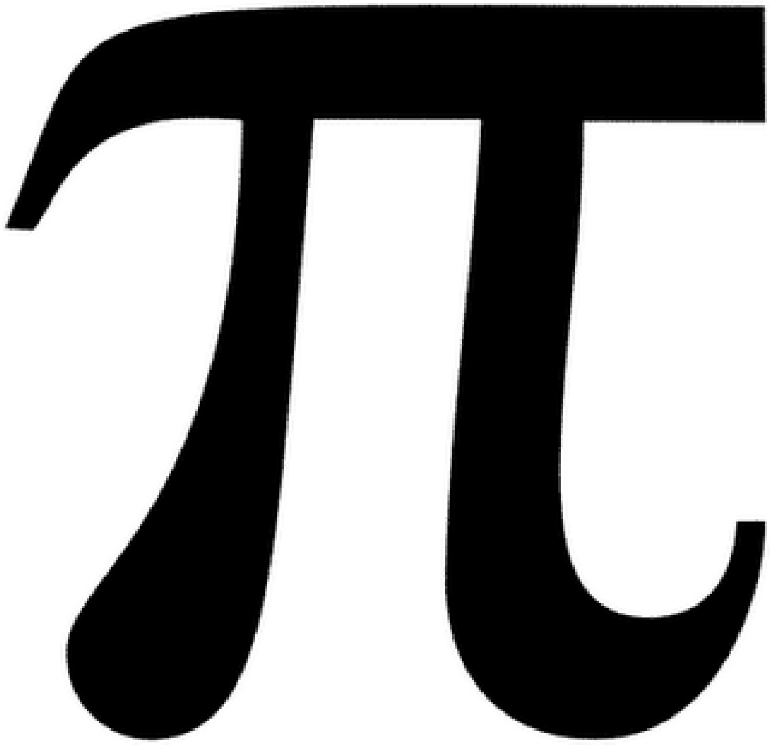

Figura 1: El rostro de π estaba enmascarado; se sobreentendía que nadie podía contemplarlo y continuar con vida. Pero unos ojos de penetrante mirada acechaban tras la máscara, inexorables, fríos y enigmáticos (Bertrand Russell)

Índice de Contenidos

1. La cuadratura del círculo

La cudratura del círculo consiste en hallar, utilizando únicamente regla y compás, el lado de un cuadrado que tenga la misma superficie de un círculo de radio dado. Este problema se trató de resolver desde la antigüedad clásica. Ya en el siglo I Plutarco menciona que Anaxágoras (siglo V a.C.), que fue condenado a prisión en Atenas por haber afirmado que el sol no era un dios sino una enorme piedra incandescente, para entretenerse intentó cuadrar el círculo sin conseguirlo. Leonardo Da Vinci se sintió atraido por el problema e ideó varias cudraturas mecánicas. La solución a la imposibilidad de la cuadratura del círculo vino en 1882 de la mano del matemático alemán Ferdinan Lindemann. Este demostró que π es un número transcendente, concepto equivalente a que no se puede construir con regla y compás un segmento de longitud π. En realidad demostró que π no es raiz de ningún polinomio de la forma $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ cuyos coeficientes son racionales, es decir $(a_i)_{0\leq i\leq n} \in \mathbb{Q}$. Este resultado cerró el problema de la cuadratura del círculo aunque continuamente sigan apareciendo cuadracírculos, es una cuestión de ignorancia.

Los griegos le tenían pavor a los números irracionales; se referían a ellos como números inconmensurales ya que no se pueden medir. Llegados aquí hay que hacer hincapié en la torpeza de la mayoría de los libros de texto que en un arrebato de utilitarismo, transmiten mal el valor de los números irracionales asignándoles una aproximación a un número irracional. ¿Desde cuando $\sqrt{2} = 1,414213562373095$? Este es un valor aproximado , es imposible indicar con un número decimal el valor de $\sqrt{2}$.

2. Números irracionales

(Segmentos conmensurables)Dos segmentos a y b se dicen conmensurables si existe un tercer segmento ξ tal que $a = n \cdot \xi,\ b = m \cdot \xi$ donde n y m han de ser enteros $(n, m \in \mathbb{Z})$. En caso contrario se dice que las longitudes a y b son inconmensurables.

Veamos que 1 y $\sqrt{2}$ (el lado y la diagonal de un cuadrado de lado 1) son inconmensurables.

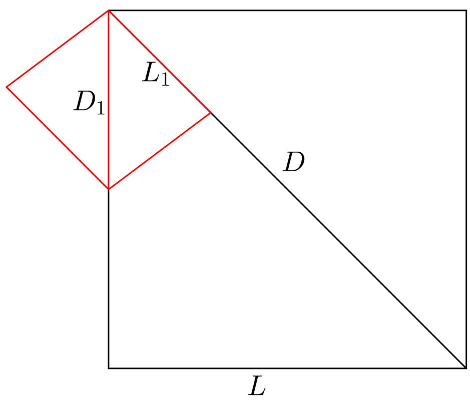

Figura 2: Segmentos inconmensurables

Si nos fijamos en la figura2 $L_1 = D - L$, siendo D_1 la diagonal del cuadrado de lado L_1. Podemos reiterar este proceso hasta el infinito.

Proposición 1 *En las condiciones anteriores se verifica que* $D_1 = L - L_1$

Demostración

Si aplicamos el Teorema de Pitágoras en el cuadrado pequeño obtenemos $D_1 = L_1 \cdot \sqrt{2} = (D - L) \cdot \sqrt{2} = D \cdot \sqrt{2} - L \cdot \sqrt{2} = L \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} - D = 2 \cdot L - D$*. Hemos obtenido que* $D_1 = 2 \cdot L - D = L - (D - L) = L - L_1$ *(c.s.q.d.)*

Volvamos a nuestro tema, a la demostración de la irracionalidad de $\sqrt{2}$*. Por reducción al absurdo, supongamos que siendo* L *conmensurable también lo fuera* $\sqrt{2}$*. Como* $L_1 = D - L$*, resulta que* L_1 *también sería conmensurable (es obvio que la diferencia entre longitudes conmensurables es otra longitud conmensurable). Si reiteramos el proceso generaríamos una sucesión decreciente* $L_1 > L_2 > \cdots > L_n > \cdots$*. En este descenso infinito llegaría un momento en el que un valor* L_i *sería menos que* ξ*, aún siendo un múltiplo entero de* ξ *lo cual es una contradición. Luego* $\sqrt{2}$ *no puede ser conmensurable, es inconmensurable (irracional).*

Estamos utilizando las palabras inconmensurable e irracional con el mismo significado. Al principio hemos definido lo que significa mensurable/inconmensurable, irracional es aquel número que no es racional en el sentido de que no se puede expresar como cociente de dos enteros con denominador no nulo. ¿Dicen lo mismo las dos definiciones? ***SI****, es lo que vamos a demostrar a continuación.*

Proposición 2 *Sean* $a \in \mathbb{Q}$*,* $b \in \mathbb{R}$*. Entonces* a *y* b *son conmensurables* $\Longleftrightarrow b = \dfrac{m}{n}$*, siendo* $m, n \in \mathbb{Z}$

Demostración

$\Rightarrow$ *) Supongamos que* a *y* b *son conmensurables y que la expresión de* a *como fracción es* $a = \dfrac{\alpha}{\beta}$*. Según la definición dada de conmensurables* $\exists\ \xi$ *tal que* $a = k \cdot \xi, b = l \cdot \xi$*, siendo* k *y* l *números enteros. Por tanto* $\dfrac{b}{a} = \dfrac{l}{k} \Longrightarrow b = \dfrac{l \cdot \alpha}{k \cdot \beta}$*. Si tomamos* $m = l \cdot \alpha$*, y* $n = k \cdot \alpha$ *tenemos demostrada la condición necesaria.*

$\Leftarrow$ *) Supongamos ahora que* $b = \dfrac{m}{n}$*, siendo* $m, n \in \mathbb{Z}$*. Como* $a = \dfrac{\alpha}{\beta}$*, tomemos* $M =$ *m.c.m.*(β, n)*. Existirán enteros* $k, l \in \mathbb{Z}$ *tales que* $M = k \cdot \beta$ *y* $M = l \cdot n$*. Si llamamos* $\xi = \dfrac{1}{M}$ *entonces* $a = k \cdot \alpha \dfrac{1}{k \cdot \beta} = z_1 \cdot \xi$*, siendo* $z_1 = k \cdot \alpha \in \mathbb{Z}$*. De la misma manera* $b = l \cdot \dfrac{1}{l \cdot n} = z_2 \cdot \xi$*, siendo* $z_2 = l \cdot n \in \mathbb{Z}$*. Las expresiones* $a = z_1 \cdot \xi$ *y* $b = z_2 \cdot \xi$ *nos aseguran que* a *y* b *son conmensurables.*

Hemos establecido una equivalencia entre conmensurable y racional, o lo que es lo mismo entre inconmensurable e irracional. Vamos a ver una demostración de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ *en la que no haremos referencia a mensurable/inconmensurable. Para ello vamos a necesitar la siguiente proposición*

Proposición 3 *Sea* $z \in \mathbb{Z}$ *un número entero. Entonces* z^2 *es par* $\Longleftrightarrow z$ *es par*

Demostración

$\Rightarrow$ *) Supongamos que* z^2 *es par y que* z *fuese impar. Entonces se podrían expresar* z^2 *y* z*, respectivamente, como* $z^2 = 2l,\ z = 2k + 1 \Rightarrow z^2 = 4k^2 + 4k + 1 \Rightarrow 2(2l^2 - 2k^2 - 2k) = 1$ *lo que* *es una contradición ya que 1 no es número par. Luego ha de ser z par.*

$\Leftarrow$ *) Si z es par* $z = 2k \Rightarrow z^2 = 4k^2 = 2(2k^2) \Rightarrow z^2$ *es par*

Proposición 4 $\sqrt{2}$ *es irracional*

Demostración

Por reducción al absurdo, supongamos que $\sqrt{2}$ *fuese un número racional. Entonces podría expresarse como cociente de dos números enteros, es decir* $\sqrt{2} = \dfrac{m}{n}$ *(fracción que suponemos irreducible, si no lo fuera en todo lo que sigue emplearíamos la forma canónica de la fracción)* $2 = \dfrac{m^2}{n^2} \Rightarrow m^2 = 2n^2 \Rightarrow m^2$*es par* $\Rightarrow$ *m es par* $\Rightarrow m = 2l \Rightarrow m^2 = 4l^2 = 2n^2 \Rightarrow n^2 = 2l^2 \Rightarrow n^2$ *es par* $\Rightarrow$ *n es par. Si m y n son pares se produce una contradición con que la fracción* $\dfrac{m}{n}$ *sea irreducible. Por tanto* $\sqrt{2}$ *no puede ser un número racional, es irracional.*

En general podríamos demostrar que si p es un número primo, entonces $\sqrt{p}$ *es irracional. Para ello necesitamos los siguientes resultados:*

Teorema 5 *(Teorema de Bezout) Sean* $a, b \in \mathbb{N}$ *y sea* $d = mcd(a, b)$*. Entonces* $\exists\ x, y \in \mathbb{Z}$ *tales que* $d = ax + by$

Demostración

Consideremos el conjunto $S = \{ax+by \in \mathbb{N} \ / \ x, y \in \mathbb{Z}\}$ *Entonces* $S \neq \emptyset$*, ya que* $a \in S$ *al ser* $a = a1+b0$*. Según el principio de buena ordenación S posee un máxima cota inferior, el mínimo. Sea* $m = min(S)$*. Lo que pretendemos demostrar es que* $d \in S$*. Como* $m \in S \Rightarrow \exists\ x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ *tales que* $m = ax_0+by_0$*. Veamos que* $m|a$ *y que* $m|b$*. Al dividir a entre m obtenemos un cociente c y un resto r que verifica* $r < m$ *y que, según el algoritmo de Euclides* $a = mc + r$*. Si* $r = 0$ *es obvio que* $m|a$*. Si* $r \neq 0 \Rightarrow a = ax_0c + by_0c + r \Rightarrow r = a(1 - x_0c) - by_0c \Rightarrow r \in S$ *lo cual es una contradición con que r sea menor que m que es el mínimo de S. Luego ha de ser* $r = 0 \iff m|a$*. Análogamente demostraríamos que* $m|b$*. Entonces al ser d=mcd(a,b) se ha de cumplir que* $m|d \Rightarrow d = km = ax_0k + by_0k \in S$ *(csqd).*

Lema 6 *(Lema de Euclides) Sean* $a, b, c \in \mathbb{Z}$ *tales que* $(a, c) = 1$ *y que además* $c|ab$*. Entonces* $c|b$

Demostración

Al ser $(a, c) = 1$ *según el teorema de Bezout* $\exists\ x, y \in \mathbb{Z}$ *tal que* $1 = ax + cy \Rightarrow b = abx + cby$*. Como* $c|ab \Rightarrow c|abx$ *y también se verifica que* $c|cby$ *entonces* $c|abx + cby = b$ *(csqd)*

Lema 7 *. Sea p un número primo. Entonces* $p|m^2 \Leftrightarrow p|m$

Demostración

$\Rightarrow$*) supongamos que* $p|m^2$ *y que p no divide a m, es decir que* $(p, m) = 1$*. Esto no puede ser porque se produce una contradición con el lema de Euclides. Luego* $p|m$

Proposición 8 *Sea α una raiz del polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ donde $(a_i)_{0\leq i\leq n} \in \mathbb{Z}$. Entonces $\alpha | a_0$*

Demostración

*Al ser $P(x) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0 = 0 \Rightarrow \alpha(a_n\alpha^{n-1} +$
$+ a_{n-1}\alpha^{n-2} + \cdots + a_1) = -a_0 \Rightarrow a_n\alpha^{n-1} + a_{n-1}\alpha^{n-2} + \cdots + a_1 = \dfrac{-a_o}{\alpha} \Rightarrow \alpha | a_0$*

Proposición 9 *Sea $\dfrac{\alpha}{\beta}$ una raiz racional del polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ donde $(a_i)_{0\leq i\leq n} \in \mathbb{Z}$. Entonces $\alpha | a_0$ y $\beta | a_n$*

Demostración

Al ser $\dfrac{\alpha}{\beta}$ una raiz del polinomio $P(x)$ se verifica que $a_n\dfrac{\alpha^n}{\beta^n} + a_{n-1}\dfrac{\alpha^{n-1}}{\beta^{n-1}} + \cdots + a_1\dfrac{\alpha}{\beta} + a_0 = 0$. Si multiplicamos ambos términos de la igualdad por β^n tenemos que:

$a_n\alpha^n + a_{n-1}\beta\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\beta^{n-1}\alpha + a_0\beta^n = 0$. Si dividimos los miembros de esta ecuación por α y por β obtenemos:

$$a_n\alpha^{n-1} + a_{n-1}\beta\alpha^{n-2} + \cdots + a_1\beta^{n-1} + \frac{a_0}{\alpha}\beta^n = 0 \Rightarrow \alpha | a_0$$

$$\frac{a_n}{\beta}\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\beta^{n-2}\alpha + a_0\beta^{n-1} = 0 \Rightarrow \beta | a_n$$

Proposición 10 *Sea $p \in \mathbb{Z}$ un número primo. Entonces $\sqrt{p}$ es irracional*

Demostración

Consideremos el polinomio $P(x) = x^2 - p$. Una raíz de este polinomio es $\sqrt{p}$. Si $\sqrt{p} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{p} = \dfrac{a}{b}$. Según la proposición anterior $a|p \Rightarrow a = 1$ o bien $a = p$ y también se verifica que $b|1 \Rightarrow b = 1$. Las únicas raíces racionales del polinomio son 1 y p, lo cual es absurdo (ninguno de los dos valores es raíz del polinomio). Luego $\sqrt{p}$ es irracional.

3. Clasificación de los números irracionales

Hay dos tipos de números irracionales: los algebraicos y los transcendentes. Los irracionales algebraicos son raíces de un polinomio. Los irracionales transcendentes no son raíces de un polinomio. Un ejemplo de irracional algebraico es $\sqrt{p}$ siendo p un número primo. Un irracional transcendente es π. Aunque no podamos demostrarlo (la demostración requiere conocimientos de matemática superior) enunciamos el siguiente resultado debido a Ferdinand Lindemann: no existe un polinomio $P(x)$ que tenga como raíz el valor π. Con este resultado también podemos afirmar que π es irracional. Supongamos que π fuera un número racional. Entonces $\pi = \dfrac{a}{b}$. Pero la fracción $\dfrac{a}{b}$ es taíz de la ecuación $x^2 - \dfrac{a}{b}x$ lo que es una contradición.

4. Imposibilidad de la cuadratura del círculo

Una ecuación de 2º grado $ax^2 + bx + c = 0$ *se puede resolver gráficamente con regla y compás. Si tenemos una circunferencia de radi* r*, su superficie viene dada por la expresión* πr^2*. Sea* l *el lado del cuadrado que tiene la misma área que el circulo de radio* r*. Entonces* $l^2 = \pi r^2 \Leftrightarrow x^2 - \pi = 0$*, donde* $x = \frac{l}{r}$*. Esta ecuación no tiene solución por lo que es imposible hallar la longitud de* l *(con regla y compás).*